УДК 514

В. А. Горькавый, Е. Н. Невмержицкая

О двумерных псевдосферических поверхностях в $\boldsymbol{E}^4$ с вырожденным преобразованием Бианки

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

Класифіковано псевдосферичні поверхні в чотиривимірному евклідовому просторі з виродженим перетворенням Біанкі.

Целью данной работы является описание вырожденного преобразования Бианки двумерных псевдосферических поверхностей F^2 в четырехмерном евклидовом пространстве E^4.

Напомним классическое определение преобразования Бианки (см. [1, 2]). Пусть F^2 — псевдосферическая поверхность в E^3, т. е. поверхность с постоянной отрицательной гауссовой кривизной $K \equiv -1$. Зададим F^2 радиус-вектором $r = r(x, y)$ в орициклических координатах (x, y), когда метрика поверхности имеет вид

$$ds^2 = dx^2 + e^{-2x} dy^2. \tag{1}$$

Преобразование Бианки переводит поверхность F^2 в новую поверхность $\widetilde{F}^2 \subset E^3$ с радиус-вектором

$$\widetilde{r}(x, y) = r + r_x. \tag{2}$$

Данное преобразование обладает рядом интересных свойств, основным среди которых является следующее (ср. [1, 2]).

Теорема 1. *Преобразованная поверхность $\widetilde{F}^2 \subset E^3$ является псевдосферической и имеет ту же гауссову кривизну, что и F^2, т. е. $\widetilde{K} \equiv K \equiv -1$.*

Таким образом, преобразование Бианки позволяет по заданной псевдосферической поверхности строить новые псевдосферические поверхности, причем реализация этой конструкции является легко выполнимой при условии, что на исходной поверхности задана орициклическая система координат.

В общем случае преобразование Бианки является регулярным. Но, вообще говоря, на преобразованной поверхности $\widetilde{F}$ могут возникать особенности (в теореме 1 речь идет, конечно же, о регулярной части поверхности $\widetilde{F}$). Более того, иногда преобразованная поверхность $\widetilde{F}$ может вырождаться в кривую — в этом случае преобразование Бианки называют *вырожденным*.

В качестве примера рассмотрим поверхность Бельтрами, которая получается вращением трактрисы. Ее радиус-вектор имеет вид

$$r = (e^{-x} \cos y, e^{-x} \sin y, \Phi(x)),$$

где функция $\Phi(x)$ такова, что $\Phi' = \sqrt{1 - e^{-2x}}$ [3]. Легко проверить, что координаты (x, y) являются орициклическими, а ее гауссова кривизна $K \equiv -1$. Применяя преобразование Бианки по формуле (2), получим вектор-функцию

$$\widetilde{r} = (0, 0, \Phi + \Phi'),$$

которая описывает прямую — ось вращения поверхности Бельтрами. Указанный пример является исключительным — *других псевдосферических поверхностей в* E^3 *с вырожденным преобразованием Бианки не существует.*

Преобразование Бианки было обобщено Ю. А. Аминовым на случай $F^n \subset E^{2n-1}$ (см. [1, 4]). Псевдосферическое подмногообразие F^n задавалось радиус-вектором $r = r(x, y_1, \ldots, y_{n-1})$ в орисферических координатах $(x, y_1, \ldots, y_{n-1})$, соответственно, метрика подмногообразия записывалась в стандартном виде: $ds^2 = dx^2 + e^{-2x}\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} dy_i^2\right)$. Преобразование Бианки строилось по формуле (2), при этом оказалось, что имеет место аналог теоремы 1: *преобразование Бианки переводит псевдосферическое подмногообразие* $F^n \subset E^{2n-1}$ *в псевдосферическое подмногообразие* $\widetilde{F}^n \subset E^{2n-1}$ *той же постоянной отрицательной кривизны.* Интересно было бы выяснить, для каких псевдосферических подмногообразий $F^n \subset E^{2n-1}$ преобразование Бианки будет вырожденным.

Актуальным является вопрос о построении теории преобразования Бианки и более общего преобразования Беклунда для псевдосферических поверхностей в евклидовых пространствах произвольной размерности. Ю. А. Аминов и А. Сым [5] решали эту задачу для двумерных псевдосферических поверхностей в четырехмерном евклидовом пространстве E^4. На поверхности F^2 с кривизной $K \equiv -1$ выбирались орициклические координаты, и преобразование Бианки поверхности F^2 строилось по стандартной формуле (2). Оказалось, что преобразованная поверхность уже не будет псевдосферической, т. е. теорема 1 в случае $F^2 \subset E^4$ не верна. С другой стороны, было показано, что при некоторых дополнительных требованиях преобразование Бианки переводит псевдосферическую поверхность в псевдосферическую. Иначе говоря, был выделен класс *специальных псевдосферических поверхностей в* E^4, для которых теорема 1 верна [5]. Локальное описание этих поверхностей представлено в [6].

Теорема 2. *Пусть* $F^2 \subset E^4$ — *псевдосферическая поверхность,* $r(x, y)$ — *ее радиус-вектор в орициклической системе координат. Преобразование Бианки* (2) *переводит* F^2 *в поверхность* $\widetilde{F}^2$ *с той же гауссовой кривизной* $\widetilde{K} \equiv -1$ *тогда и только тогда, когда на* F^2 *можно ввести сопряженную систему координат* $x = \varphi(u, v)$, $y = v$, *в которой фундаментальные формы* F^2 *имеют следующий вид:* $g = (d\varphi(u, v))^2 + e^{-2\varphi}dv^2$, $L^1 = \partial_u\varphi e^{\varphi}du^2 - \partial_u\varphi e^{-3\varphi}dv^2$, $L^2 = e^{-\varphi}P(u, v)dv^2$, $\mu_{21} = Q(u, v)du$.

Функции $\varphi(u, v)$, $P(u, v)$ и $Q(u, v)$ в теореме 2 не могут быть произвольными, они обязаны удовлетворять уравнениям Гаусса–Кодацци–Риччи, которые в рассматриваемом случае сводятся к системе дифференциальных соотношений

$$\partial_{uu}^2\varphi e^{-2\varphi} - 2(\varphi_u)^2 e^{-2\varphi} - \partial_{vv}^2\varphi e^{2\varphi} - 2(\varphi_v)^2 e^{2\varphi} - PQ - 1 = 0, \tag{3}$$

$$\partial_u P - \partial_u\varphi e^{-2\varphi}Q = 0, \tag{4}$$

$$\partial_v Q + \partial_v\varphi e^{2\varphi}P = 0. \tag{5}$$

Таким образом, специальные псевдосферические поверхности в E^4 описываются решениями φ, P, Q системы (3)–(5). Более того, как показано в [6], если к специальной псевдосферической поверхности F^2 применить преобразование Бианки, то преобразованная поверхность $\widetilde{F}^2$ также будет специальной псевдосферической, а само преобразование Бианки может интерпретироваться как инволютивное преобразование решений системы (3)–(5) вида $\{\varphi(u, v), P(u, v), Q(u, v)\} \to \{-\varphi(v, u), Q(v, u), P(v, u)\}$.

Важно отметить, что на функцию φ накладываются ограничения, связанные с регулярностью рассматриваемых поверхностей. А именно: регулярность F^2 обеспечивается выполнением условия $\partial_u\varphi \neq 0$, а регулярность $\widetilde{F}^2$ гарантируется выполнением условия $\partial_v\varphi \neq 0$.

Цель нашей работы состоит в *описании специальных псевдосферических поверхностей в E^4, для которых преобразование Бианки является вырожденным.* Доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть F^2 — специальная псевдосферическая поверхность. Ее преобразование Бианки будет вырожденным тогда и только тогда, когда либо*

I) фундаментальные формы поверхности F^2 в соответствующей орициклической системе координат $(x,\ y)$ имеют вид

$$g = dx^2 + e^{-2x}dy^2, \tag{6}$$

$$L^1 = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}\cos\alpha}dx^2 - e^{-x}\sqrt{1-e^{-2x}}\cos\alpha dy^2, \quad L^2 = e^{-x}\sqrt{1-e^{-2x}}\sin\alpha dy^2, \tag{7}$$

$$\mu_{21} = \left(\alpha' + \operatorname{tg}\alpha\frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}\right)dx, \tag{8}$$

где $\alpha = \alpha(x)$ — произвольная функция, либо

II) фундаментальные формы поверхности F^2 в соответствующей орициклической системе координат $(x,\ y)$ имеют вид

$$g = dx^2 + e^{-2x}dy^2, \tag{9}$$

$$L^1 = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}dx^2 - e^{-x}\sqrt{1-e^{-2x}}dy^2, \qquad L^2 = e^{-x}f(y)dy^2, \tag{10}$$

$$\mu_{21} = 0, \tag{11}$$

где $f = f(y)$ — произвольная функция.

Схема доказательства. Ввиду теоремы 2 специальная псевдосферическая поверхность F^2 в E^4 описывается решением φ, P, $Q(u,v)$ системы (3)–(5). Как отмечалось выше, регулярность преобразованной поверхности $\widetilde{F}^2$ эквивалентна выполнению условия $\partial_v\varphi \neq 0$, поэтому вырождение преобразования Бианки означает, что функция φ не зависит от v, т. е. $\varphi = \varphi(u)$. Тогда из (5) вытекает, что $Q = Q(u)$. Если $Q \neq 0$, то из (3) следует, что $P = P(u)$ — дальнейшее интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3)–(5) приводит к формулам (6)–(8). Если же $Q \equiv 0$, то из (4) вытекает, что $P = P(v)$, а уравнение (3) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для $\varphi = \varphi(u)$ — его интегрирование приводит к формулам (9)–(11).

Отметим, что специальные псевдосферические поверхности, описанные в теореме 3, обладают следующим свойством: соответствующая орициклическая сеть на каждой такой поверхности образована линиями кривизны.

Специальные псевдосферические поверхности типа II, представленные формулами (9)–(11), имеют более простое описание. А именно: в этом случае удается проинтегрировать уравнения Вейнгартена и восстановить радиус-вектор поверхности F^2:

$$r = e^{-x}p(y) + \Phi(x)q_0 + q_1, \tag{12}$$

здесь q_0 и q_1 — постоянные векторы, а вектор-функция $p(y)$ удовлетворяет условиям

$$(p, q_0) = 0, \qquad |p| = |q_0| \equiv 1, \qquad |p'| \equiv 1.$$

Легко проверить, применяя (2), что $\widetilde{r} = (\Phi + \Phi')q_0 + q_1$, т. е. преобразованная поверхность $\widetilde{F}^2$ вырождается в прямую с направляющим вектором q_0.

Очевидно, что вектор-функция $p(y)$ описывает некоторую кривую Γ на единичной сфере S^2 в гиперплоскости $E^3 \subset E^4$ с нормалью q_0, при этом y — натуральный параметр на Γ. Вектор q_1 соответствует параллельному переносу в E^4.

Рассмотрим конкретные примеры. Пусть $q_0 = (0, 0, 1, 0)$, $q_1 = 0$, а $p(y)$ описывает большую окружность на единичной сфере S^2, т. е. $p(y) = (\cos y, \sin y, 0, 0)$. Тогда радиус-вектор (12) примет вид

$$r = (e^{-x}\cos y, e^{-x}\sin y, \Phi, 0)$$

и будет, очевидно, описывать стандартную поверхность Бельтрами в E^3.

Пусть теперь $p(y)$ описывает окружность радиуса a на сфере $S^2 \in E^3$, т. е. $p(y) = \left(a\cos\dfrac{y}{a}, a\sin\dfrac{y}{a}, 0, \sqrt{1-a^2}\right)$. Тогда радиус-вектор (12) принимает вид

$$r = \left(e^{-x}a\cos\frac{y}{a}, e^{-x}a\sin\frac{y}{a}, \Phi, e^{-x}\sqrt{1-a^2}\right).$$

Его можно записать следующим образом:

$$r^t = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{y}{a} & -\sin\dfrac{y}{a} & 0 & 0 \\ \sin\dfrac{y}{a} & \cos\dfrac{y}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -\sqrt{1-a^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{1-a^2} & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 0 \\ \Phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что эта поверхность получается сложным вращением трактрисы.

Рассматривая другие кривые Γ с радиус-вектором $p(y)$ на единичной сфере S^2, с помощью формулы (12) получим другие более сложные примеры специальных псевдосферических поверхностей типа II, при этом функция $f = f(y)$, фигурирующая в (10), является геодезической кривизной сферической кривой Γ. Указанные поверхности естественно назвать *обобщенными поверхностями Бельтрами*.

Класс специальных псевдосферических поверхностей типа I, представленных формулами (6)–(8), является более интересным. Прежде всего, удается проанализировать вид кривых в E^4, которые могут получиться в результате вырожденного преобразования Бианки специальных псевдосферических поверхностей типа I.

Теорема 4. *Пусть специальная псевдосферическая поверхность $F^2 \subset E^4$ с $K \equiv -1$ такова, что ее фундаментальные формы имеют вид* (6)–(8). *Тогда кривая γ, которая получается в результате преобразования Бианки поверхности F^2, является регулярной плоской кривой. При этом для натурального параметра $\sigma = \sigma(x)$ на γ имеет место формула*

$$\frac{d\sigma}{dx} = \sqrt{\frac{1 + e^{-2x}\operatorname{tg}^2\alpha}{1 - e^{-2x}}}, \tag{13}$$

а первая кривизна кривой γ вычисляется по формуле

$$k_1 = \frac{\sqrt{1-e^{-2x}}e^{-x}}{\cos^2\alpha(1+e^{-2x}\operatorname{tg}^2\alpha)^{3/2}}\left(\frac{e^{-2x}\operatorname{tg}\alpha}{1-e^{-2x}} + \alpha'\right). \tag{14}$$

Эскиз доказательства. Записывая радиус-вектор (2) кривой γ и вычисляя его производные, воспользовавшись выражениями (6)–(8) и формулами Вейенгартена, находим выражения для натурального параметра и для кривизн кривой γ с помощью стандартных формул теории кривых (см., например, [1, гл. 1]).

Оказывается, что *любая* плоская кривая локально может быть получена с помощью вырожденного преобразования Бианки некоторой специальной псевдосферической поверхности типа I в E^4.

Теорема 5. *Пусть γ — регулярная плоская кривая. Тогда локально существует специальная псевдосферическая поверхность $F^2 \in E^4$ с $K \equiv -1$, преобразование Бианки которой будет вырожденным и преобразует F^2 в γ.*

Доказательство. Пусть регулярная плоская кривая γ задана натуральным уравнением $k_1 = k_1(\sigma)$. Формулы (13) и (14) можно переписать в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{d\sigma} = \sqrt{\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}\operatorname{tg}^2\beta}}, \tag{15}$$

$$\frac{d\beta}{d\sigma} = k_1\frac{\cos^2\beta(1+e^{-2x}\operatorname{tg}^2\beta)}{e^{-x}} - \frac{e^{-2x}\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1-e^{-2x}}\sqrt{1+e^{-2x}\operatorname{tg}^2\beta}} \tag{16}$$

для функций $x = x(\sigma)$ и $\beta(\sigma) = \alpha(x(\sigma))$. Задавая начальные условия $x(\sigma_0) = x_0$, $\beta(\sigma_0) = \beta_0$, восстанавливаем решение $x = x(\sigma)$, $\beta = \beta(\sigma)$. Поскольку $dx/d\sigma > 0$ ввиду (15), мы можем обратить функцию $x(\sigma)$ и найти функции $\sigma = \sigma(x)$, $\alpha = \beta(\sigma)$. Подставив $\alpha = \alpha(x)$ в (6)–(8), получим дифференциальные формы, коэффициенты которых удовлетворяют уравнениям Гаусса, Кодацци, Риччи. По теореме Бонне, в E^4 существует единственная с точностью до движения поверхность F^2 с указанными фундаментальными формами. Эта поверхность будет специальной псевдосферической, а ее преобразование Бианки переводит F^2 в заданную кривую γ, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 5 содержит метод построения специальной псевдосферической поверхности F^2 с вырожденным преобразованием Бианки: по заданной кривизне $k_1(\sigma)$ с помощью (15), (16) восстанавливаем функцию $\alpha(x)$, подставляем ее в выражения (6)–(8), интегрируем уравнения Вейнгартена и находим радиус-вектор искомой поверхности. Поскольку системы дифференциальных уравнений, возникающие на этом пути, достаточно сложные, нахождение радиус-вектора в явном виде является трудной задачей. Но иногда в некоторых частных случаях это удается сделать. Например, в случае, когда γ — прямая, т. е. $k_1 \equiv 0$. Оказывается, в этом случае поверхность F^2 описывается радиус-вектором (12), где $p(y)$ представляет сферическую кривую постоянной геодезической кривизны.

1. *Аминов Ю. А.* Геометрия подмногообразий. – Киев: Наук. думка, 2002. – 467 с.
2. *Tenenblat K.* Transformations of manifolds and applications to differential equations. – New York: Wiley, 1998. – 209 p.
3. *Борисенко О. А.* Диференціальна геометрія і топологія. – Харків: Основа, 1995. – 304 с.

4. *Масальцев Л. А.* Псевдосферическая конгруэнция Бианки в E^{2n-1} // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1994. – **1**, № 3/4. – С. 505–512.
5. *Aminov Yu., Sym A.* On Bianchi and Bäcklund transformations of two-dimensional surfaces in E^4 // Math. Phys., Anal., Geom. – 2000. – **3**, No 1. – P. 75–89.
6. *Горькавый В. А.* Конгруэнции Бианки двумерных поверхностей в E^4 // Мат. сб. – 2005. – **196**, № 10. – С. 79–102.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 16.11.2009

V. O. Gorkavyy, O. M. Nevmerzhytska

On two-dimensional pseudospherical surfaces in E^4 with degenerate Bianchi transformation

We classify pseudospherical surfaces in a four-dimensional Euclidean space, whose Bianchi transformations are degenerate.