

## ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ БЕЗ УГЛОВЫХ ТОЧЕК ПРИ КОНВЕКТИВНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ

*Abstract:* In this article the temperature field of thin isotropic shell with the curvilinear opening without angular points is determined. The shell is in the conditions of convective heat exchange with an external environment, and the border condition of the third type is executed on the contour of opening. A task decides the method of indignation of form of border.

Исследование термонапряженного состояния тонкостенных элементов конструкций, работающих в условиях неравномерного нагрева, требует предварительного решения соответствующей задачи теплопроводности. Наличие отверстий вызывает дополнительные градиенты температуры и может оказать существенное влияние на прочность конструкции. Нахождению температурных полей в тонких оболочках с круговыми отверстиями посвящены работы [1-4]. В данной работе, на основании метода возмущения формы границы [5], приближенно решается задача теплопроводности для оболочки с криволинейным отверстием.

1. Пусть тонкая изотропная оболочка с криволинейным отверстием находится в условиях конвективного теплообмена с внешней средой, температура которой является функцией координат и времени, а на контуре отверстия выполняется граничное условие третьего рода. Примем, что в окрестности отверстия срединная поверхность оболочки обладает метрикой евклидовой геометрии и главные кривизны – постоянны.

Нахождение температурного поля оболочки, в предположения о линейном распределении температуры по толщине, сводится к решению уравнения [1]

$$\Delta F^{(j)} - \mu_j^2 F^{(j)} - \frac{\partial}{\partial \tau} F^{(j)} = -g_j, \quad j=1, 2 \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями:

$$F^{(j)} = F_j^{(0)}(r, \theta) \quad \text{при } \tau = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial F^{(j)}}{\partial n} = Bi[F^{(j)} - F_j^{(k)}(r, \theta, \tau)] \quad \text{при } (r, \theta) \in \Gamma, \quad (3)$$

здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\tau$  – время,  $(r, \theta)$  – полугеодезическая система координат на срединной поверхности оболочки с началом в “центре” отверстия,  $\Gamma$  – контур отверстия,  $n$  – внешняя нормаль к линии  $\Gamma$ , а величины  $\mu_j$ ,  $g_j$  определяются:

- геометрическими параметрами –  $2h$  – толщина оболочки,  $2k$  – средняя

кривизна оболочки в окрестности отверстия,  $r_0$  – характерный размер (радиус) отверстия;

- условиями нагрева –  $t^{(0)}$  – начальная температура оболочки,  $t^{(c)}_1$  и  $t^{(c)}_2$  – температура внешней среды, омывающей верхнюю и нижнюю поверхности оболочки,  $t^{(k)}_1$  и  $t^{(k)}_2$  – температура внешней среды, омывающей контур отверстия на верхнем и нижнем краях;
- теплофизическими параметрами –  $h_t^{(1)}$ ,  $h_t^{(2)}$  и  $h_t$  – относительные коэффициенты теплоотдачи с поверхностями оболочки и контура отверстия,  $Bi_{1,2} = 2hh_t^{(1,2)}$ ,  $Bi = r_0h_t$ .

Функции  $F_j^{(k)}$  и  $F_j^{(0)}$  определяются заданными функциями –  $t^{(k)}_1$ ,  $t^{(k)}_2$  и  $t^{(0)}$ .

Поскольку вид уравнения (1) и краевых условий (2), (3) не зависит от индекса  $j$  то, в дальнейшем, этот индекс опускаем.

2. При решении задачи (1-3), следуя [5], будем рассматривать отверстия такой формы, что функция

$$z = \omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon f(\zeta), \quad (z = re^{i\theta}, \zeta = \rho e^{i\gamma}) \quad (4)$$

определяет взаимно-однозначное конформное отображение бесконечной плоскости переменной  $\zeta$  с круговым отверстием единичного радиуса на бесконечную плоскость переменной  $z$  с отверстием, ограниченным кривой  $\Gamma$ . Функция  $f(\zeta)$  и величина  $\varepsilon$  зависят от формы отверстия  $|\varepsilon| \ll 1$ .

Решение уравнения (1) представим рядом по степеням параметра  $\varepsilon$  :

$$F = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p F_p(r, \theta, \tau). \quad (5)$$

Подставив выражение (5) в уравнение (1), получаем уравнение для определения  $F_p(r, \theta, \tau)$  :

$$\Delta F_p - \mu^2 F_p - \frac{\partial}{\partial \tau} F_p = -g \delta_p, \quad \delta_0 = 1, \delta_p = 0 \text{ при } p \neq 0. \quad (6)$$

Начальное условие (2) для  $p$ -го приближения примет вид:

$$F_p = F^{(0)} \delta_p \text{ при } \tau = 0. \quad (7)$$

Для записи функций  $F_p$ ,  $F^{(k)}$ ,  $\partial F_p / \partial n$  в криволинейной ортогональной системе координат  $(\rho, \gamma)$  используем следующие разложения

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s L_s \Phi(\rho, \gamma), \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{r_0} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s l_s \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad (8)$$

где  $\Phi$  – некоторая произвольное число раз дифференцируемая функция, а дифференциальные операторы  $L_s$  и функции  $l_s$  приведены в [6].

Подставляя ряд (5) в граничное условие (3) и представляя величины  $F_p$ ,  $F^{(k)}$ ,  $\partial F_p / \partial n$  в виде рядов (8), получаем граничное условие для  $p$ -го приближения

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_p}{\partial \rho} = & Bi[F_p - L_p F^{(\kappa)}] - \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{s=1}^p L_s F_{p-s} + \\ & + \sum_{s=1}^p [BiL_s F_{p-s} - l_s \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{i=0}^{p-s} L_i F_{p-s-i}] \quad \text{при } \rho = 1, \end{aligned} \quad (9)$$

здесь при  $p = 0$  все суммы отсутствуют.

В результате, для нахождения  $F_p$  имеем уравнение (6), начальное условие (7) и граничное условие (9), а решение уравнения (1) определится формулой

$$F(\rho, \gamma, \tau) = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p \sum_{s=0}^p L_s F_{p-s}(\rho, \gamma, \tau). \quad (10)$$

Заметим, что функции  $F_p(\rho, \gamma, \tau)$ , входящие в формулы (9, 10), являются решениями уравнения (6), в которые вместо переменных  $r$  и  $\theta$  поставлены переменные  $\rho$  и  $\gamma$ .

Таким образом, задача теплопроводности для оболочки с криволинейным отверстием сводится к последовательности задач для оболочки с круговым отверстием.

3. Рассмотрим теперь класс отверстий, контур которых представляет собой правильный  $(N + 1)$ - угольник с закругленными углами. Для таких отверстий  $f(\xi) = \xi^{-N}$ . При  $N = 1$  получаем эллипс, а при  $N \geq 2$  – правильный  $m = (N + 1)$  - угольник. Начало системы координат  $(r, \theta)$  располагается в центре симметрии отверстия. На рис 1. показан контур отверстия для  $N = 2$ .

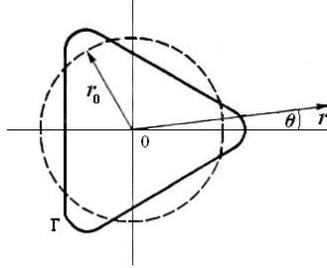


Рис. 1. Форма треугольного контура  $\Gamma$  при  $\varepsilon = 1/4$

Пусть температура внешней среды зависит только от времени, а начальная температура оболочки – постоянна. В этом случае, с точностью до второго приближения, имеем

$$\begin{aligned} F(\rho, \gamma, \tau) = & F_0 + \varepsilon(F_{1,m} + \rho^{-N} \frac{\partial F_0}{\partial \rho}) \cos m\gamma + \\ & + \varepsilon^2 \{ F_{2,0} + \frac{1}{2} \rho^{-N} [ \frac{\partial F_{1,m}}{\partial \rho} + \frac{m}{\rho} F_{1,m} + \frac{1}{2} \rho^{-N} ( \frac{\partial^2 F_0}{\partial \rho^2} + \rho^{-1} \frac{\partial F_0}{\partial \rho} ) ] + \\ & + [ F_{2,2m} + \frac{1}{2} \rho^{-N} ( \frac{\partial F_{1,m}}{\partial \rho} - m \rho^{-1} F_{1,m} + \frac{1}{2} \rho^{-N} \frac{\partial^2 F_0}{\partial \rho^2} - \frac{1}{2} \rho^{-N-1} \frac{\partial F_0}{\partial \rho} ) ] \cos 2m\gamma \}. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя интегральное преобразование Лапласа по переменной  $\tau$  найдем:

$$F_0 = Bi \int_0^{\tau} [\tilde{F}(\tau-t) - F^{(k)}(\tau-t)] M_0 dt + \tilde{F},$$

$$F_{1,m} = \rho^{-N} \int_0^{\tau} [Bi \frac{\partial}{\partial \rho} F_0(1, \tau-t) - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} F_0(1, \tau-t)] M_m dt,$$

здесь

$$\tilde{F} = \exp(-\mu^2 \tau) [F^{(0)} + \int_0^{\tau} g(t) \exp(\mu^2 t) dt],$$

$$M_\ell = \frac{2}{\pi} \exp(-\mu^2 t) \int_0^{\infty} x \exp(-x^2 t) \frac{Y_\ell(\rho x) A(x) - J_\ell(\rho x) B(x)}{A^2(x) + B^2(x)} dx,$$

$$A(x) = x J'_\ell(x) - Bi J_\ell(x), \quad B(x) = x Y'_\ell(x) - Bi Y_\ell(x),$$

$J_\ell, Y_\ell$  – функции Бесселя.

Выражения для  $F_{2,0}$  и  $F_{2,2m}$  (второе приближение) не приводим ввиду их громоздкости.

Для стационарной задачи теплопроводности решение (11) можно представить формулой:

$$F = A_0 K_0(\rho \mu) + g / \mu^2 + \varepsilon A_0 \mu [K_m(\rho \mu) C_1 / C_m - K_1(\rho \mu) \mu^{-N}] \cos m \gamma,$$

где

$$A_0 = Bi(F^{(k)} - g / \mu^2) / C_0, \quad C_\ell = K_\ell(\mu) (Bi + \ell) + \mu K_{\ell-1}(\mu),$$

$K_\ell$  – функция Макдональда.

4. В качестве числового примера рассмотрим стационарное температурное поле оболочки. Примем, что  $Bi_1 = Bi_2 = 0.1$ ,  $t^{(c)}_1 = t^{(c)}_2 = 1$ , а температура среды на контуре отверстия равна нулю. Геометрические параметры имеют следующие значения:  $k = 0.005$ ,  $h = 0.002$ ,  $r_0 = 0.03$ .

На рис. 2 – рис. 4 представлены результаты расчета, с точностью до второго приближения включительно, интегральной температурной характеристики  $T_1$  (средняя по толщине температура оболочки), причем штриховыми линиями показаны значения для кругового отверстия. При этом система координат расположена так, что линия  $\theta = 0$  совпадает с направлением большой полуоси эллипса и проходит через вершину треугольника и квадрата (см. рис. 1). Эллиптическое отверстие взято с  $\varepsilon = 1/4$  (эксцентриситет 0.8), для треугольного и квадратного отверстий  $\varepsilon = 1/4$  и  $\varepsilon = 1/9$ , соответственно.

Как видно из рис. 2, наибольшее изменение величины  $T_1$  происходит на контуре треугольного отверстия.

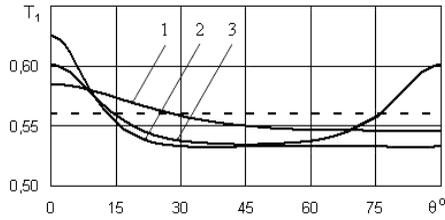


Рис. 2. Температура  $T_1$  на контуре: 1 – эллиптического, 2 – треугольного, 3 – квадратного отверстий;  $Bi = 3$ .

На рис. 3 показаны значения величины  $T_1$  на контуре отверстия для различных значений коэффициента теплоотдачи с контура отверстия.

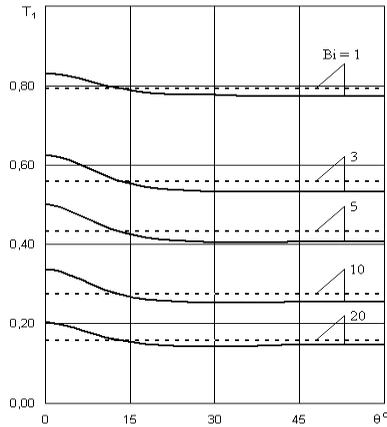


Рис. 3. Температура  $T_1$  на контуре треугольного отверстия при различных значениях коэффициента  $Bi$

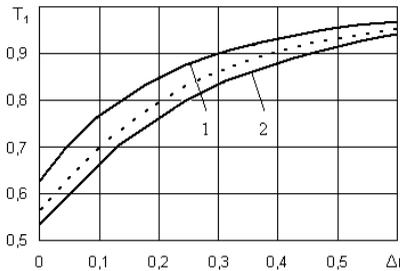


Рис. 4. Изменение величины  $T_1$  с удалением от контура треугольного отверстия.

На рис. 4 представлена температура  $T_1$  при удалении от треугольного отверстия по направлениям  $\theta = 0^\circ$  – кривая 1 и  $\theta = 60^\circ$  – кривая 2 для  $Bi = 3$ .

Из рисунка видно, что на расстоянии от контура отверстия большем, чем 0.6 температурное поле оболочки становится практически постоянным.

### **Выводы**

Поданный материал дает возможность определять температурные поля в тонких оболочках с криволинейным отверстием и использовать полученные температурные характеристики при решении соответствующих задач термоупругости.

1. Швец Р.Н., Павленко В.Д. О циклически симметричных задачах теплопроводности для пластин и оболочек с отверстиями при наличии теплообмена. – Инж.-физ. журн., 1972, **23**, № 5, с.890-897.
2. Швец Р.Н., Павленко В.Д., Матковский А.П. Квазистатическая задача термоупругости для тонких оболочек с круговым отверстием. – Докл. АН УССР, Сер. А, 1976 № 4 с. 347-351.
3. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: "Наук. думка", 1978. – 344 с.
4. Павленко В.Д., Матковский А.П. Квазистатические температурные напряжения в сферической оболочке с круговым отверстием. – Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 8, с. 89-93.
5. Гузь О. М. Про наближений метод визначення концентрації напружень навколо криволинійних отворів в оболонках. – Прикл. механіка, 1962, **8**, № 6, с. 605-612.
6. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Шнеренко К. И. Сферические днища, ослабленные отверстиями. Киев, "Наук. думка", 1970.– 324 с.

*Поступила 3.03.2011р.*

УДК 680.03

О.Ю.Афанасьева, Б.В.Дурняк, Ю.М.Коростіль

### **АНАЛІЗ УМОВ ВИНИКНЕННЯ НЕПРОЕКТНИХ НЕСПРАВНОСТЕЙ ТА ЇХ ОСОБЛИВОСТІ**

В статті розглядаються умови виникнення неprojektних несправностей і задачі, які виникають в зв'язі з проблемою їх виявлення. При цьому, проводиться аналіз причин виникнення несправностей їх особливості і підходи к методам рішення задач виявлення несправностей.

*Ключевые слова:* неprojectна несправність, діагностика, модель, аварійна ситуація.

Основною причиною виникнення неprojectних аварійних ситуацій є невідповідність дійсного стану технічного об'єкту (*ТО*) по відношенню до