

УДК 531; 534

©2010. Н.В. Перепелкин, Ю.В. Михлин

АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ОДНОДИСКОВОГО РОТОРА НА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ОПОРАХ

Дано описание нового подхода к анализу вынужденных колебаний механических систем, основанного на методе нелинейных нормальных форм колебаний Шоу-Пьера. Представлен вариант метода, пригодный для анализа колебаний систем с внутренним резонансом. В качестве конкретной модели для анализа взята модель однодискового неуравновешенного ротора на нелинейно-упругих опорах. Приведено сравнение аналитических результатов и результатов численного моделирования.

Ключевые слова: вынужденные колебания ротора, нелинейные нормальные формы колебаний.

Введение. Одним из важнейших классов устройств, находящих широкое применение в технике, являются роторные устройства. Несмотря на то, что опубликовано много работ, посвященных динамике роторных систем, следует отметить, что большая их часть описывает явления, получаемые с использованием линейных математических моделей. Однако нелинейные модели роторных систем описывают реальные динамические процессы с большей достоверностью.

Рассматривая возможные постановки задачи для исследования динамики роторов в нелинейной форме, можно выделить такие основные источники нелинейности: нелинейно-упругий вал, нелинейно-упругие опоры ротора. В данной статье излагается подход к анализу динамики неуравновешенного однодискового ротора с изотропно-упругим валом на податливых изотропных нелинейно-упругих опорах. Для некоторых типов опор, в частности, для подшипников качения, упругая восстанавливающая сила, возникающая в опоре, может быть представлена в виде аппроксимации, содержащей линейные и кубические члены. Обоснование такого подхода дано в [1]. Модели, в которых вводилась нелинейность, заданная подобным образом, можно найти в [2], где использовались асимптотические методы для анализа упруго-опертого ротора. А.П. Филиппов [3] анализировал нестационарные колебания однодискового ротора на упругих опорах. Уравнения движения были получены в предположении, что одна из опор является нелинейной. В.В. Болотин [4] принимал во внимание нелинейную инерцию в модели однодискового ротора. Различные модели колебаний ротора и соответствующие задачи устойчивости движения рассматриваются в [5]. В [6] исследованы нестационарные движения ротора. Нестационарные колебания ротора при взаимодействии с ограниченным источником энергии рассматривались в [7]. Дестабилизирующее влияние вязкого трения на динамику ротора, который имеет различные упругие характеристики в двух ортогональных направлениях, анализировались в [8]. В

[9] исследовались субгармонические колебания в модифицированной модели так называемого “Jeffcott”-ротора с двумя степенями свободы. Принимался во внимание зазор в опорах. Периодические и хаотические колебания в модели “Jeffcott”-ротора были рассмотрены в [10, 11] с использованием асимптотических методов, а в [12] – динамика подобного ротора с учетом зазора между статором и ротором. Нелинейные формы колебаний ротора были рассмотрены в [13] без учета внутреннего резонанса, который имеется в динамике ротора на упругих опорах. Выделим также недавнюю публикацию [14], где анализировалась роторная система, подобная рассматриваемой в данной статье.

Отметим, что во многих работах, посвященных данной теме, рассматриваются недостаточно общие модели. Например, не учитывается асимметрия расположения диска ротора на валу, либо нелинейность вводится только в одной из опор и т.д. Упрощение постановки задачи объясняется, в первую очередь, относительно большим числом степеней свободы исследуемой модели. Так, при рассмотрении динамики однодискового ротора с абсолютно жесткими опорами приходится искать решение системы четырех дифференциальных уравнений, а если к этому добавить податливые опоры, то появятся еще четыре уравнения – дифференциальные в случае массивных опор или алгебраические в случае пренебрежения массой опор.

Представленный в данной статье подход, использующий аппарат теории нелинейных нормальных форм колебаний, позволяет рассматривать ряд важных резонансных режимов движения таких систем без необходимости существенно упрощать модель. Для анализа вынужденных колебаний роторной системы применяется процедура, объединяющая в себе построение нелинейных нормальных форм колебаний в форме Шоу–Пьера, модифицированный метод Раушера и ряд других процедур. Однако, в отличие от результатов, полученных ранее с использованием нормальных форм колебаний, предлагаемый подход учитывает факт внутреннего резонанса, неизбежно имеющего место для ротора с изотропно-упругими опорами и валом.

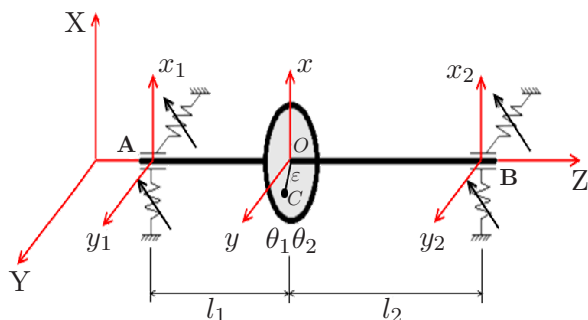


Рис. 1. Расчетная схема однодискового ротора с нелинейными опорами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим однодисковый неуравновешенный ротор с изотропно-упругим валом и опорами в неподвижной системе координат XYZ (рис. 1). Пусть опоры являются нелинейно-упругими, а

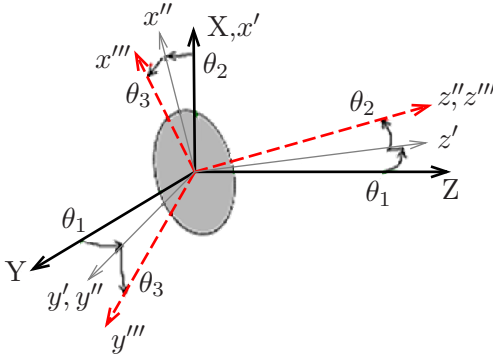


Рис. 2. Подвижная система координат диска.

восстанавливающая сила в них описывается следующим выражением:

$$P = k_1 x + k_2 x^3. \quad (1)$$

Для записи кинетической энергии вращающегося диска вводится подвижная система координат (рис. 2) и позиционные углы $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, определяющие относительное положение подвижной и неподвижной систем координат. В таком случае

$$T = \frac{I_e}{2} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_2) + \frac{I_p}{2} (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2)^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \varepsilon^2 \dot{\theta}_3^2 \sin^2 \theta_3 - 2\varepsilon \dot{x} \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 + \dot{y}^2 + \varepsilon^2 \dot{\theta}_3^2 \cos^2 \theta_3 + 2\varepsilon \dot{y} \dot{\theta}_3 \cos \theta_3), \quad (2)$$

а потенциальная энергия –

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} k_{11} \left((x - h_1 x_2 - h_2 x_1)^2 + (y - h_2 y_1 - h_1 y_2)^2 \right) + \frac{1}{2} k_{22} (\tilde{\theta}_1^2 + \tilde{\theta}_2^2) + \\ & + k_{12} \left((x - h_1 x_2 - h_2 x_1) \tilde{\theta}_2 - (y - h_2 y_1 - h_1 y_2) \tilde{\theta}_1 \right) + \\ & + \frac{c_x^{(1)}}{2} x_1^2 + \frac{c_x^{(2)}}{4} x_1^4 + \frac{c_y^{(1)}}{2} y_1^2 + \frac{c_y^{(2)}}{4} y_1^4 + \frac{k_x^{(1)}}{2} x_2^2 + \frac{k_x^{(2)}}{4} x_2^4 + \frac{k_y^{(1)}}{2} y_2^2 + \frac{k_y^{(2)}}{4} y_2^4, \end{aligned} \quad (3)$$

где $h_1 = l_1/l, h_2 = l/l_2, \tilde{\theta}_1 = \theta_1 + (y_2 - y_1)/l, \tilde{\theta}_2 = \theta_2 - (x_2 - x_1)/l; c_x^{(1)}, c_y^{(1)}$ и $k_x^{(1)}, k_y^{(1)}$ – коэффициенты, характеризующие линейную часть восстанавливающих сил в опорах (для левой и правой опор соответственно); $c_x^{(2)}, c_y^{(2)}$ и $k_x^{(2)}, k_y^{(2)}$ – аналогичные коэффициенты, определяющие нелинейные компоненты восстанавливающих сил. Тогда уравнения движения системы таковы:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \rho_1 \dot{x} + k_{11} (x - h_1 x_2 - h_2 x_1) + k_{12} \tilde{\theta}_2 &= \varepsilon \Omega^2 m \cos \Omega t, \\ m\ddot{y} + \rho_1 \dot{y} + k_{11} (y - h_2 y_1 - h_1 y_2) - k_{12} \tilde{\theta}_1 &= \varepsilon \Omega^2 m \sin \Omega t, \\ I_e \ddot{\theta}_1 + \rho_2 \dot{\theta}_1 + I_p \Omega \dot{\theta}_2 + k_{22} \tilde{\theta}_1 - k_{12} (y - h_2 y_1 - h_1 y_2) &= 0, \\ I_e \ddot{\theta}_2 + \rho_2 \dot{\theta}_2 - I_p \Omega \dot{\theta}_1 + k_{22} \tilde{\theta}_2 + k_{12} (x - h_1 x_2 - h_2 x_1) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 \beta \dot{x}_1 + \left[\frac{k_{12}}{l} - h_2 k_{11} \right] (x - h_1 x_2 - h_2 x_1) + \left[\frac{k_{22}}{l} - h_2 k_{12} \right] \tilde{\theta}_2 + c_x^{(1)} x_1 + c_x^{(2)} x_1^3 &= 0, \\
 \beta \dot{y}_1 + \left[\frac{k_{12}}{l} - h_2 k_{11} \right] (y - h_2 y_1 - h_1 y_2) + \left[h_2 k_{12} - \frac{k_{22}}{l} \right] \tilde{\theta}_1 + c_y^{(1)} y_1 + c_y^{(2)} y_1^3 &= 0, \\
 \beta \dot{x}_2 - \left[\frac{k_{12}}{l} + k_{11} h_1 \right] (x - h_1 x_2 - h_2 x_1) - \left[\frac{k_{22}}{l} + h_1 k_{12} \right] \tilde{\theta}_2 + k_x^{(1)} x_2 + k_x^{(2)} x_2^3 &= 0, \\
 \beta \dot{y}_2 - \left[\frac{k_{12}}{l} + h_2 k_{11} \right] (y - h_2 y_1 - h_1 y_2) + \left[\frac{k_{22}}{l} + h_1 k_{12} \right] \tilde{\theta}_1 + k_y^{(1)} y_2 + k_y^{(2)} y_2^3 &= 0.
 \end{aligned}$$

Если пренебречь демпфированием в опорах, то последние четыре уравнения системы (4) станут алгебраическими, вследствие чего перемещения в опорах x_1, y_1, x_2, y_2 могут быть исключены [2, 14].

В то же время существует подход, не требующий полного исключения вспомогательных переменных. Он базируется на концепции нелинейных нормальных форм колебаний и предполагает сведение исходной системы с большим числом степеней свободы к эквивалентной в некотором смысле системе со значительно меньшим числом степеней свободы. Воспользуемся этим подходом.

2. Методика решения. *Приведение системы уравнений к главным координатам.* Необходимым условием для использования теории нелинейных нормальных форм колебаний является приведение системы (4) к главным координатам соответствующей линеаризованной системы, когда матрицы масс и жесткости становятся диагональными.

Разделив на коэффициенты при старших производных, представим систему уравнений (4) в общем виде:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 + | c_{11} x_1 + \dots + c_{1k} x_k + | c_{1,k+1} x_{k+1} + c_{1,k+2} x_{k+2} + \dots + | \tilde{f}_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \dots, t) &= 0, \\
 \ddot{x}_2 + | c_{21} x_1 + \dots + c_{2k} x_k + | c_{2,k+1} x_{k+1} + c_{2,k+2} x_{k+2} + \dots + | \tilde{f}_2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \dots, t) &= 0, \\
 \dots | \dots | \dots | \dots & (5) \\
 \ddot{x}_k + | c_{k1} x_1 + \dots + c_{kk} x_k + | c_{k,k+1} x_{k+1} + c_{k,k+2} x_{k+2} + \dots + | \tilde{f}_k(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \dots, t) &= 0, \\
 | c_{k+1,1} x_1 + \dots + c_{k+1,k} x_k + | c_{k+1,k+1} x_{k+1} + c_{k+1,k+2} x_{k+2} + \dots + | \tilde{f}_{k+1}(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \dots, t) &= 0, \\
 | \dots | \dots | \dots & \\
 | c_{N,1} x_1 + \dots + c_{N,k} x_k + | c_{N,k+1} x_{k+1} + c_{N,k+2} x_{k+2} + \dots + | \tilde{f}_N(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \dots, t) &= 0.
 \end{aligned}$$

В матричной форме уравнения (5) перепишем таким образом:

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}}_m + [c_{mm}] \bar{x}_m + [c_{ms}] \bar{x}_s + \bar{F}_m(\bar{x}_m, \bar{x}_s, \dot{\bar{x}}_m, \dot{\bar{x}}_s, t) = 0, \\ [c_{sm}] \bar{x}_m + [c_{ss}] \bar{x}_s + \bar{F}_s(\bar{x}_m, \bar{x}_s, \dot{\bar{x}}_m, \dot{\bar{x}}_s, t) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $\bar{x}_m = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}^T$, $\bar{x}_s = \{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_N\}^T$,

$$\begin{aligned}
 [c_{mm}] &= \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & \dots & c_{kk} \end{bmatrix}; & [c_{ms}] &= \begin{bmatrix} c_{1,k+1} & \dots & c_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{k,k+1} & \dots & c_{kN} \end{bmatrix}; \\
 [c_{sm}] &= \begin{bmatrix} c_{k+1,1} & \dots & c_{k+1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{N1} & \dots & c_{Nk} \end{bmatrix}; & [c_{ss}] &= \begin{bmatrix} c_{k+1,k+1} & \dots & c_{k+1,N} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{N,k+1} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

В таком случае из второго соотношения системы (6) определим

$$\bar{x}_s = -[c_{ss}]^{-1} [c_{sm}] \bar{x}_m - [c_{ss}]^{-1} \bar{F}_s(\bar{x}_m, \bar{x}_s, \dot{\bar{x}}_m, \dot{\bar{x}}_s, t). \tag{8}$$

Подставляя последнее равенство в первое уравнение системы (6), получим

$$\begin{aligned}
 \ddot{\bar{x}}_m + [c_{mm}] \bar{x}_m - [c_{ms}] [c_{ss}]^{-1} [c_{sm}] \bar{x}_m - \\
 - [c_{ms}] [c_{ss}]^{-1} \bar{F}_s(\bar{x}_m, \bar{x}_s, \dot{\bar{x}}_m, \dot{\bar{x}}_s, t) + \bar{F}_m(\bar{x}_m, \bar{x}_s, \dot{\bar{x}}_m, \dot{\bar{x}}_s, t) = 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, произведя исключение переменных x_s , характеризующих перемещения в опорах, получаем измененную матрицу жесткости $[K_m] = [c_{mm}] - [c_{ms}] [c_{ss}]^{-1} [c_{sm}]$, связь же уравнений будет прослеживаться только в компонентах измененного вектора $\tilde{\bar{F}}_m$:

$$\tilde{\bar{F}}_m = \bar{F}_m(\bar{x}_m, \bar{x}_s, \dot{\bar{x}}_m, \dot{\bar{x}}_s, t) - [c_{ms}] [c_{ss}]^{-1} \bar{F}_s(\bar{x}_m, \bar{x}_s, \dot{\bar{x}}_m, \dot{\bar{x}}_s, t),$$

который содержит нелинейные слагаемые, диссипативные и гироскопические члены. Дополнив измененную группу дифференциальных уравнений алгебраическими (исходными или преобразованными), получим модифицированную полную систему уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}}_m + [K_m] \bar{x}_m + \tilde{\bar{F}}_m(\bar{x}_m, \bar{x}_s, \dot{\bar{x}}_m, \dot{\bar{x}}_s, t) = 0, \\ [c_{sm}] \bar{x}_m + [c_{ss}] \bar{x}_s + \bar{F}_s(\bar{x}_m, \bar{x}_s, \dot{\bar{x}}_m, \dot{\bar{x}}_s, t) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Если $[U]$ – матрица, составленная из собственных векторов матрицы $[K_m]$ (матрица масс согласно постановке задачи – единичная), то, сделав замену переменных $\bar{x}_m = [U] \bar{q}_m$ и умножив группу дифференциальных уравнений слева на $[U]^{-1}$, получим систему уравнений, записанную в главных координатах:

$$\begin{cases} [U]^{-1} [U] \ddot{\bar{q}}_m + [U]^{-1} [K_m] [U] \bar{q}_m + [U]^{-1} \tilde{\bar{F}}_m([U] \bar{q}_m, \bar{x}_s, [U] \dot{\bar{q}}_m, \dot{\bar{x}}_s, t) = 0, \\ [c_{sm}] [U] \bar{q}_m + [c_{ss}] \bar{x}_s + \bar{F}_s([U] \bar{q}_m, \bar{x}_s, [U] \dot{\bar{q}}_m, \dot{\bar{x}}_s, t) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Так как $[U]^{-1} [U] = [E]$ и $[U]^{-1} [K_m] [U] = \text{Diag}(\nu_1^2, \nu_2^2, \dots, \nu_N^2) = [\nu]$, то уравнения (11) перепишутся в таком виде:

$$\begin{cases} \ddot{\bar{q}}_m + [\nu] \bar{q}_m + \bar{\Phi}_m(\bar{q}_m, \bar{x}_s, \dot{\bar{q}}_m, \dot{\bar{x}}_s, t) = 0, \\ [\tilde{c}_{sm}] \bar{q}_m + [c_{ss}] \bar{x}_s + \bar{\Phi}_s(\bar{q}_m, \bar{x}_s, \dot{\bar{q}}_m, \dot{\bar{x}}_s, t) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Для общности обозначений произведем замену $x_j = q_j$ ($j = \overline{k+1, N}$), что даст окончательный вид системы уравнений в главных координатах:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \nu_1^2 q_1 + \varphi_1(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t) = 0, \\ \ddot{q}_2 + \nu_2^2 q_2 + \varphi_2(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t) = 0, \\ \dots \\ \ddot{q}_k + \nu_k^2 q_k + \varphi_k(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t) = 0, \\ r_{k+1,1}q_1 + r_{k+1,2}q_2 + r_{k+1,3}q_3 + \dots + \varphi_{k+1}(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t) = 0, \\ \dots \\ r_{N,1}q_1 + r_{N,2}q_2 + r_{N,3}q_3 + \dots + \varphi_N(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Приложение теории нелинейных нормальных форм к анализу вынужденных колебаний системы. Для анализа вынужденных колебаний системы (13) в окрестности простого резонанса может быть использован анализ нелинейных нормальных форм колебаний, которые представляют собой обобщение нормальных колебаний линейных систем [15–17]. Теория нелинейных нормальных форм колебаний широко используется чаще всего для анализа автономных систем. Исходным предположением при анализе есть то, что в режиме нормальных форм колебаний либо все переменные конфигурационного пространства могут быть однозначно выражены через одну из них (концепция Каудерера–Розенберга [15–17]), либо же все переменные фазового пространства могут быть выражены через пару выделенных фазовых переменных, а именно, через какое-либо обобщенное перемещение и соответствующую скорость (концепция Шоу–Пьера [18, 19]). Такой подход позволяет в режиме нормальных колебаний свести систему с несколькими степенями свободы к системе с одной степенью свободы, давая представление о возможных одночастотных режимах рассматриваемой системы. Заметим, что подход, связанный с нормальными формами Шоу–Пьера, очень эффективен в квазилинейных диссипативных системах. Нормальные формы колебаний можно обобщить и на неавтономные системы, что позволяет вести анализ резонансных вынужденных колебаний [16, 17]. При этом используется метод Раушера [20], который позволяет в режиме вынужденных колебаний заменить неавтономную систему эквивалентной автономной. Обобщение метода Раушера на системы с несколькими степенями свободы было представлено в [21]. Уравнения (4) (или преобразованные уравнения (13)) описывают систему, обладающую в силу постановки задачи также и внутренним резонансом. Поэтому в настоящей работе модифицированный метод построения нормальных форм вынужденных колебаний в форме Шоу–Пьера, пригодный для учета данной особенности, используется в сочетании с методом Раушера. Запишем систему уравнений (13) в каноническом виде:

$$\begin{cases} \dot{q}_k = s_k, \\ \dot{s}_k = -\nu_k^2 q_k - f_k(\bar{q}, \bar{s}) + F_k \cos \Omega t, \quad k = \overline{1, N-1}, \\ \dot{q}_N = s_N, \\ f_N(\bar{q}, \bar{s}) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь $\bar{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}^T$, $\bar{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}^T$. Для определенности будем считать, что выполняется условие резонанса $\Omega \approx \nu_1 \approx \nu_2$. (В рассматриваемой

системе $\nu_1 = \nu_2$).

Пусть каким-либо образом стали известны приближенные зависимости от времени для главных координат q_1, s_1, q_2, s_2 (именно эти переменные в силу условия резонанса будут иметь наибольшие амплитуды) в виде тригонометрических разложений:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \cos \Omega t + B_1 \sin \Omega t + A_2 \cos 2\Omega t + B_2 \sin 2\Omega t + \\ &\quad + A_3 \cos 3\Omega t + B_3 \sin 3\Omega t + \dots, \\ s_1 &= B_1 \Omega \cos \Omega t - A_1 \Omega \sin \Omega t + 2B_2 \Omega \cos 2\Omega t - 2A_2 \Omega \sin 2\Omega t + \\ &\quad + 3B_3 \Omega \cos 3\Omega t - 3A_3 \Omega \sin 3\Omega t + \dots, \\ q_2 &= \dots, \quad s_2 = \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Назовем эти координаты активными (в работах Шоу и Пьера они названы “master coordinates”). Определим теперь следующие зависимости:

$$\cos \Omega t = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 s_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 s_2 + \alpha_5 q_1^2 + \alpha_6 s_1^2 + \dots, \quad \sin \Omega t = \dots \quad (16)$$

Один из способов получения таких разложений представлен в [17]. Можно также выполнить подстановку рядов (15) в (16) и потребовать выполнения равенства коэффициентов при гармониках в левой и правой частях полученных равенств. В результате получается система линейных алгебраических уравнений относительно искомым коэффициентов. Использование зависимостей (16) позволяет в режиме нормальных форм колебаний заменить исходную неавтономную систему некоторой эквивалентной автономной системой (так называемой “псевдоавтономной”). В этом и состоит основная идея модифицированного метода Раушера. В результате получим

$$\begin{cases} \dot{q}_k = s_k, & k = \overline{1, N-1}, \\ \dot{s}_k = -\nu_k^2 q_k - f_k(\bar{q}, \bar{s}) + (\alpha_1 q_1 + \alpha_2 s_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 s_2 + \alpha_5 q_1^2 + \dots) F_k, \\ \dot{q}_N = s_N, \\ f_N(\bar{q}, \bar{s}) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Следующий этап – построение нормальных форм Шоу–Пьера для системы (17). В традиционной постановке (при отсутствии внутреннего резонанса) искомые зависимости представляют собой разложения $2N - 2$ фазовых переменных по двум выделенным независимым переменным – паре перемещение/скорость с одинаковыми индексами [18, 19]. Однако в случае внутреннего резонанса $\nu_1 = \nu_2$ в качестве независимых переменных необходимо брать четыре активные фазовые переменные, а именно, q_1, s_1, q_2, s_2 .

Для упрощения изложения введем новые обозначения для основных активных фазовых переменных: $q_1 = u, s_1 = v, q_2 = w, s_2 = z$. В таком случае

уравнения (17) примут вид

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = \phi_1(u, v, w, z, q_i, s_i), \\ \dot{w} = z, \\ \dot{z} = \phi_2(u, v, w, z, q_i, s_i), \quad i = \overline{3, N}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dot{q}_k = s_k, \\ \dot{s}_k = \phi_k(u, v, w, z, q_i, s_i), \\ \dots \end{cases} \quad (18)$$

Поскольку $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial}{\partial w} \frac{dw}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{dz}{dt}$, то, используя первые четыре уравнения (18), запишем уравнения в частных производных для определения форм колебаний в виде зависимостей $q_i = q_i(u, v, w, z)$, $s_i = s_i(u, v, w, z)$,

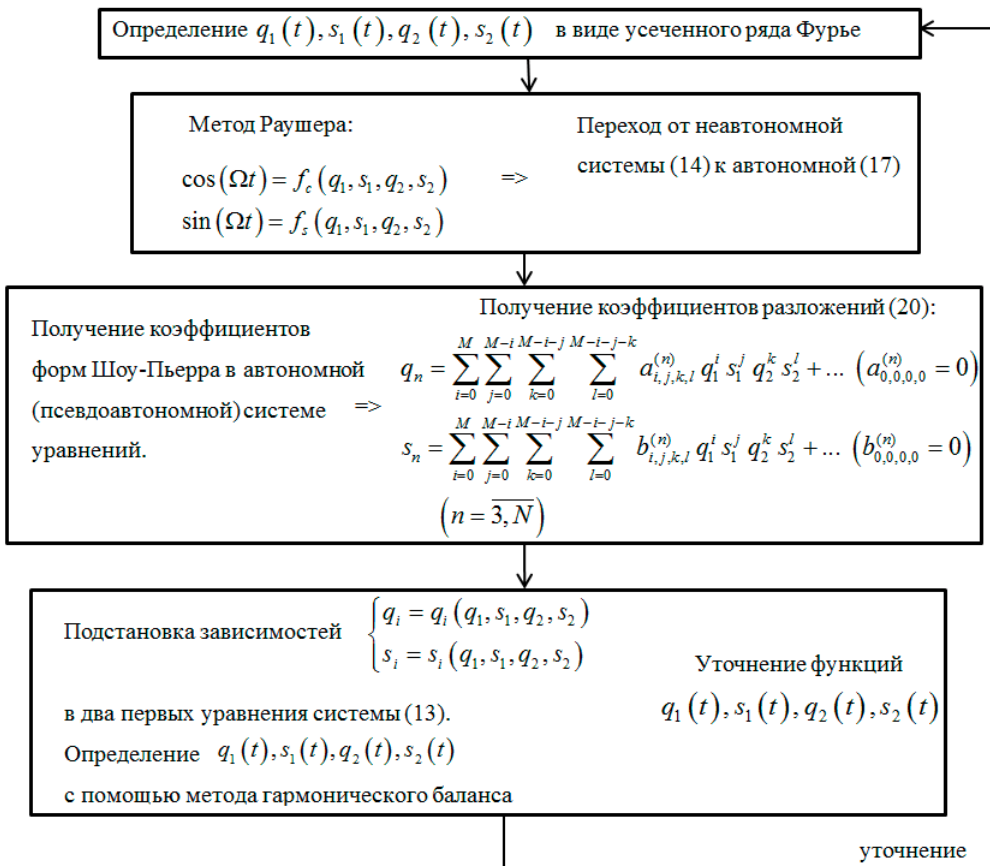


Рис. 3. Структура итерационного метода.

$i = \overline{3, N}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial q_3}{\partial u} v + \frac{\partial q_3}{\partial v} \phi_1(u, v, w, z, q_i, s_i) + \frac{\partial q_3}{\partial w} z + \frac{\partial q_3}{\partial z} \phi_2(u, v, w, z, q_i, s_i) = s_3, \\ \frac{\partial s_3}{\partial u} v + \frac{\partial s_3}{\partial v} \phi_1(u, v, w, z, q_i, s_i) + \frac{\partial s_3}{\partial w} z + \frac{\partial s_3}{\partial z} \phi_2(u, v, w, z, q_i, s_i) = \\ \dots \\ \dots \end{array} \right. = \phi_3(u, v, w, z, q_i, s_i), \quad (19)$$

Нелинейные нормальные формы колебаний определяются в виде степенных рядов по выделенным (активным) фазовым переменным:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_n = a_{1,0,0,0}^{(n)} q_1 + a_{0,1,0,0}^{(n)} s_1 + a_{0,0,1,0}^{(n)} q_2 + a_{0,0,0,1}^{(n)} s_2 + a_{2,0,0,0}^{(n)} q_1^2 + \dots, \\ s_n = b_{1,0,0,0}^{(n)} q_1 + b_{0,1,0,0}^{(n)} s_1 + b_{0,0,1,0}^{(n)} q_2 + b_{0,0,0,1}^{(n)} s_2 + b_{2,0,0,0}^{(n)} q_1^2 + \dots, \end{array} \right. \quad n = \overline{3, N}. \quad (20)$$

Коэффициенты рядов (20) определяются после подстановки рядов в систему уравнений в частных производных (19). Приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях фазовых переменных u, v, w, z , получаем рекуррентную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений рядов (20).

После того, как коэффициенты будут найдены, разложения (20) можно подставить в систему (14), что позволяет исключить из нее все уравнения, кроме первых четырех. Таким образом, построение нелинейных нормальных форм колебаний позволяет и при анализе вынужденных колебаний работать с редуцированной моделью, а не с полной. Из оставленных уравнений теперь можно найти новые, более точные, представления вида (15), а вслед за тем определить новые зависимости вида (16). Таким образом, можно построить итерационный процесс нахождения резонансных вынужденных колебаний с требуемой точностью. Общая схема итерационного процесса определения вынужденных колебаний с помощью форм Шоу–Пьера в случае внутреннего резонанса представлена на рис. 3.

3. Результаты численных расчетов. На рис. 4, 5 отображены результаты расчетов для роторной системы, обладающей такими параметрами: $m = 15.3$ кг, $I_e = 0.22$ кг·м², $I_p = 0.441$ кг·м², $l = 1$ м, $h_1 = 1/3$, $h_2 = 2/3$, $c_x^{(1)} = c_y^{(1)} = k_x^{(1)} = k_y^{(1)} = 9.8 \cdot 10^5$ Н/м, $c_x^{(2)} = c_y^{(2)} = k_x^{(2)} = k_y^{(2)} = 1.96 \cdot 10^{12}$ Н/м³, $\varepsilon = 10^{-4}$ м, $\beta = 3000$ Н·с/м, $\rho_1 = 1.5$ Н·с/м, $\rho_2 = 1.5$ Н·с. Упругий вал характеризуется следующими величинами: модуль упругости $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, радиус поперечного сечения 0.015 м. На рисунках изображено сопоставление результатов, полученных аналитически по представленной выше методике и с помощью численного интегрирования в системе Maple 13 уравнений в главных координатах (14) при отношении частоты внешнего возбуждения к первой собственной частоте, равном 0.9922. На рис. 4 показана проекция траектории изображающей точки системы при стационарных колебаниях на

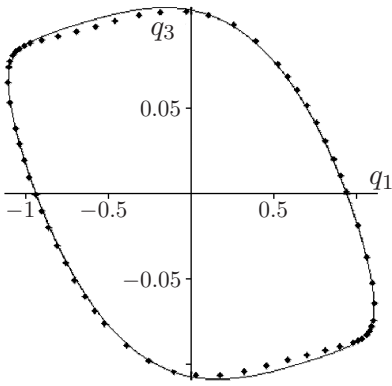


Рис. 4. Проекция траектории изображающей точки системы на плоскость q_1q_3 .

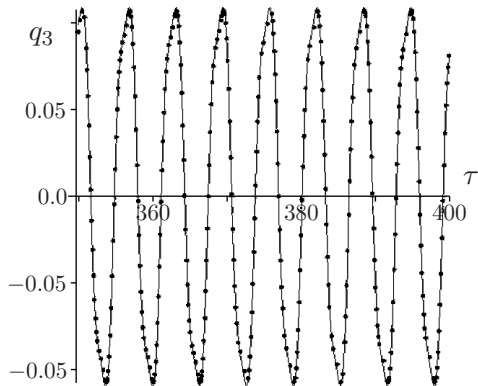


Рис. 5. Зависимость от времени главной координаты q_3 .

плоскость q_1q_3 (q_1 – активная обобщенная координата, q_3 – неактивная). На рис. 5 изображена зависимость от безразмерного времени τ ($\tau = \nu_1 t$) обобщенной координаты q_3 для этого же стационарного режима. Здесь точками представлено численное интегрирование, а линия отвечает аналитическому решению.

На рис. 6 изображена АЧХ роторной системы, полученная двумя различными способами для обобщенного перемещения q_1 ($\text{м} \cdot 10^{-3}$): применением метода гармонического баланса к восьми уравнениям в главных координатах системы (13) и применением аналитической процедуры построения нелинейных нормальных колебаний с использованием разложений третьей степени. По оси абсцисс откладывается безразмерная частота ω , равная Ω/ν_1 .

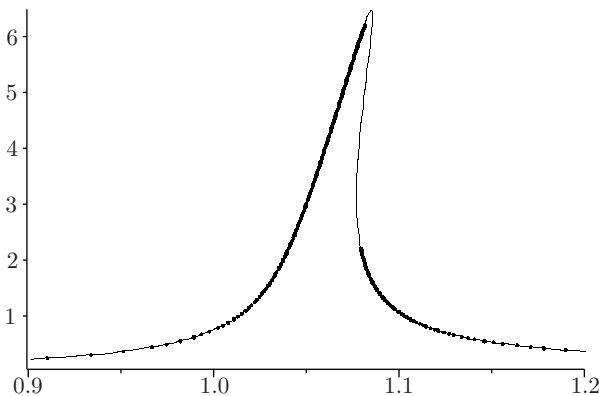


Рис. 6. АЧХ для обобщенного перемещения q_1 ($\text{м} \cdot 10^{-3}$).

По оси ординат откладываются значения амплитуды первой гармоники нормированного обобщенного перемещения. При расчете использовались такие значения параметров: $m = 5$ кг, $I_e = 0.22$ кг · м², $I_p = 0.441$ кг · м², $l = 1$ м, $h_1 = 0.3$, $h_2 = 0.7$, $c_x^{(1)} = c_y^{(1)} = k_x^{(1)} = k_y^{(1)} = 7 \cdot 10^5$ Н/м, $c_x^{(2)} = c_y^{(2)} = k_x^{(2)} = k_y^{(2)} = 9 \cdot 10^{10}$ Н/м³, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ м, $\beta = 0$ Н·с/м, $\rho_1 = 10$ Н·с/м, $\rho_2 = 10$ Н·с.

На рис. 6 линия соответствует результатам, полученным методом гармонического баланса, а точки – результатам, полученным методом нелинейных нормальных форм колебаний.

Выводы. В данной работе изложена концепция нового подхода к анализу вынужденных колебаний в механических системах с внутренним резонансом, опирающегося на метод нормальных форм Шоу–Пьера, модифицированный метод Раушера и метод итераций. Результаты расчета, полученные для уравнений неуравновешенного ротора с нелинейно-упругими изотропными опорами, демонстрируют работоспособность и хорошую точность такого подхода.

1. Кельзон А.С., Журавлев Ю.Н., Январев Н.В. Расчет и конструирование роторных машин. – Л.: Машиностроение, 1977. – 287 с.
2. Гробов А. Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин. – М: Изд-во АН СССР, 1961. – 166 с.
3. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
4. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 360 с.
5. Tondl A. Some problems of rotor dynamics. – London: Chapman and Hall, 1965. – 434 p.
6. Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные колебания деформируемых систем. – Киев: Наук. думка, 1977. – 339 с.
7. Iwatsubo J., Kaneki H., Kawai R. Vibration of asymmetric rotor through critical speed with limited power supply // J. Mech. Engineering Science. – 1972. – **14**. – P. 184–194.
8. Hendricks S.L. The effect of visco elasticity on the vibration of a rotor // ASME J. of Applied Mechanics. – 1986. – **53**. – P. 412–416.
9. Kim Y.B., Noah S.T. Bifurcation analysis for a Modified Jeffcott Rotor with Bearing Clearance // Nonlinear Dynamics. – 1990. – **1**. – P. 221–241.
10. Ishida Y., Inoue T. Internal resonance phenomena of the Jeffcott rotor with nonlinear spring characteristics // ASME J. of Vibration and Acoustics. – 2004. – **126**. – P. 476–484.
11. Inoue T., Ishida Y. Chaotic vibrations and internal resonance phenomena in rotor systems // ASME J. of Vibration and Acoustics. – 2006. – **128**. – P. 156–169.
12. Jiang J., Ulbrich H. Stability analysis of slinding whirl in a nonlinear Jeffcott rotor with cross-coupling stiffness coefficients // Nonlinear Dynamics. – 2001. – **24**. – P. 269–283.
13. Serra Villa C.V., Sinou J.-J., Thouverez F. The invariant manifold approach applied to nonlinear dynamics of a rotor-bearing system // European J. of Mechanics A. – 2005. – Solids 24. – P. 676–689.
14. Avramov K.V. Asymptotic analysis of forced vibrations of a one-disc rotor on a non-linear flexible base // Proc. of the IMechE, Part C: J. of Mech. Engineering Science. – 2010. – **224**, № 8. – P. 1593–1604.
15. Mikhlin Yu. Normal vibrations of a general class of conservative oscillators // Nonlinear Dynamics. – 1996. – **11**. – P. 1–16.
16. Vakakis A., Manevitch L., Mikhlin Yu., Pilipchuk V., Zevin A. Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems. – New-York: Wiley, New-York, 1996. – 552 p.

17. Аврамов К.В., Михлин Ю.В. Нелинейная динамика упругих систем. – М.–Ижевск: НИИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010. – 704 с.
18. Shaw S., Pierre C. Nonlinear normal modes and invariant manifolds // J. of Sound and Vibration. – 1991. – **150**. – P. 170–173.
19. Shaw S., Pierre C. Normal modes for nonlinear vibratory systems // J. of Sound and Vibration. – 1993. – **164**. – P. 85–124.
20. Rauscher M. Steady oscillations of system with nonlinear and unsymmetrical elasticity // J. of Applied Mechanics. – 1938. – **5**. – P. 169–176.
21. Михлин Ю.В. Резонансные режимы нелинейных систем, близких к консервативным // Прикл. математика и механика. – 1974. – **38 (3)** – С. 425–429.

N.V. Perepelkin, Yu.V. Mikhlin

Analysis of forced vibration modes of a one-disk rotor on a nonlinear flexible base

The paper contains a description of the new approach in analysis of forced vibrations of mechanical systems, which is based on method of the nonlinear normal vibration modes by Shaw-Pierre. The variant of the nonlinear normal modes method which is suitable to analyze vibrations of the systems having an inner resonance, is presented. The model of unbalanced one-disk rotor on a nonlinear flexible base, is chosen as concrete one. Analytical results are compared with results of the numerical simulation.

Keywords: *forced vibrations of a rotor, nonlinear normal vibration modes.*

М.В. Перепелкін, Ю.В. Міхлін

Аналіз вимушених форм коливань однодискового ротора на нелінійно-пружних опорах

Робота містить опис нового підходу до аналізу вимушених коливань механічних систем, оснований на методі нелінійних нормальних форм коливань Шоу-П'єра. Представлено варіант методу, що є придатним для аналізу коливань систем з внутрішнім резонансом. Як конкретну модель для аналізу взято модель однодискового неврівноваженого ротора на нелінійно-пружних опорах. Приведено порівняння аналітичних результатів і результатів чисельного моделювання.

Ключові слова: *вимушені коливання ротора, нелінійні нормальні форми коливань.*

Национальный техн. ун-т
“Харьковский политехнический ин-т”

Получено 10.11.10

mvv@kpi.kharkov.ua