УДК 519.46;550.832;517.9

І. М. Цифра

Застосування теоретико-групового аналізу до рівнянь ядерної геофізики

(Представлено академіком НАН України В. І. Старостенком)

Досліджується застосування групового аналізу до прямих і обернених задач ядерної геофізики. Знайдено групу Лі симетрії рівняння сповільнення нейтронів і побудовано анзаци, які редукують рівняння сповільнення в тривимірному просторі до звичайного диференціального рівняння. Отримано розв'язок цього рівняння для випадку, коли асимптотична довжина релаксації не стала величина, а є певною функцією від енергетичної змінної.

Теоретико-груповий метод є ефективним методом дослідження загальних властивостей задач математичної фізики. Останні десятиріччя він успішно використовується для побудови наближених і точних розв'язків (у тому числі фундаментальних) багатьох задач гідро- і газодинаміки, теорії пружності, електродинаміки тощо [1, 2]. Зокрема, дозволяє зводити рівняння в частинних похідних до звичайного диференціального рівняння (або системи рівнянь) в рамках класичної або умовної симетрії. Інтегруючи редуковане рівняння, можна отримати точні розв'язки в явному вигляді, такі як одно- й багатосолітонні. Крім того, за допомогою симетрій Лі–Беклунда можна побудувати закони збереження для розглядуваних диференціальних рівнянь. У даному повідомлені досліджуємо застосування групового аналізу до рівнянь перенесення нейтронів, зокрема, знаходимо групу симетрії рівняння сповільнення нейтронів для побудови інваріантного розв'язку.

За допомогою нескінченної групи Лі в статті [3] побудовано групове розшарування, яке використовується для зведення оберненої коефіцієнтної задачі для хвильового рівняння до прямої задачі, а нами побудовано групове розшарування для нестаціонарного рівняння дифузії теплових нейтронів за допомогою однопараметричної групи перетворень еквівалентності.

Групи симетрії в задачах сповільнення і дифузії нейтронів. Перспективність застосування теоретико-групового аналізу проілюструємо на прикладі отриманого в статті [4] рівняння сповільнення нейтронів:

$$L_n q \equiv \frac{\partial q}{\partial \tau} - \frac{\Lambda_{as}}{4}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} - \triangle_n q = 0, \tag{1}$$

де q — густина сповільнення нейтронів; τ — енергетична змінна типу віку; Λ_{as} — асимптотична довжина релаксації; $\triangle_n$ — оператор Лапласа в n-вимірному просторі. Початковим пунктом теоретичного аналізу симетрії рівняння (1) є встановлення групи інваріантності інфінітезимальним методом Лі [1, 5]. Алгебра Лі групи інваріантності рівняння (1) задається базисними операторами

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial \tau}, \qquad P_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad I = q\partial_q, \tag{2}$$

$$J_{km} = x_k P_m - x_m P_k, \qquad k, m = \overline{1, n}, \tag{3}$$

$$J_{0k} = \frac{2}{\Lambda_{as}} \tau P_k - \frac{\Lambda_{as}}{2} x_k P_\tau - \frac{x_k}{\Lambda_{as}} q \partial_q. \tag{4}$$

Цей результат отримується інфінітезимальним методом Лі, сучасну версію якого описано в монографії [5]. Введемо позначення $\alpha \equiv \Lambda_{as}^2/4$, $\tau \equiv x_0$, $\partial q/\partial x_\mu \equiv q_\mu$, $\partial^2 q/\partial x_\mu^2 \equiv q_{\mu\mu}$, $\mu = \overline{0, n}$. Тоді рівняння (1) запишеться у вигляді

$$q_0 - \alpha^2 q_{00} - q_{\mu\mu} = 0. \tag{5}$$

Тут і надалі за індексами, що повторюються, йде підсумовування. Відомо [1, 5], що необхідною і достатньою умовою інваріантності рівняння (1) відносно групи перетворень з інфінітезимальним оператором $X = \xi^\mu \partial/\partial x_\mu + \eta \partial/\partial q$ є рівність

$$X^{(2)}(q_0 - \alpha^2 q_{00} - q_{\mu\mu})|_{q_0 = \alpha^2 q_{00} - q_{\mu\mu}} = 0, \tag{6}$$

де $X^{(2)}$ — друге продовження оператора X:

$$X^{(2)} = \zeta^0 \partial q_0 + \sigma^{\mu\nu} \partial q_{\mu\nu}. \tag{7}$$

Коефіцієнти ζ^0, $\sigma^{\mu\nu}$ знаходяться за допомогою добре відомих формул продовження [1, 5]. Умова інваріантності (6) приводить до такої системи визначальних рівнянь:

$$\alpha^2 \xi_0^k + \xi_k^0 = 0, \qquad \alpha^2 \xi_{00}^k + \xi_{mm}^k = 2\eta_{k,q} + \xi_0^k, \qquad \xi_0^k = \xi_k^0,$$
$$\alpha^2 \xi_{00}^0 + \xi_{mm}^0 = 2\alpha^2 \eta_{0,q} - \xi_0^0, \qquad \eta_0 - \alpha^2 \eta_{00} - \eta_{mm} = 0,$$

де $\eta_{\nu,q} \equiv \partial^2 \eta/\partial x_\nu \partial q$; $\xi_\mu^\rho \equiv \partial \xi^\rho/\partial x_\mu$; $\xi_{\mu\nu}^\rho \equiv \partial^2 \xi^\rho/\partial x_\mu \partial x_\nu$.

Загальний розв'язок цієї системи можна записати як

$$\begin{aligned} &\xi^k = \theta_{km} x_m + \frac{\theta_{k0}}{\alpha} x_0 + \gamma_k, \qquad \xi^0 = \alpha \theta_{0m} x_m + \gamma_0, \\ &\eta = -\frac{\theta_{m0}}{2\alpha} x_m q + \beta q + \varphi(x_0, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{8}$$

де $\theta_{\mu\nu}$, β, γ_μ — довільні дійсні сталі; $\theta_{\mu\nu} = -\theta_{\nu\mu}$; φ — довільний розв'язок рівняння (1), який вибираємо рівним нулю. Підставляючи отримані значення для ξ^μ, η у формулу для оператора X, приходимо до алгебри інваріантності (2)–(4). Підалгебра, породжена операторами (3), (4), — ізоморфна алгебрі Лі групи $O(n+1)$ поворотів у $(n+1)$-вимірному просторі, базисні елементи якої

$$J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu, \qquad \mu, \nu = \overline{0, n}. \tag{9}$$

Ізоморфізм встановлюється таким відображенням:

$$\tau' = \frac{2\tau}{\Lambda_{as}}, \qquad q' = q e^{-2\tau/\Lambda_{as}^2}, \qquad x_1' = x_1, \ldots, x_n' = x_n. \tag{10}$$

За допомогою заміни змінних (10) рівняння (1) зводиться до простішого вигляду

$$\frac{\partial^2 q'}{\partial \tau'^2} + \triangle_n q' - \frac{q'}{\Lambda_{as}^2} = 0. \tag{11}$$

Знайдена симетрія рівняння (1) дозволяє істотно спростити процедуру побудови його розв'язків. Проілюструємо це на прикладі розв'язків, інваріантних відносно групи Лі, яка ізоморфна групі $O(n+1)$. Згідно з теорією інваріантних розв'язків, розв'язок рівняння (1) для неоднорідного нескінченного середовища треба шукати у вигляді

$$q = e^{2\tau/\Lambda_{as}^2} f_n(R). \tag{12}$$

Підставимо цей вираз у рівняння (1) та отримаємо звичайне диференціальне рівняння для $f_n(R)$:

$$f_n'' + (n-1)\frac{f_n'}{R} - \frac{f_n}{\Lambda_{as}^2}. \tag{13}$$

Розв'язок цього рівняння є добре відомим розв'язком, отриманим в статті [4], який виражається через спеціальні функції Макдональдса.

Далі розглянемо рівняння (1), якщо q залежить тільки від двох змінних τ, x, тоді

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} - \frac{\Lambda_{as}^2}{4} \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0, \tag{14}$$

де Λ_{as} — не стала величина, а є функцією від τ спеціального вигляду

$$\Lambda_{as} = \sqrt{a + b\tau} \tag{15}$$

(тут a, b — довільні дійсні сталі, $b \neq 0$).

У цьому випадку рівняння (14) інваріантне відносно однопараметричної групи Лі з генератором

$$D = 2\left(\tau + \frac{a}{b}\right)\partial_\tau + x\partial x - q\partial_q. \tag{16}$$

Фундаментальними інваріантами цієї групи є

$$\omega = \frac{x^2}{a + b\tau}, \qquad \omega_1 = q\sqrt{a + b\tau}.$$

Отже, ми повинні шукати розв'язок системи (14), (15) у формі

$$q = (a + b\tau)^{-1/2}\varphi(\omega). \tag{17}$$

Анзац (17) редукує систему (14), (15) до звичайного диференціального рівняння

$$\omega\left(\frac{b^2}{4}\omega + 4\right)\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + \left(\frac{3}{4}b^2\omega + b\omega + 2\right)\frac{d\varphi}{d\omega} + \left(\frac{3}{16}b + \frac{1}{2}\right)b\varphi = 0. \tag{18}$$

Впровадивши нову незалежну змінну $z = -b^2/16$, після кількох алгебраїчних перетворень отримаємо рівняння

$$\varphi'' z(z-1) + \varphi'\left[z\left(3 + \frac{4}{b}\right) + \frac{1}{2}\right] + \varphi\left(\frac{2}{b} + \frac{3}{4}\right) = 0, \tag{19}$$

яке можна записати таким чином:

$$\varphi'' z(z-1) + \varphi'\left[z(\alpha+\beta+1)+\frac{1}{2}\right] + \varphi\alpha\beta = 0, \tag{20}$$

де $\alpha = 3/2 + 4/b$; $\beta = 1/2$ або $\alpha = 1$; $\beta = 2/b + 3/4$. Співвідношення (20) є рівнянням для гіпергеометричних функцій і його розв'язок можна подати у вигляді

$$\varphi = F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}, -\frac{b^2}{16}\omega\right), \tag{21}$$

де F — гіпергеометрична функція. Тоді розв'язок системи (14), (15) є таким:

$$\varphi = (a+b\tau)^{-1/2} F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}, -\frac{b^2}{16}\frac{x^2}{a+b\tau}\right). \tag{22}$$

Отже, нами показано, що знання оператора симетрії дозволяє звести задачу побудови розв'язків рівняння в частинних похідних до інтегрування звичайних диференціальних рівнянь і таким чином знайти інваріантні розв'язки рівняння сповільнення нейтронів. Відомо, що скінченні групові перетворення відображають довільний розв'язок рівняння в інший розв'язок. Ця властивість використовується для побудови формул генерування нових розв'язків з відомих. У [6] показано, що скінченні групові перетворення можуть бути також використані для побудови асимптотичного розв'язку рівняння сповільнення нейтронів (1).

Ще одна можливість застосування групового аналізу, на яку слід звернути увагу саме в контексті аналізу і розв'язання обернених задач геофізики, — це побудова групового розшарування диференціальних рівнянь. Розглянемо нестаціонарне рівняння дифузії теплових нейтронів:

$$\frac{\Phi_t}{v} - D_r\Phi_r - D\left(\Phi_{rr} + \frac{\Phi_r}{r}\right) + \Sigma\Phi = 0, \tag{23}$$

де D — коефіцієнт дифузії; Σ — макроскопічний переріз поглинання нейтронів. За допомогою критерію (6) легко переконатися, що рівняння (23) є інваріантним відносно групи Лі з генератором

$$D = t\partial_t + r\partial_r + D\partial_D - \Sigma\partial_\Sigma. \tag{24}$$

Вводяться нові змінні через диференціальні інваріанти першого порядку:

$$\begin{aligned} &\frac{t}{r+t} = \omega_1, \qquad \Phi = \omega_2, \qquad r\Phi_r = h^1, \qquad (r+t)\Phi_t = h^2, \\ &\frac{D}{r+t} = h^3, \qquad \frac{\Sigma}{r+t} = h^4. \end{aligned} \tag{25}$$

Вважаємо, що ω_1, ω_2 — незалежні змінні, а h^1, h^2, h^3, h^4 — залежні змінні. Тоді рівняння (23) й умови сумісності зводяться до системи рівнянь

$$\begin{aligned} &h^1 + h^1_1(\omega_1 - 1) - h^1_2 h^2 + h^2 + h^1_1\omega_1 - h^1_2 H^1 = 0, \\ &1/vh^2 + h^3h^1\omega_1 + h^3_2(h^1)^2 - (h^3)^2h^1 - h^1_1(h^3)^2\omega_1 + h^1_2h^1(h^3)^2 + \frac{h^1(h^3)^2}{1-\omega_1} - h^4\omega_2 = 0, \\ &h^3 + h^3_1(1-\omega_1) + h^3_2h^2 = 0, \qquad h^4 + h^4_1(\omega_1 - 1) - h^4_2h^2 = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

(тут $h^k_l \equiv \partial h^k/\partial\omega_l$, $k = \overline{1,4}$, $l = 1, 2$).

Система рівнянь (25), (26) задає групове розшарування (23) відносно групи перетворень еквівалентності з генератором (24) і є рівносильною рівнянню (23). У статті [3] на прикладі хвильового рівняння показано як групове розшарування використовується для зведення оберненої коефіцієнтної задачі до прямої задачі для системи квазілінійних диференціальних рівнянь першого порядку типу (26). Очевидно, що цей метод може бути застосований не тільки до рівнянь хвильового типу або рівнянь типу (23), а й до ширшого класу рівнянь, що допускають нетривіальну симетрію (групу еквівалентності).

Таким чином, показано ефективність застосування групового аналізу в прямих і обернених задачах ядерної геофізики. Для рівняння сповільнення нейтронів знайдена група симетрії Лі і побудовані анзаци, які редукують це рівняння до звичайного диференціального рівняння. Повна група симетрії містить підгрупу, що є ізоморфною групі поворотів в $(n+1)$-вимірному просторі. Для випадку, де Λ_{as} — не стала величина, а є функцією від енергетичної змінної τ такого вигляду $\Lambda_{as} = \sqrt{a + b\tau}$, отримано розв'язок, виражений через гіпергеометричні функції. В роботі [3] побудоване групове розшарування хвильового рівняння, яке використовується для зведення оберненої задачі до прямої, при цьому істотним моментом є існування нескінченної симетрії хвильового рівняння. Нами побудовано групове розшарування нестаціонарного рівняння дифузії теплових нейтронів на підставі однопараметричної групи.

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.
2. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений Максвелла. – Киев: Наук. думка, 1983. – 200 с.
3. *Меграбов А. Г.* Об одном подходе к обратным задачам, основанном на групповом расслоении // Докл. АН СССР. – 1984. – **275**. – С. 583–586.
4. *Козачок И. А.* Постановка и решение предельной задачи стационарного замедления нейтронов на основе $P-2$ приближения // Геофиз. журн. – 1981. – **3**, № 4. – С. 3–17.
5. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.
6. *Козачок И. А., Цифра И. М.* Применение теоретико-группового анализа в задачах замедления нейтронов // Деп. в ВИНИТИ 23.11.88, № 8458. – Киев, 1988. – 8 с.

Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, Київ
Інститут математики Університету в Білостоці, Польща

Надійшло до редакції 30.09.2009

I. M. Tsyfra

Application of group-theoretic analysis to the equations of nuclear geophysics

The application of group analysis to direct and inverse nuclear geophysics problems is considered. The symmetry group of the equation of neutron slowing down and the ansatze reducing the slowing down equation in the three-dimensional case to the ordinary differential equation are found. The solution of this equation in the case where the asymptotic relaxation length is not constant but depends on the energy variable has been constructed.