

Р.А. Абдикаримов, к.т.н., Ташкентский финансовый институт, г. Ташкент
С.Ю. Протасов, ЧГТУ, г. Черкассы

КОМПЬЮТЕРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Abstract. By the method of computer simulation the dynamic stability of viscoelastic isotropic plates with variable thickness on the basis of the Kirchhoff-Love hypothesis in the geometrically nonlinear formulation for a weakly-singular Koltunov-Rzhanitsin kernel is investigated. In a wide range of mechanical and geometrical parameters for fast increasing loads the critical load and critical time are determined.

Keywords: plate, variable thickness, viscoelasticity, geometric nonlinearity, dynamic stability, integro-differential equations, Bubnov-Galerkin method.

1. Введение. Вязкоупругие пластины переменной толщины широко используются в качестве подпорных стенок железобетонных зданий, прямоугольных элементов резервуаров, контрфорсных плотин, бетонного покрытия для укрепления взлетной полосы аэропорта, фундаментных плит сооружений и несущих элементов метрополитена, элементов подземных сооружений. Они также широко внедрены в кораблестроение, судостроение, самолетостроение и многие другие отрасли техники и промышленности. В связи с интенсивным развитием промышленности, большое развитие приобрела механика композитных материалов. Интерес к проблемам деформирования и прочности пластин, панелей и оболочек с переменной жесткостью из композиционного материала связаны с тем, что они представляют собой основные несущие элементы конструкций. Использование новых композиционных материалов в инженерной практике, а также проектирование и создание прочных, легких и надежных конструкций требует совершенствования механических моделей деформируемых тел и разработки более совершенных математических моделей их расчета с учетом реальных свойств конструкционных материалов и их геометрии. Поэтому разработка эффективных алгоритмов, которые используются для решения нелинейных задач динамической устойчивости тонкостенных элементов конструкций с переменной жесткостью из композиционных материалов, является актуальной задачей. Результаты теоретических и экспериментальных исследований показали, что большинство композиционных материалов обладают ярко выраженными вязкоупругими свойствами [1].

Целью данной работы является исследование динамической устойчивости вязкоупругой изотропной пластинки переменной толщины с учетом волнового характера распространения основных усилий по объему пластинки.

2. Математическая модель задачи о динамической устойчивости вязкоупругой изотропной пластинки с переменной жесткостью.

Рассмотрим прямоугольную вязкоупругую пластинку переменной толщины со сторонами a и b , изготовленной из однородного изотропного материала. Построим математическую модель задачи о динамической устойчивости вязкоупругой пластины с переменной толщиной под действием нагрузок в поперечном, продольном и сдвиговых направлениях (рис. 1), в геометрически нелинейной постановке по гипотезе Кирхгофа-Лява.

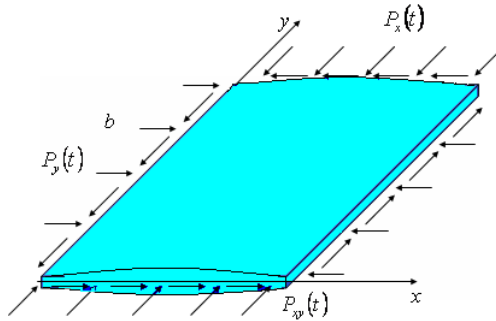


Рис. 1

Физическую зависимость между напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и деформациями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ примем в виде [1,2]:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (1-\Gamma^*) (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), \quad x \leftrightarrow y, \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} (1-\Gamma^*) \gamma_{xy}, \quad (1)$$

где Γ^* – интегральный оператор с ядром релаксации $\Gamma(t)$:

$$\Gamma^* \varphi = \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau,$$

μ – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости. Символ $x \leftrightarrow y$ означает, что последующее выражение получается путем перестановки индексов в предыдущем.

Связь между деформациями в срединной поверхности $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ и перемещениями u, v, w по направлениям x, y, z примем в виде [3]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right], \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right],$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (2)$$

где $w_0 = w_0(x, y)$ – начальный прогиб пластинки.

Изгибающие и крутящие моменты элемента пластинки имеют вид:

$$M_x = -D(1 - \Gamma^*) \left(\frac{\partial^2(w - w_0)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2(w - w_0)}{\partial y^2} \right), \quad x \leftrightarrow y,$$

$$H = -D(1 - \mu)(1 - \Gamma^*) \frac{\partial^2(w - w_0)}{\partial x \partial y}, \quad (3)$$

где D – переменная цилиндрическая жесткость пластинки.

Уравнения движения вязкоупругой изотропной пластинки примем в виде [3]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + P_x - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + P_y - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + P_x(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_y(t) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + P_{xy}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

Здесь N_x, N_y и N_{xy} – усилия, отнесенные к единице длины сечения пластинки:

$$N_x = \sigma_x h \quad x \leftrightarrow y, \quad N_{xy} = \gamma_{xy} h, \quad (5)$$

P_x, P_y и q – интенсивность заданных внешних нагрузок, приложенных к элементу по направлениям x, y и z соответственно.

Подставляя (3) и (5) в (4), с учетом (1) и (2), получим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами вида:

$$(1 - \Gamma^*) \left[h \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial h}{\partial x} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial h}{\partial y} \gamma_{xy} \right] +$$

$$+ \frac{1 - \mu^2}{E} P_x - \rho h \frac{1 - \mu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$(1 - \Gamma^*) \left[h \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} \right) + \frac{\partial h}{\partial y} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \gamma_{xy} \right] +$$

$$+ \frac{1 - \mu^2}{E} P_y - \rho h \frac{1 - \mu^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

$$(1 - \Gamma^*) \left[\left[D \nabla^4 w + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + \nabla^2 D \nabla^2 w - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - (1 - \mu) \left[\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \Bigg\} + \\
& + h \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial w}{\partial y} \tau_{xy} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial w}{\partial x} \tau_{xy} \right) \right] + \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial w}{\partial y} \tau_{xy} \right) + \\
& + \frac{\partial h}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial w}{\partial x} \tau_{xy} \right) + P_x(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_y(t) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + P_{xy}(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0
\end{aligned}$$

Это – система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений движения вязкоупругой пластинки с переменной толщиной относительно перемещений u , v и w , из которого, в частном случае, можно получить уравнения движения вязкоупругих пластин из изотропного материала, толщина которых меняется только в одном направлении.

При расчете динамических задач воспользуемся простейшим и в то же время, достаточно общим слабо-сингулярным ядром Колтунова-Ржаницына с тремя реологическими параметрами A , β и α , вида [2]:

$$\Gamma(t) = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad (0 < \alpha < 1)$$

3. Дискретная модель задачи о динамической устойчивости вязкоупругой изотропной пластинки с переменной жесткостью.

Решения систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, полученных в предыдущем пункте при различных граничных условиях и при наличии слабо-сингулярных ядер наследственности, представляют собой значительные математические трудности. Поэтому естественным способом решения этих систем является дискретизация по пространственным переменным, и получение системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений относительно функций времени. Эти уравнения называются основными разрешающими интегро-дифференциальными уравнениями задач динамики вязкоупругих систем. Наиболее эффективным методом построения дискретной модели нелинейных задач динамики наследственной теории вязкоупругости является вариационный метод Бубнова-Галеркина.

Здесь, получение основных разрешающих интегро-дифференциальных уравнений осуществляется с помощью метода Бубнова-Галеркина.

Предположим, что вязкоупругая пластинка подвергается динамическому сжатию вдоль стороны a силой $P(t) = \nu t$ (ν – скорость нагружения). Решение уравнения (6), удовлетворяющее граничным условиям задачи, будем искать в виде:

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm}(t) \phi_{nm}(x, y), \quad v(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm}(t) \phi_{nm}(x, y), \\
w(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \psi_{nm}(x, y), \quad w_0(x, y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{0nm} \psi_{nm}(x, y), \quad (7)
\end{aligned}$$

где $u_{nm} = u_{nm}(t)$, $v_{nm} = v_{nm}(t)$, $w_{nm} = w_{nm}(t)$ – неизвестные функции времени; $\phi_{nm}(x, y)$, $\varphi_{nm}(x, y)$ и $\psi_{nm}(x, y)$, $n = 1, 2, \dots, N$; $m = 1, 2, \dots, M$ – координатные функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям задачи.

Подставляя (7) в уравнение (6) и применяя метод Бубнова-Галеркина, при этом введя следующие безразмерные величины

$$\frac{u}{h_0}, \frac{v}{h_0}, \frac{w}{h_0}, \frac{w_0}{h_0}, \frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{h}{h_0}, \lambda = \frac{a}{b}, \delta = \frac{b}{h_0},$$

$$t^* = \frac{P}{P_{кр}} = \frac{\nu t}{P_{кр}} = \frac{\omega t}{\sqrt{S}} = \frac{P^*}{P_{кр}^*}, \quad P^* = \frac{P}{E} \left(\frac{b}{h_0} \right)^2, \quad q^* = \frac{q}{E} \left(\frac{b}{h_0} \right)^4,$$

$$S = P_{кр}^*{}^3 \left(\frac{\pi c E h_0^3}{\nu b^4} \right)^2, \quad P_{кр}^* = \frac{P_{кр}}{E(b/h_0)^2} = \frac{\pi^2}{3(1-\mu^2)}, \quad \Gamma(t) \frac{\sqrt{S}}{\omega},$$

и, сохраняя прежние обозначения, для определения неизвестных $u_{nm} = u_{nm}(t)$, $v_{nm} = v_{nm}(t)$, $w_{nm} = w_{nm}(t)$ получим следующую систему основных разрешающих нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{klmn} \ddot{u}_{nm} - \eta_1 (1 - \Gamma^*) \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (d_{1klmn} u_{nm} + \lambda e_{1klmn} v_{nm}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\delta} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M g_{1klmnij} (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) \right\} = 0,$$

$$\frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M b_{klmn} \ddot{v}_{nm} - \eta_2 (1 - \Gamma^*) \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left(\frac{1}{\lambda} d_{2klmn} u_{nm} + e_{2klmn} v_{nm} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\delta} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M g_{2klmnij} (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) \right\} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{klmn} \ddot{w}_{nm} + \eta_3 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P_{klmn}^* w_{nm} t^* + \eta_3 (1 - \Gamma^*) \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M f_{3klmn} (w_{nm} - w_{0nm}) -$$

$$- \eta_3 \left\{ \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} (1 - \Gamma^*) (d_{4klmnij} u_{ij} + e_{4klmnij} v_{ij}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n,i,r=1}^N \sum_{m,j,s=1}^M g_{klmnijrs} w_{nm} (1 - \Gamma^*) (w_{ij} w_{rs} - w_{0ij} w_{0rs}) \right\} = 12 \eta_3 (1 - \mu^2) \lambda^4 q_{kl}$$

где постоянные коэффициенты, входящие в эту систему, связаны с координатными функциями и их производными; $c = \sqrt{E/\rho}$ – скорость звука

в материале пластинки; ρ – плотность материала пластинки;

$P_{кр} = \frac{\pi^2}{3(1-\mu^2)} E \left(\frac{h}{b}\right)^2$ – статическая критическая нагрузка;

$\omega = \sqrt{\pi^2 E h^2 P_{кр}^* / (\rho b^4)}$ – частота основного тона колебаний; $\eta_1 = 3\delta^2 / \pi^4 \lambda^2$;

$\eta_2 = 3\delta^2 / \pi^4$; $\eta_3 = 1/4\pi^4 \lambda^4$ – безразмерные постоянные числа.

На основе разработанного вычислительного алгоритма была составлена программа на языке Delphi.

4. Расчет деформирования вязкоупругой изотропной прямоугольной пластинки с переменной толщиной.

Пусть вязкоупругая пластинка шарнирно оперта по все краям. В этом случае в разложении (7) метода Бубнова-Галеркина аппроксимирующие функции прогиба и перемещений выбираются в виде

$$\begin{aligned} \phi_{nm}(x, y) &= \cos n\pi x \sin m\pi y, \quad \varphi_{nm}(x, y) = \sin n\pi x \cos m\pi y \\ \psi_{nm}(x, y) &= \sin n\pi x \sin m\pi y. \end{aligned}$$

Интегрирование системы (8) проводилось с помощью численного метода, основанного на использовании квадратурных формул [4,5]. Результаты вычислений при различных физических и геометрических параметрах отражаются графиками, приведенными на рис. 2, 3. Зависимость изменения толщины имеет следующий вид: $h = 1 - \alpha^* x$, $h_0 = h(0) = const$, где

α^* – параметр изменения толщины. Здесь, если не оговорены другие данные, в качестве исходных данных, при вычислениях были приняты следующие:

$$A=0.05; \alpha=0.25; \beta=0.05; \mu=0.3; \delta=25; w_0=0.0001; q=0; \lambda=1; \alpha^*=0.5.$$

Аналогично [3], в качестве критерия, определяющего критическое время, а вместе с тем и критическую нагрузку, принимаем условие, что стрела прогиба не должна превышать величину, равную толщине пластинки h_0 . В качестве параметра определяющего устойчивость пластинки принят K_d – коэффициент динамичности, равный отношению динамической критической нагрузки к эйлеровой статической.

На рис.2 приведен график для коэффициента вязкости $A = 0; 0.05; 0.1$.

Считаем, что поперечная нагрузка отсутствует, т.е. $q = 0$. По оси абсцисс отложен безразмерный параметр t^* , равный отношению переменной величины сжимающей силы к статической нагрузке, а по оси ординат – безразмерная стрела прогиба w_{nm} . При этих значениях параметра A коэффициент динамичности K_d соответственно равен 5.07, 4.83, 4.64. Полученный результат показывает, что учет вязкоупругих свойств материала пластинки приводит к уменьшению критической нагрузки.

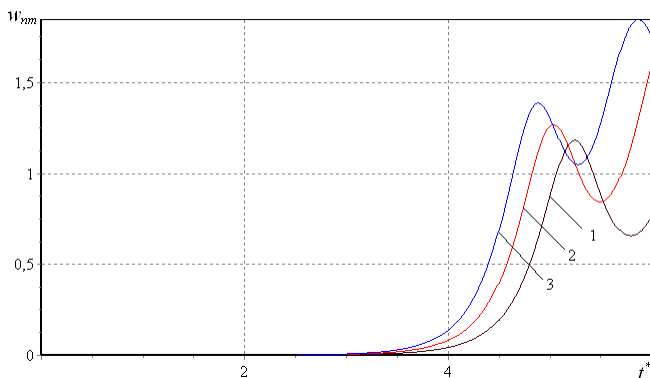


Рис.2. Зависимость прогиба от времени при $A=0$ (1); 0.05 (2); 0.1 (3)

Далее исследовано влияние параметра изменения толщины пластинки α^* на динамическую устойчивость. На рис. 3 приведены графики для $\alpha^*=0; 0.4; 0.8$. При этих значениях α^* коэффициент динамичности K_D составляет соответственно 4.73, 4.83, 5.23. Напомним, что увеличение параметра α^* влечет за собой уменьшение толщины пластинки. Вычисления производились при равных объемах пластин постоянной и переменной толщины. Из графиков видно, что с уменьшением толщины значение коэффициента K_D увеличивается.

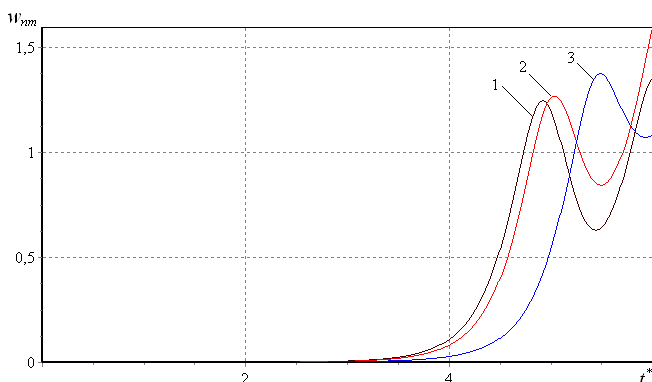


Рис.3. Зависимость прогиба от времени при $\alpha^*=0$ (1); 0.5 (2); 0.8 (3)

В заключение отметим, что аналогичные исследования были проведены и для пластинки, когда толщина изменяется по параболическому и гиперболическому законам.

1. *Ильющин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости.– М.: Наука, 1970.– 280 с.
2. *Колтунов М.А.* Ползучесть и релаксация.– М.: Высшая школа, 1976.– 276 с.
3. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.–432 с.
4. *Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсунов М.* О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикладная математика и механика.– 1987. –Т.51.– № 5. –С.867–871.
5. *Эшматов Х.* Интегральный метод математического моделирования задач динамики вязкоупругих систем. Автореферат дисс. д-ра. тех. наук, Киев, 1991.

Поступила 17.02.2011г.

УДК 72.25. 72.25.

A. Korostil, Ju.Korostil

QUANTUM DYNAMICS OF A TWO-LEVEL SYSTEM UNDER EXTERNAL FIELD

We present exact analytic solutions for non-linear quantum dynamics of a two-level system (TLS) subject to a periodic-in-time external field. In constructing the exactly solvable models, we use a approach where the form of external perturbation is chosen to preserve an integrability constraint, which yields a single non-linear differential equation for the ac-field. A solution to this equation is expressed in terms of Jacobi elliptic functions with three independent parameters that allows one to choose the frequency, average value, and amplitude of the time-dependent field at will. This form of the ac-drive is especially relevant to the problem of dynamics of TLS charge defects that cause dielectric losses in superconducting qubits.

1. Introduction

The problem of a periodically-driven two-level system (TLS) appears in many physical contexts including magnetism, superconductivity, structural glasses and quantum information theory [1-7]. The interest in this old problem has been revived recently due to advances in the field of quantum computing (see, e.g., [8-12] and references therein). First of all, a qubit itself is a two-level system and the question of its evolution under an external time-dependent perturbation is obviously of interest. Also, the physical mechanism that currently limits coherence particularly in superconducting qubits is believed to be due to other types of unwanted TLSs within the qubit, whose charge dynamics under a periodic-in-time electric field gives rise to dielectric losses directly probed in experiment. [13,14]. In what follows, we mostly apply our solution to the latter charge TLS model, but the general methods and some particular results of this work evidently can be