УДК 517.98

М. В. Заводовский

Рост обобщенных алгебр Темперли–Либа, связанных с графами Кокстера (четыре проектора)

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. С. Самойленко)

Вивчається ріст узагальнених алгебр Темперлі–Ліба, зв'язаних з графами Кокстера, породжених чотирма проекторами. Отримана повна класифікація узагальнених алгебр Темперлі–Ліба, зв'язаних з графами Кокстера, породжених чотирма проекторами, за зростанням. Описано клас скінченновимірних алгебр Темперлі–Ліба, алгебр поліноміального росту та алгебр експоненціального росту.

Алгебры Темперли–Либа и их $*$-представления в гильбертовом пространстве изучались в ряде работ [1–5], в связи с моделями статистической физики. В [6] были введены обобщенные алгебры Темперли–Либа и среди них выделены конечномерные алгебры, связанные с графами Кокстера: A_n, B_n, D_n, E_n, F_n, H_n и I_n. Этот список графов отличается от списка графов в [7], для которых конечны группы Кокстера, связанные с этими графами. В работе [8] изучен рост обобщенных алгебр Темперли–Либа, связанных с простыми графами, а в работе [9] — рост обобщенных алгебр Темперли–Либа, связанных с графами Кокстера, порожденных тремя проекторами. Отметим, что групповая алгебра группы Кокстера, связанная с графом $\widetilde{C}_2$, бесконечномерна и имеет экспоненциальный рост [7], а обобщенная алгебра Темперли–Либа, связанная с графом $\widetilde{C}_2$, имеет линейный рост [9]. Таким образом, и рост бесконечномерной обобщенной алгебры Темперли–Либа, связанной с графом $\mathbf{\Gamma}$, вообще говоря, не совпадает с ростом групповой алгебры группы Кокстера, связанной с $\mathbf{\Gamma}$.

В данной работе изучается размерность и рост обобщенных алгебр Темперли–Либа, связанных с графами Кокстера $\mathbf{\Gamma}$ (см. п. 1), порожденных четырьмя проекторами. Доказано, что если $\mathbf{\Gamma}$ — связный граф Кокстера и $|V\mathbf{\Gamma}| = 4$, то соответствующая алгебра конечномерна тогда и только тогда, когда граф $\mathbf{\Gamma}$ совпадает с одним из графов A_4, B_4, D_4, F_4 и H_4; алгебра имеет линейный рост тогда и только тогда, когда граф $\mathbf{\Gamma}$ совпадает с одним из графов $\widetilde{A}_3$, $\widetilde{B}_3$ и $\widetilde{C}_3$; алгебра имеет экспоненциальный рост тогда и только тогда, когда граф $\mathbf{\Gamma}$ не совпадает ни с одним из графов A_4, B_4, D_4, F_4, H_4, $\widetilde{A}_3$, $\widetilde{B}_3$ и $\widetilde{C}_3$.

1. Класс алгебр $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$. 1. Графом Кокстера $\mathbf{\Gamma}$ называется пара (Γ, f), где Γ — неориентированный граф, а f — отображение множества ребер $E\Gamma$ графа Γ во множество $\{3,4,5,\dots\}\bigcup\{\infty\}$. Граф Кокстера $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma, f)$ можно представлять как граф, в котором каждому ребру $(i,j) \in E\Gamma$ соответствует метка f_{ij}. Все метки имеют значения больше 3. Если некоторому ребру соответствует тройка, то принято не ставить такую метку.

Пусть $\mathbf{\Gamma}$ — связный граф Кокстера и $|V\mathbf{\Gamma}| = 4$. Зададим для каждого ребра $(i,j) \in E\Gamma$ набор чисел $\vec{\tau}_{ij} = (\tau_{ij}^{(1)}, \dots, \tau_{ij}^{(m_{ij})})$, где $m_{ij} = \left[\dfrac{f_{ij}}{2}\right]$, если f_{ij} — нечетное и $m_{ij} = \dfrac{f_{ij}}{2} - 1$, если f_{ij} — четное. В дальнейшем будем предполагать, что $0 < \tau_{ij}^{(k)} < 1$ для всех i, j, k. Положим

$\vec{\tau} = \bigcup\limits_{(i,j)\in E\Gamma} \vec{\tau}_{ij}$. Рассмотрим обобщенную алгебру Темперли–Либа $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$, ассоциированную с графом $\mathbf{\Gamma}$:

$$TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}} = \mathbb{C}\langle p_1, p_2, p_3 \mid p_k^2 = p_k^* = p_k,\ F_{ij}(\vec{\tau}) = 0,\ F_{ij}^*(\vec{\tau}) = 0,\ (i,j) \in E\mathbf{\Gamma},$$
$$p_i p_j = p_j p_i,\ (i,j) \notin E\mathbf{\Gamma}\rangle,$$

где

$$F_{ij}(\vec{\tau}) = \begin{cases} \prod\limits_{s=1}^{\left[\frac{f_{ij}}{2}\right]} (p_i p_j p_i - \tau_{ij}^{(s)} p_i) & \text{при} \quad f_{ij} = 2k-1, \\ \prod\limits_{s=1}^{\frac{f_{ij}}{2}-1} (p_i p_j p_i - \tau_{ij}^{(s)} p_i) p_j & \text{при} \quad f_{ij} = 2k. \end{cases}$$

2. Так как алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ конечнозаданы, то в зависимости от $\mathbf{\Gamma}$ и, вообще говоря, от $\vec{\tau}$ они либо конечномерны, либо имеют полиномиальный рост, либо экспоненциальный рост (см., например, [10]).

Предложение 1. *Пусть $\mathbf{\Gamma}$ — граф Кокстера ($|V\mathbf{\Gamma}| = 4$), $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ — алгебра Темперли–Либа, связанная с $\mathbf{\Gamma}$. Тогда размерность или рост $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ не зависят от $\vec{\tau}$.*

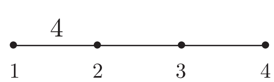
3. Пусть $\mathbf{\Gamma_1} = (V\mathbf{\Gamma_1}, E\mathbf{\Gamma_1})$ — граф Кокстера. Построим новый граф Кокстера $\mathbf{\Gamma_2}$ следующим образом. Множества вершин графов совпадают: $V\mathbf{\Gamma_1} = V\mathbf{\Gamma_2}$. Множества ребер также совпадают, только отличаются на каком-то фиксированном ребре меткой: зафиксируем ребро $(i,j) \in E\mathbf{\Gamma_1}$, которому соответствует метка $m_{ij}^{(1)}$ в графе $\mathbf{\Gamma_1}$, а в графе $\mathbf{\Gamma_2}$ этому ребру соответствует метка $m_{ij}^{(2)} > m_{ij}^{(1)}$. Будем говорить, что граф $\mathbf{\Gamma_2}$ получен из графа $\mathbf{\Gamma_1}$ увеличением значения метки на ребре (i,j).

Лемма 1. *Пусть $\mathbf{\Gamma_1}$ и $\mathbf{\Gamma_2}$ — графы Кокстера, $TL_{\mathbf{\Gamma_1},\vec{\tau}_1}$ и $TL_{\mathbf{\Gamma_2},\vec{\tau}_2}$ — связанные с ними обобщенные алгебры Темперли–Либа. Пусть граф $\mathbf{\Gamma_2}$ получен из графа $\mathbf{\Gamma_1}$ увеличением метки на некотором ребре. Тогда размерность или рост алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma_1},\vec{\tau}_1}$ не больше размерности или роста алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma_2},\vec{\tau}_2}$.*

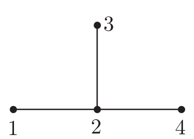
2. Конечномерные алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$. Непосредственно проверяется, что обобщенные алгебры Темперли–Либа, связанные с графами A_4, B_4, D_4, F_4 и H_4, конечномерны и подсчитываются их размерности (см. также [3]).

A_4 

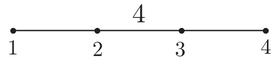
$\dim\ TL_{A_4,\tau} = 42$

B_4 

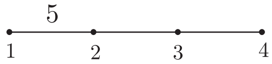
$\dim\ TL_{B_4,\tau_1,\tau_2} = 83$

D_4 

$\dim\ TL_{D_4,\tau} = 48$

F_4 

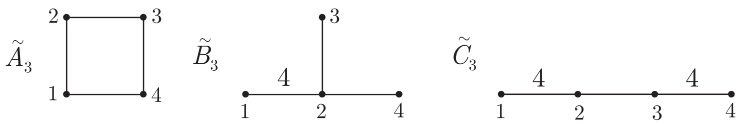
$\dim\ TL_{F_4,\tau_1,\tau_2} = 106$

H_4 

$\dim\ TL_{H_4,\,\tau_1,\,\tau_2,\,\tau_3} = 195$

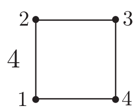
3. Алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma},\bar{\tau}}$ полиномиального роста. Вычисление роста алгебры сводится к вычислению роста соответствующего ориентированного графа (см. [10]). Вершинами графа роста алгебры являются все нормальные слова длины, меньшей на единицу, чем максимальная длина старшего слова элементов в базисе Гребнера. Ребро от слова u к слову v существует, если и только если для некоторых образующих x_i и x_j (возможно совпадающих) слова ux_i и x_jv равны и являются нормальными.

Обобщенные алгебры Темперли–Либа, связанные с графами $\widetilde{A}_3$, $\widetilde{B}_3$ и $\widetilde{C}_3$

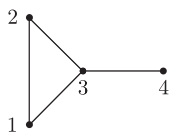


бесконечномерны и имеют линейный рост, так как в их графах роста нет двух циклов, соединенных путем.

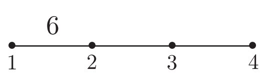
4. Алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma},\bar{\tau}}$ экспоненциального роста. Соответствующие алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma},\tau}$ имеют экспоненциальный рост, так как содержат свободные подалгебры, порожденные двумя образующими q_1 и q_2 (во всевозможных комбинациях элементов q_1 и q_2 не содержится ни одного старшего подслова элементов базиса Гребнера алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma},\tau}$).



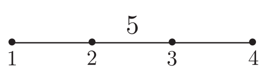
$q_1 = p_4p_3p_2p_1p_3$
$q_2 = p_2p_1p_3p_2p_4p_3p_2p_1p_4p_3$



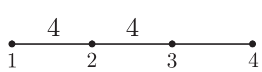
$q_1 = p_2p_1p_3$
$q_2 = p_2p_1p_3p_2p_1p_4p_3$



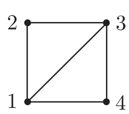
$q_1 = p_1p_2p_1p_3p_2$
$q_2 = p_1p_4p_3p_2p_1p_2p_1p_3p_2$



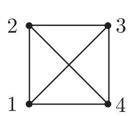
$q_1 = p_2p_1p_3p_2p_3p_2p_4p_3$
$q_2 = p_2p_1p_3p_2p_2p_4p_3$



$q_1 = p_1p_3p_2$
$q_2 = p_1p_3p_2p_4p_3p_2p_1p_2p_3p_2p_1p_4p_3p_2$



$q_1 = p_1p_3p_2p_1$
$q_2 = p_1p_3p_2p_4p_3p_2p_1p_4p_3p_2p_1p_2p_3p_2p_1p_4p_3p_2$



$q_1 = p_1p_3p_4p_1p_3p_2$
$q_2 = p_1p_3p_2p_4p_3p_2p_1p_4p_3p_2p_1p_4p_3p_2p_1p_4p_3p_2$

5. Основная теорема. На основании леммы 1 доказывается теорема о росте обобщенных алгебр Темперли–Либа, ассоциированных с графами Кокстера $\mathbf{\Gamma}$, когда $|V\mathbf{\Gamma}| = 4$.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{\Gamma}$ — *связный граф Кокстера*, $|V\mathbf{\Gamma}| = 4$.

1. *Алгебра* $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ *конечномерна тогда и только тогда, когда граф* $\mathbf{\Gamma}$ *совпадает с одним из графов* A_4, B_4, D_4, F_4 *и* H_4.

2. *Алгебра* $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ *имеет линейный рост тогда и только тогда, когда граф* $\mathbf{\Gamma}$ *совпадает с одним из графов* $\widetilde{A}_3$, $\widetilde{B}_3$ *и* $\widetilde{C}_3$.

3. *Алгебра* $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ *имеет экспоненциальный рост тогда и только тогда, когда граф* $\mathbf{\Gamma}$ *не совпадает ни с одним из графов* A_4, B_4, D_4, F_4, H_4, $\widetilde{A}_3$, $\widetilde{B}_3$ *и* $\widetilde{C}_3$.

1. *Temperley H. N. V., Lieb E. H.* Relations between 'percolations' and 'colouring' problems and other graph theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the percolation problem // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. – 1971. – **322**. – P. 251–280.
2. *Jones V. F.* Index for subfactor // Invent. Math. – 1983. – **72**. – P. 1–15.
3. *Fan C. K.* Structure of a Hecke algebra quotient // J. Amer. Math. Soc. – 1997. – **10**, No 1. – P. 139–167.
4. *Green R. M.* Cellular algebras arising from Hecke algebras of type H_n // Math. Z. – 1998. – **229**. – P. 365–383.
5. *Green R. M.* Generalized Temperley-Lieb algebras and decorated tangles // J. Knot Theory and its Ramificat. – 1998. – **7**. – P. 155–171.
6. *Graham J. J.* Modular representations of Hecke algebras and related algebras // Ph. D. thesis. University of Sydney, 1995. – 123 p.
7. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Ч. 2. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. – Москва: Мир, 1972. – 334 р.
8. *Заводовский М. В., Самойленко Ю. С.* Рост обобщенных алгебр Темперли–Либа, связанных с простыми графами // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1579–1584.
9. *Заводовский М. В.* Рост обобщенных алгебр Темперли–Либа, связанных с графами Кокстера (три проектора) // Динамические системы. – 2009. – Вып. 27. – С. 31–40.
10. *Уфнаровский В. А.* Комбинаторные и ассимптотические методы в алгебре // Соврем. проблемы математики. Фундам. направления. – 1990. – **57**. – С. 5–177.

Институт математики НАН Украины, Киев
Поступило в редакцию 25.11.2009

M. V. Zavodovsky

The growth of generalized Temperley–Lieb algebras associated with Coxeter graphs (four projectors)

We get the complete classification by growth of the Temperley–Lieb generalized algebras associated with Coxeter graphs generated by four projectors. We describe the classes of finite-dimensional algebras of Temperley–Lieb, algebras with polynomial growth, and algebras with exponential growth.