УДК 681.513.675

А.Ф. Верлань, д-р техн. наук, ИПМЕ НАНУ, г. Киев
С.А. Положаенко, д-р техн. наук, ОНПУ, г. Одесса

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ АНОМАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

В ряде важных отраслей промышленности, таких как строительство, добыча полезных ископаемых, геологоразведка приходится сталкиваться с моделированием фильтрационных движений жидкостей. Причем сложность используемой при этом математической модели (ММ) фильтрационного движения определяется, в частности, числом фильтрующихся жидкостей (фаз), их фракционным составом, геологической структурой грунта. Адекватной ММ взаимофильтрации вязкой (идеальной) и вязко-пластической (аномальной) жидкостей можно считать предложенную, например, в работах [1, 2] модель в виде вариационного неравенства с соответствующими граничными и начальными условиями. Необходимо заметить, что в качестве параметров этой ММ выступают пористость $m(\bar{z})$ и проводимости $k_i(\bar{z}), i=1,2$ среды (породы пласта). Здесь, и далее, индексы $i=1,2$ обозначают фильтрующиеся жидкости. Зачастую данные параметры не определены, и их нахождение представляет собой самостоятельную сложную задачу исследования пластовой системы — задачу параметрической идентификации.

Целью предлагаемой работы является получение конструктивной вычислительной процедуры определения (идентификации) функций пористости и проводимости породы пласта.

Согласно [1], ММ (в приращениях) взаимофильтрации идеальной и аномальной жидкостей, можно представить в виде

$$-\frac{m\partial(\Delta S_2)}{\partial t}-\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left[k_1\,\frac{\partial^2(\Delta P)}{\partial z_i^2}\left|\Delta v\right|\right]dz+\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left[k_1\,\frac{\partial^2(\Delta P)}{\partial z_i^2}\left|\Delta S_2\right|\right]dz\geq$$

$$\geq\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_1}\zeta_j(z)Q_{1_j}, \quad \forall v, S_2\in K, \tag{1}$$

$$-\frac{m\partial(\Delta S_2)}{\partial t}-\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(k_2\,\frac{\partial^2(\Delta P)}{\partial z_i^2}\right)dz=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_2}\zeta_j(z)Q_{2_j}, \tag{2}$$

$$\Delta P(0,z)=\Delta P_0(z); \quad \Delta S_2(0,z)=\Delta S_{2_0}(z), \tag{3}$$

$$\frac{\partial[\Delta S_2(t,z)]}{\partial\eta}\geq 0; S_2(t,z)<S_{2_{\max}}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial[\Delta S_2(t,z)]}{\partial\eta} = 0; S_2(t,z) \ge S_{2_{\max}}, \qquad (5)$$

где $P = P(t,z)$ — функция внутрипластового давления;

$S_2 = S_2(t,z)$ — функция насыщенности пласта вытесняющей жидкостью;

$v = v(t,z)$ — пробная функция;

h — мощность пласта;

K — множество, на котором определены функции $S_2 = S_2(t,z)$ и $v = v(t,z)$;

K_1, K_2 — соответственно число добывающих и нагнетальных скважин, которыми вскрыт пласт;

Q_1, Q_2 — дебиты соответствующих скважин;

$\zeta(z)$ — функция Дирака;

η — направление к нормали.

В качестве критерия качества решения задачи идентификации примем функционал вида

$$J_1[m(\cdot),k_1(\cdot)] = \sum_{j=1}^{K_1+K_2} \left\{ \int_{T_j} \left[P'(t,z_j,m,k_1) - F_j^P(t)\right]^2 dt + \right.$$

$$\left. + \int_{T_j} \left[S_2'(t,z_j,m,k_1) - F_j^S(t)\right]^2 dt \right\}, \qquad (6)$$

где $P'(\cdot)$ и $S_2'(\cdot)$ — соответственно точные значения функций внутрипластового давления и насыщенности вытесняющей жидкости;

F^P и F^S — соответственно измеряемые значения указанных функций;

T — время измерений.

Покажем, что принятый критерий качества будет дифференцируемым в любой точке пространственной области $\bar{z} \in \Omega$ (включая и ее границу Γ), т.е. приращение (6) равное

$$\Delta J_1 = J_1\left[\left(m + h^m\right),\left(k_1 + h^k\right)\right] - J_1(m,k_1)$$

представимо в виде

$$\Delta J_1 = \int_\Omega \left\{\left[J'(m,k_1)h^m\right]dz + \left[J'(m,k_1)h^k\right]dz\right\} + \left[O\left(\left\|h^m\right\|_{L^2}\right) + O\left(\left\|h^k\right\|_{L^2}\right)\right], \qquad (7)$$

где $J'(m,k_1)$ — некоторая функция из $L^2(\Omega)$;

$O\left(\left\|h^m\right\|_{L^2}\right)$ и $O\left(\left\|h^k\right\|_{L^2}\right)$ — остаточные члены такие, что

$$\lim_{\alpha^m \to +0} O(\alpha^m)(\alpha^m)^{-1} = 0, \qquad \lim_{\alpha^k \to +0} O(\alpha^k)(\alpha^k)^{-1} = 0.$$

Запишем формальным образом приращение функционала ΔJ_1

$$\Delta J_1 = \sum_{j=1}^{K_1+K_2} \left\{ \int_\Omega \left\{ \left[P(t,z_j,m,k_1) + \Delta P(t,z_j) - F_j^P(t)\right]^2 - \right.\right.$$

$$\left. - \left[P(t,z_j,m,k_1) - F_j^P(t)\right]^2 \right\} dz + \left\{ \left[S_2(t,z_j,m,k_1) + \Delta S_2(t,z_j) - F_j^S(t)\right]^2 - \right.$$

$$\left.\left. + \left\{ \left[S_2(t,z_j,m,k_1) + \Delta S_2(t,z_j) - F_j^S(t)\right]^2 - \left[S_2(t,z_j,m,k_1) - F_j^S(t)\right]^2 \right\} dz \right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{K_1+K_2} \left\{ \int_\Omega \left\{ \left\{ \left[P(t,z_j,m,k_1) - F_j^P(t)\right] + \Delta P(t,z_j) \right\}^2 - \right.\right.$$

$$\left. - \left[P(t,z_j,m,k_1) - F_j^P(t)\right] \right\} dz + \left\{ \left\{ \left[S_2(t,z_j,m,k_1) - F_j^S(t)\right] + \Delta S_2(t,z_j) \right\}^2 - \right.$$

$$\left.\left. - \left[S(t,z_j,m,k_1) - F_j^S(t)\right] \right\} dz \right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{K_1+K_2} \left\{ \left\{ \int_\Omega 2\left[P(t,z_j,m,k_1) - F_j^P(t)\right] \Delta P(t,z) dz + \int_\Omega \Delta P^2(t,z_j) dz \right\} + \right.$$

$$\left. + \left\{ \int_\Omega 2\left[S_2(t,z_j,m,k_1) - F_j^S(t)\right] \Delta S_2(t,z) dz + \int_\Omega \Delta S_2^2(t,z_j) dz \right\} \right\}. \qquad (8)$$

Преобразуем это выражение к виду (7). С этой целью введем в рассмотрение функции $p_P^*(t,z) \equiv p_P^*(t,z,m,k_1)$ и $p_S^*(t,z) \equiv p_S^*(t,z,m,k_1)$ как решение следующей краевой задачи

$$-\frac{m\partial p_S^*}{\partial t}(v - S_2) - \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left[k_1 \frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_i^2} |v| \right] dz + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left[k_1 \frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_i^2} |S_2| \right] dz \geq$$

$$\geq \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{K_1} \zeta_j(z) Q_{1_j}, \quad \forall v, S_2 \in K, \qquad (9)$$

$$-\frac{m\partial p_S^*}{\partial t} - \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(k_2 \frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_i^2} \right) dz = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{K_2} \zeta_j(z) Q_{2_j}, \qquad (10)$$

$$\left.\frac{\partial p_S^*}{\partial \eta}\right|_{z=0} \geq 0; 0 \leq t \leq t_k, \qquad (11)$$

$$p_P^*\Big|_{t=t_k} = 2\left[P\left(t_k, z_j, m, k_1\right) - F^P(t)\right], p_S^*\Big|_{t=t_k} =$$

$$= 2\left[S_2\left(t_k, z_j, m, k_1\right) - F^S(t)\right], \quad \forall z \in \Omega . \qquad (12)$$

Первый интеграл в первом слагаемом в правой части равенства (8) с учетом (1) — (5), (9) — (12) преобразуется так

$$I_P = \int_\Omega 2\left[P\left(t, z_j, m, k_1\right) - F_j^P(t)\right]\Delta P\left(t, z_j\right)dz = \int_\Omega p_P^*\left(t_k, z_j\right)\Delta P\left(t, z_j\right)dz =$$

$$= \int_\Omega \left[\int_0^{t_k} \frac{\partial}{\partial t}\left(p_P^* \Delta P\right)dt\right]dz = \int_\Omega \int_0^{t_k} \left[\frac{\partial p_P^*}{\partial t}\Delta P + p_P^* \frac{\partial(\Delta P)}{\partial t}\right]dtdz =$$

$$= \int_\Omega \int_0^{t_k} \left\{\frac{1}{m(z)}\left\{\sum_{i=1}^n \left[k_1(z_i)\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_j^2}|v|\right] + \sum_{i=1}^n \left[k_1(z_i)\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_j^2}|S_2|\right]\right\}\Delta P + \right.$$

$$\left. + p_P^* \left\{\sum_{i=1}^n \left[k_1(z_i)\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_j^2}|\Delta v|\right] + \sum_{i=1}^n \left[k_1(z_i)\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_j^2}|\Delta S_2|\right]\right\}\right\}dtdz .$$

Интегрируя последнее выражение в пространственной области, получим следующий результат

$$I_P{}' = \int_0^{t_k} \left\{\frac{1}{m(z)}\left\{\sum_{i=1}^n \left[k_1(z_i)\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_j^2}|v|\right] + \sum_{i=1}^n \left[k_1(z_i)\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_j^2}|S_2|\right]\right\}\Delta P + \right.$$

$$\left.\left. + p_P^* \left\{\sum_{i=1}^n \left[k_1(z_i)\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_j^2}|v|\right] + \sum_{i=1}^n \left[k_1(z_i)\frac{\partial^2 p_P^*}{\partial z_j^2}|S_2|\right]\right\}\right\}\right|_\Omega dt =$$

$$= \int_0^{t_k} \frac{1}{m(z)}\left[\left(\sum_{i=1}^n k_1(z_i)p_P^*|v|\right) + \left(\sum_{i=1}^n k_1(z_i)p_P^*|S_2|\right)\right]\Delta P dt . \qquad (13)$$

Аналогично, для выражений в (8), записанных относительно функции $S_2(t, z)$ (т.е. первый интеграл во втором слагаемом в правой части равенства (8)), можно записать

$$I_S = \int_\Omega 2\left[S_2\left(t, z_j, m, k_1\right) - F_j^S(t)\right]\Delta S_2\left(t, z_j\right)dz = \int_\Omega p_P^*\left(t_k, z_j\right)\Delta S_2\left(t, z_j\right)dz$$

или, опуская очевидные преобразования, при интегрировании в пространственной области, окончательно получим

$$I_S{}' = \int_0^{t_k} \frac{1}{m(z)}\left[\left(\sum_{i=1}^n k_1(z_i)p_P^*|v|\right) + \left(\sum_{i=1}^n k_1(z_i)p_P^*|S_2|\right)\right]\Delta S_2 dt . \qquad (14)$$

Вторые интегралы в слагаемых в правой части (8) определяют члены вида $\left[O\left(\|h\|_{L^2}^{P}\right)+O\left(\|h\|_{L^2}^{S}\right)\right]$, представленные в (7) и записанные для пространственной постановки задачи. В этом случае будем иметь

$$\Delta J_1=\int_{\Omega}\frac{1}{m(z)}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}k_1(z_i)p_P^*|v|\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}k_1(z_i)p_P^*|S_2|\right)\right]hdz+O\left(\|h\|_{L^2}\right). \qquad (15)$$

В результате получим, что приращение функционала (6) представляется в виде выражения

$$\Delta J_1=\int_{0}^{t_k}\frac{1}{m(z)}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}k_1(z_i)p_P^*|v|\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}k_1(z_i)p_P^*|S_2|\right)\right]hdz+O\left(\|h\|_{L^2}\right).$$

Таким образом, искомое представление (7) для функционала (6) получено, причем градиент этого функционала имеет вид

$$J_1'\left[m(z),k_1(z)\right]\equiv\frac{1}{m(z)}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)p_P^*|v|\right]+\sum_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)p_P^*|S_2|\right]\right\},$$
$$\forall z\in\Omega,\forall t\in\left[0,t_k\right]. \qquad (16)$$

Далее, имея градиент (16) и используя процедуру метода проекции градиента [3], определяемую соотношениями

$$U=\left\{u(t):u(t)\in L^2\left[0,t_k\right],a\le u(t)\le b,\forall t\in\left[0,t_k\right]\right\}$$

$$\Pr_u\left[u(t)\right]=\begin{cases}u(t),a\le u(t)\le b,\\ a,u(t)<a,\\ b,u(t)>b,\end{cases}$$

для идентифицируемых функций $m(z)$ и $k_1(z)$ получим окончательные расчетные выражения

$$m_{q+1}(z)=\begin{cases}m_q(z)-\dfrac{\alpha_m}{m(z)}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)p_P^*|v|\right]+\sum_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)p_P^*|S_2|\right]\right\},\\ m_{\min}\le m_q(z)-\dfrac{\alpha_m}{m(z)}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)p_P^*|v|\right]+\sum_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)p_P^*|S_2|\right]\right\}\le m_{\max},\\ m_{\min},\\ m_q(z)-\dfrac{\alpha_m}{m(z)}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)p_P^*|v|\right]+\sum_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)p_P^*|S_2|\right]\right\}<m_{\min},\\ m_{\max},\\ m_q(z)-\dfrac{\alpha_m}{m(z)}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)p_P^*|v|\right]+\sum_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)p_P^*|S_2|\right]\right\}>m_{\max}.\end{cases}$$

$$
k_{1_{q+1}}(z)=\begin{cases} k_{1_q}(z)-\dfrac{\alpha_k}{m(z)}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)p_P^*|v|\right]+\sum\limits_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)p_P^*|S_2|\right]\right\}, \\ k_{1_{\min}} \le k_{1_q}(z)-\dfrac{\alpha_k}{m(z)}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)p_P^*|v|\right]+\sum\limits_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)p_P^*|S_2|\right]\right\} \le k_{1_{\max}}, \\ m_{\min}, \\ k_{1_q}(z)-\dfrac{\alpha_k}{m(z)}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)p_P^*|v|\right]+\sum\limits_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)p_P^*|S_2|\right]\right\} < k_{1_{\min}}, \\ m_{\max}, \\ k_{1_q}(z)-\dfrac{\alpha_k}{m(z)}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)p_P^*|v|\right]+\sum\limits_{i=1}^{n}\left[k_1(z_i)p_P^*|S_2|\right]\right\} > k_{1_{\max}} \end{cases}
$$

Проведенные численные исследования показали, что для идентификации параметров пласта, определяемого сеткой дискретизации по пространству $z_1 = 12, z_2 = 16$ необходимо не более 8 итераций при общем времени решения задачи не более 120 с.

1. *Положаенко С.А.* Математические модели процессов течения аномальных жидкостей // Моделювання та інформаційні технології: Зб. наук. пр. — К.: ІПМЕ, 2001. — Вип. 9. — С. 14 — 21.
2. *Положаенко С.А.* Математическая модель фильтрации грунтовых вод для класса гидротехнических земляных сооружений // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. — Одеса: ОДАБА, 2005.— С. 206 — 211.
3. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.— 400с.

Поступила 27.10.2010р.

УДК 621.6.677.49–472.2

В.В. Орлов, к.т.н., ИПМЭ НАН Украины, г. Киев

ЭФФЕКТИВНОСТЬ АДАПТИВНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛА НА ОСНОВЕ ТЕСТА ХОТЕЛЛИНГА

Аннотация. Исследуются вероятностные характеристики обнаружения сигнала неизвестной формы в условиях помех с неизвестными параметрами. Анализ эффективности обнаружения сигнала проводится с учетом объема обучающей выборки, применяемой для оценивания ковариационной матрицы помех.