

О. Ю. Швець

## Узагальнення сценарію переміжності при переході до детермінованого хаосу

(Представлено академіком НАН України А. А. Мартинюком)

Описано новий сценарій переходу до детермінованого хаосу, який узагальнює відомий сценарій Помо–Маннвілля.

При вивченні детермінованого хаосу важливе значення має встановлення сценарію переходу динамічної системи до усталеного хаотичного руху. Незважаючи на безмежне різноманіття реальних динамічних систем, на даний час описано всього три основних типи сценаріїв переходу до детермінованого хаосу. Це — сценарій Фейгенбаума [1, 2], перехід до хаосу через переміжність за Помо–Маннвіллем [3, 4] і перехід до хаосу через руйнування квазіперіодичних атракторів [5]. Тому опис нових типів сценаріїв таких переходів є актуальною та цікавою науковою задачею.

Розглянемо детерміновану динамічну систему, математична модель якої має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha p_1 - \left[ \beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) p_2; \\ \frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha q_1 + \left[ \beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_2 + 1; \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 + N_1 \beta - \mu_1 q_1; \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha p_2 - \left[ \beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1) p_1; \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha q_2 + \left[ \beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Ця система була отримана в роботах [6–8] при вивченні резонансних коливань вільної поверхні рідини в циліндричному баці, платформа якого збуджується електродвигуном обмеженої потужності. Вона є неідеальною динамічною системою за Зоммерфельдом–Кононенком [9]. Система (1) є нелінійною системою диференціальних рівнянь п'ятого порядку. Фазові змінні  $p_1$ ,  $q_1$  та  $p_2$ ,  $q_2$  — амплітуди домінуючих мод вільної поверхні рідини. Фазова змінна  $\beta$  пропорційна швидкості обертання вала електродвигуна. В систему (1) входить шість параметрів  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$ ,  $N_1$ ,  $N_3$ ,  $\mu_1$ , які визначаються через фізичні та геометричні характеристики бака з рідиною й електродвигуна. Детальний опис цих параметрів наведений у роботах [6–8].

У роботах [6–8] було доведено існування детермінованого хаосу в системі (1), класифіковано декілька типів хаотичних атракторів та показано, що хаотичні атрактори є типовими

атракторами цієї системи. Зауважимо, що детальне та всебічне вивчення хаотичної динаміки системи (1) можливо тільки за допомогою поєднання кількох чисельних методів та алгоритмів. Методика проведення таких досліджень описана в роботах [7, 8].

Розглянемо деякі сценарії переходу до хаосу, які мають місце в системі (1). Припустимо, що параметри системи дорівнюють:

$$\begin{aligned} A &= 1,12, & B &= -1,531, \\ \alpha &= -0,1, & N_1 &= -1, & \mu_1 &= 0,5. \end{aligned} \tag{2}$$

Параметр  $N_3$  розглядався як біфуркаційний і був змінним при проведенні чисельних розрахунків. Вивчимо деякі особливості переходу до хаосу при зміні значення  $N_3$ . Так, при  $N_3 = -0,38$  аттрактором системи є стійкий граничний цикл. При зменшенні значень  $N_3$  починається нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періоду граничних циклів, який закінчується виникненням хаотичного атрактора при  $N_3 \approx -0,3944$ . Перехід до хаосу відбувається за сценарієм Фейгенбаума [1, 2]. Всі граничні цикли каскаду мають нульовий старший ляпуновський характеристичний показник. Виникнення детермінованого хаосу визначається появою додатного ляпуновського характеристичного показника. Виниклий хаотичний аттрактор існує на дуже малому інтервалі зміни  $N_3$  і вже при  $N_3 = -0,39504$  змінюється хаотичним аттрактором іншого типу.

На рис. 1, *a* наведено частину фазопараметричної характеристики (біфуркаційного дерева) системи (1), побудовану за допомогою метода Ено [5, 7], на рис. 1, *б* — збільшений фрагмент цієї характеристики. У правій частині рисунків можемо спостерігати окремі “гілки” цього біфуркаційного дерева, яким відповідають періодичні аттрактори системи (1). У центрі та справа на цих рисунках розташовані густо-чорні області фазопараметричної характеристики, що відповідають хаотичним аттракторам. На рис. 1, *б* чітко спостерігаються розщеплення “гілок” біфуркаційного дерева, що відповідають біфуркаціям подвоєння періоду. Це є наочним підтвердженням того, що перехід від регулярних режимів до хаотичних при зменшенні параметра  $N_3$  відбувається за сценарієм Фейгенбаума.

В околі точки  $N_3 = -0,39504$  на рис. 1, *a* в лівій частині помітно значне зростання площі густо-чорної області. При проходженні даної точки спостерігається біфуркація типу “хаос–хаос”, у результаті якої в системі (1) виникає хаотичний аттрактор нового типу. Такі аттрактори характеризуються істотним зростанням об’єму області їх локалізації у фазовому просторі. Опишемо сценарій виникнення таких аттракторів. На рис. 1, *в*, *г* зображені проєкції фазових портретів хаотичних аттракторів, побудованих при  $N_3 = -0,39503$  та  $N_3 = -0,39504$ . Хаотичний аттрактор, наведений на рис. 1, *г*, відрізняється від хаотичного атрактора, наведеного на рис. 1, *в*, помітним збільшенням амплітуд часових реалізацій фазових змінних. Звернемо увагу, що більш темна середня частина атрактора, зображеного на рис. 1, *г*, якісно подібна до хаотичного атрактора з рис. 1, *в*. Ці рисунки прояснюють механізм переміжності при виникненні одного атрактора з іншого. У точці біфуркації хаотичний аттрактор з рис. 1, *в* зникає й у системі (1) виникає аттрактор нового типу, рух траєкторій по якому складається з двох фаз. “Ламінарну” фазу представляють хаотичні блукання траєкторій виниклого атрактора в околі траєкторій зниклого атрактора. У непередбачений момент часу траєкторії “зриваються” і йдуть у віддалені області фазового простору. Це “турбулентна” фаза рухів траєкторій. Потім траєкторії знову повертаються в область зниклого атрактора. Цей про-

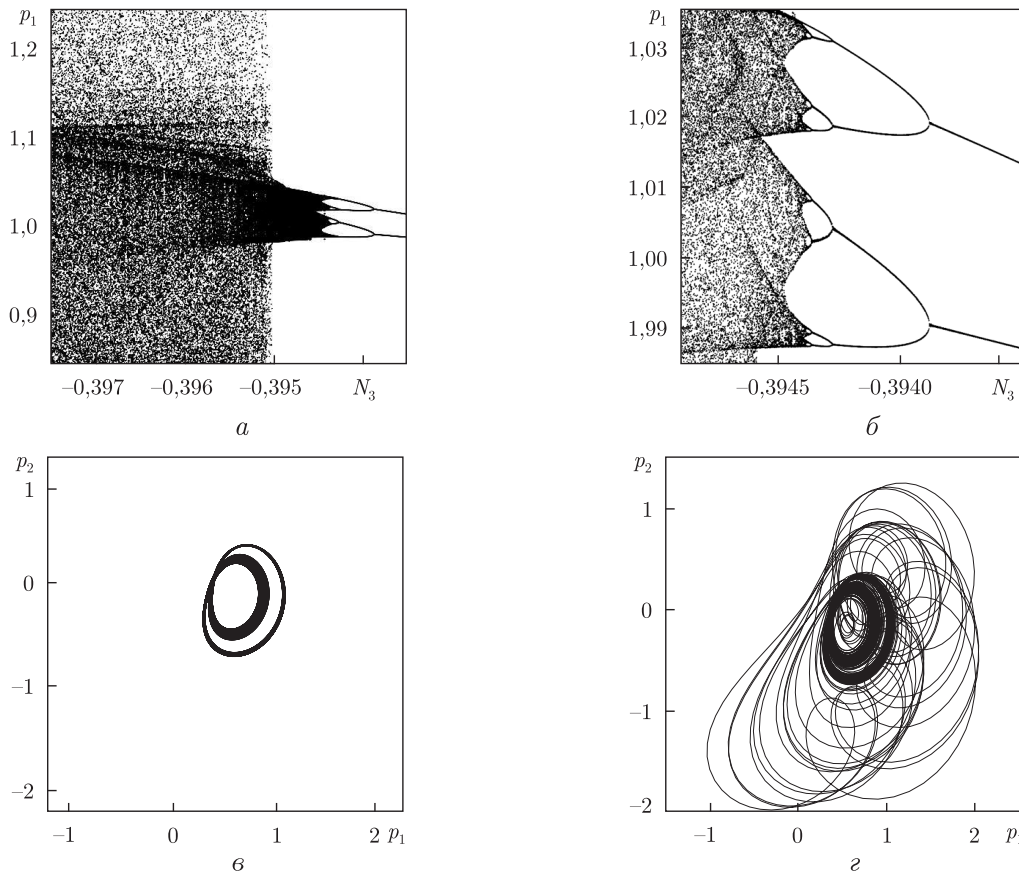


Рис. 1. Фазопараметрична характеристика системи (1) (*a*, *б*); проєкції фазових портретів хаотичних атракторів при  $N_3 = -0,39503$  (*в*) і при  $N_3 = -0,39504$  (*г*)

цес повторюється нескінченне число разів. На відміну від відомого сценарію переміжності за Помо–Маннвіллем [3, 4] у “ламінарній” фазі відбувається рух не в околі зникаючого в точці біфуркації граничного циклу, а в околі зникаючого хаотичного атрактора. За аналогією, прийнятою в статистичній механіці [10], називатимемо цю фазу “груболамінарною”.

На рис. 2, *a*, *б* наведені проєкції розподілу інваріантної міри по фазових портретах хаотичних атракторів при  $N_3 = -0,39503$  (*a*) і при  $N_3 = -0,39504$  (*б*), побудовані за допомогою комп’ютерної техніки кодування відтінками, що описана в [5, 7]. На рис. 2, *б* густозатемнені ділянки відповідають “груболамінарній” фазі переміжності, а більш світлі — турбулентним сплескам. З цього рисунка чітко видно, що тривалість “груболамінарних” фаз значно перевищує тривалість “турбулентних” фаз. Розподіл інваріантної міри по фазовому портрету хаотичного атрактора на рис. 2, *a* є досить рівномірним, що характерно для хаотичних атракторів, що виникли за сценарієм Фейгенбаума. Тут також добре видно якісну подібність рис. 2, *a* й рис. 2, *б*, яка вказує на те, що зникаючий хаотичний атрактор служить “основою” “груболамінарної” фази виникаючого атрактора.

На рис. 2, *в*, *г* наведені перерізи Пуанкаре, площиною  $\beta = -0,5$ , цих атракторів. Обидва перерізи Пуанкаре є точковими хаотичними множинами. Один з них (рис. 2, *г*) як фрагмент містить множину, якісно подібну до іншого перерізу (рис. 2, *в*), що зайвий раз підтверджує

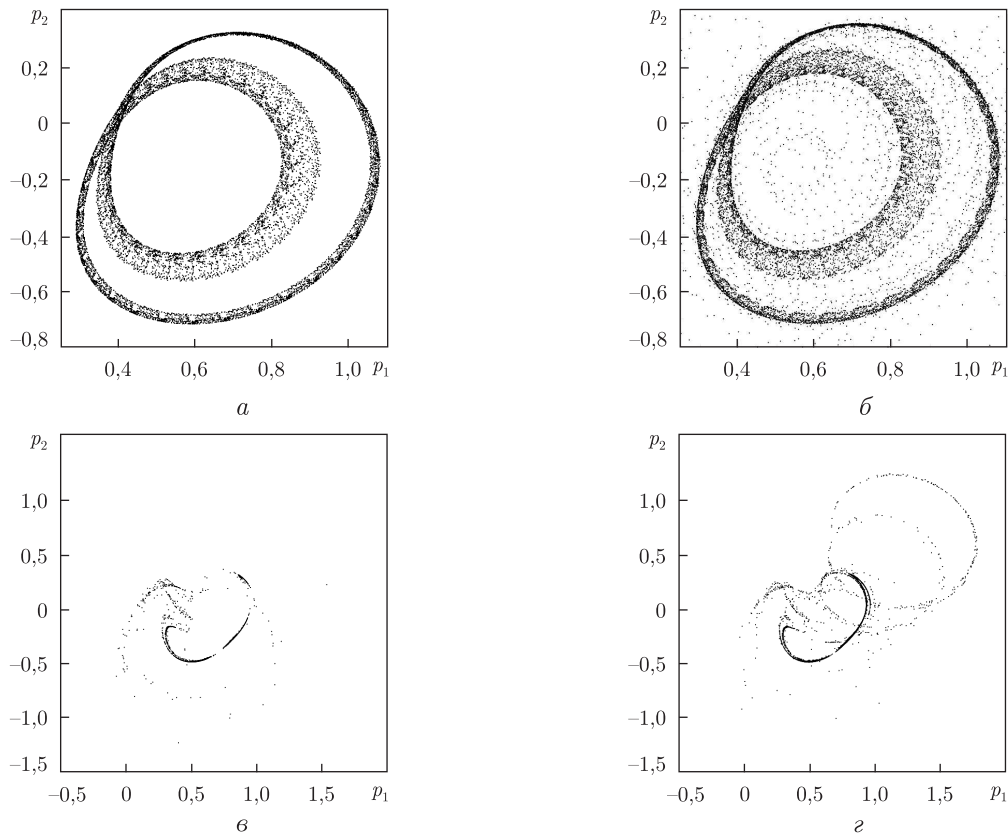


Рис. 2. Проекції розподілу інваріантної міри (*a*, *б*) і перерізів Пуанкаре (*в*, *г*) хаотичних атракторів при  $N_3 = -0,39503$  (*a*, *в*) та при  $N_3 = -0,39504$  (*б*, *г*)

наявність у системі переміжності типу “хаос–хаос”. Таким чином, маємо реалізацію переміжності, відмінної від відомих сценаріїв Помо–Манневілля.

1. *Feigenbaum M. J.* Quantative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Statist. Phys.* – 1978. – **19**, No 1. – P. 25–52.
2. *Feigenbaum M. J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // *Ibid.* – 1979. – **21**, No 6. – P. 669–706.
3. *Pomeau Y., Manneville P.* Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems // *Communs. Math. Phys.* – 1980. – **74**, No 2. – P. 189–197.
4. *Manneville P., Pomeau Y.* Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* – 1980. – **1**, No 2. – P. 219–226.
5. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. – Москва: Физматлит, 2006. – 356 с.
6. *Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu.* Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations // *J. Fluids and Struct.* – 1994. – **8**, No 1. – P. 1–18.
7. *Краснопольская Т. С., Швец А. Ю.* Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. – Москва; Ижевск: R&CD, 2008. – 280 с.
8. *Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu.* Dynamical chaos for a limited power supply oscillations in cylindrical tanks // *J. Sound and Vibr.* – 2009. – **322**. – P. 532–553.
9. *Kononenko V. O.* Vibrating system with a limited power-supply. – London, Pliffe, 1969. – 236 p.
10. *Gibbs J. W.* Elementary Principles in Statistical Mechanics. – NewHaven: Scribner, 1902. – 584 p.

**A. Yu. Shvets**

**Generalization of the scenario of intermittency at a transition to deterministic chaos**

*A new scenario of the transition to a deterministic chaos, which generalizes the known scenario of Pomeau–Manneville, is revealed and described.*