

УДК 531.38

©2010. Н.А. Вельмагина, В.Г. Вербицкий

БИФУРКАЦИОННОЕ МНОЖЕСТВО МОДЕЛИ ДВУХОСНОГО ЭКИПАЖА С НЕЛИНЕЙНОЙ НЕМОНОТОННОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ СИЛ УВОДА

Представлен подход построения бифуркационного множества модели двухосного экипажа с немонотонными зависимостями сил увода; приведена серия фазовых портретов, иллюстрирующих структурные изменения в системе при прохождении критических значений управляющих параметров.

Ключевые слова: модель экипажа, стационарные состояния, устойчивость, бифуркационное множество.

Введение. Математическую модель экипажа можно представить в виде динамической системы

$$\dot{x} = f(x, \theta, v),$$

ее стационарные состояния определяются решением системы нелинейных уравнений

$$f_i(x, \theta, v) = 0, \quad x \in R^n \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1)$$

Система имеет два управляющих параметра: скорость продольного движения v ; угол поворота передних управляемых колес θ . В работах [1, 2] рассматривается вопрос об эволюции стационарных состояний при изменении управляющих параметров. Бифуркационным значениям параметров (v^*, θ^*) соответствуют кратные решения x^* системы (1). Якобиан системы обращается в нуль во всех точках критического множества x^* :

$$L = \|\partial f_i / \partial x_j\|_{x^*} = 0, \quad x^* \in M_{kp}.$$

Система (1) вместе с последним уравнением задает критическое множество на многообразии стационарных состояний. В точках критического множества происходит исчезновение устойчивого стационарного состояния (этим точкам соответствуют либо точки складки – двухкратные решения системы (1), либо сборки – трехкратные решения системы (1) [3]).

Представляет интерес анализ устойчивости нелинейной модели экипажа во всей плоскости управляющих параметров. Он может быть проведен на основе информации о структуре бифуркационного множества, разбивающего плоскость параметров на области с различным количеством стационарных режимов. Однако процедура построения бифуркационного множества в случае зависимости сил бокового увода с явно выраженным максимумом потребует некоторого развития. Это связано с существованием нескольких ветвей бифуркационного множества.

Постановка задачи. Рассмотрим систему, состоящую из корпуса с жестко закрепленной задней колесной осью и переднего колесного модуля, его поворот относительно корпуса жестко фиксируется (задается параметром θ). Система находится под воздействием боковых реакций опорной поверхности – упругие колеса могут катиться под некоторым углом (углом увода) к плоскости симметрии колеса (за счет упругой деформации в пятне контакта), при этом возникают поперечные силы со стороны опорной поверхности, препятствующие боковому проскальзыванию колеса (силы увода). Рассматриваемая система не учитывает пяточных моментов, так как их величины на порядок меньше моментов, порождаемых боковыми силами относительно центра масс экипажа.

Пусть m – масса экипажа; J – центральный момент инерции системы относительно вертикальной оси; a, b – расстояние от центра масс экипажа до середины передней и задней колесных осей соответственно.

Уравнения плоскопараллельного движения велосипедной двухосной схемы экипажа (вертикальная продольная плоскость, проходящая через середины колесных осей, является плоскостью симметрии) с постоянной продольной составляющей скорости центра масс имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\dot{u} + \omega v) = Y_1 \cos \theta + Y_2; \\ J\dot{\omega} = aY_1 \cos \theta - Y_2 b; \\ \delta_1 = \theta - \arctg \frac{u + a\omega}{v}, \quad \delta_2 = \arctg \frac{-u + b\omega}{v}, \end{array} \right. \quad (2)$$

где u – поперечная составляющая скорости центра масс экипажа; ω – угловая скорость экипажа, относительно вертикальной оси; δ_1, δ_2 – приведенные углы увода, на передней и задней осях соответственно; Y_1 и Y_2 – приведенные боковые силы увода, как функции углов увода, на передней и задней осях соответственно.

Основная часть. Силы увода определяются эмпирически и могут быть представлены различными аналитическими зависимостями. Нахождение стационарных режимов движения (особых точек) сводится к решению системы

$$-\frac{v}{g}\omega + \frac{\cos(\theta)\overline{Y}_1(\delta_1)b}{l} + \frac{\overline{Y}_2(\delta_2)a}{l} = 0, \quad \cos(\theta)\overline{Y}_1(\delta_1) - \overline{Y}_2(\delta_2), \quad (3)$$

где $\overline{Y}_i(\delta_i) = Y_i(\delta_i)/N_i$ – безразмерные боковые реакции опорной плоскости на ось (N_i – вертикальная нагрузка на ось).

В работе рассматриваются зависимости вида:

$$Y_i = \frac{\gamma_i \delta_i}{\sqrt{1 + \frac{(|\delta_i| - \beta_i)^2}{(\beta_i)^2}}}, \quad (4)$$

которые учитывают немонотонность сил увода (в отличие от монотонных зависимостей при достаточно большом значении угла увода функция имеет ниспадающие участки).

Параметры γ_i и β_i подбираем из соображений сохранения геометрических характеристик монотонных зависимостей $Y_i = \frac{q_i \delta_i}{\sqrt{1 + \frac{(q_i \delta_i)^2}{(\varphi_i)^2}}}$, что обеспечит

согласованность максимальных значений безразмерных сил увода (рис. 1): $\gamma_i = \sqrt{2}q_i$, $q_i = \text{tg } \alpha_i$, $\beta_i < \frac{\varphi}{2q_i}$.

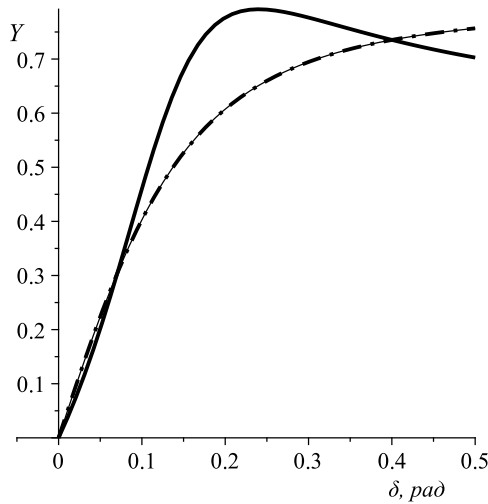


Рис. 1

Далее проанализируем влияние новой “геометрии” зависимости сил увода на бифуркационное множество. Система (3) сводится к одному определяющему уравнению

$$\bar{Y}(\delta_2 - \delta_1) = \frac{v^2}{gl}(\theta + \delta_2 - \delta_1), \quad (5)$$

в котором левая часть является нелинейной функцией, называемой в дальнейшем “неподвижной кривой”, в правой части представлена прямая (“подвижная прямая”). Точкам пересечения “неподвижной кривой” и прямой соответствуют стационарные режимы системы (1). При непрерывном изменении параметров v и θ определяющее уравнение (5) задает отображение плоскости параметров v и θ в равновесную поверхность. Бифуркационному множеству (критическому множеству) отвечают значения параметров v , θ , для которых “подвижная прямая” касается “неподвижной кривой”. Тогда точкам перегиба исходной кривой $\bar{Y} = \bar{Y}(\delta_2 - \delta_1)$ соответствуют точки возврата бифуркационного множества. Трехкратному решению на равновесной поверх-

ности будет соответствовать особенность сборки, а двукратному решению – складка.

В случае монотонной зависимости сил увода от угла увода, имеющей характер кривой насыщения, “неподвижная” кривая может иметь три точки перегиба, а соответствующее бифуркационное множество – три точки возврата. Немонотонные зависимости сил увода порождают дополнительные точки перегиба “неподвижной” кривой $\bar{Y} = \bar{Y}(\delta_2 - \delta_1)$, что приводит к усложнению бифуркационного множества.

Зависимость $\bar{Y} = \bar{Y}(\delta_2 - \delta_1)$ определяется из соответствия $\bar{Y}_1(\delta_1) = \bar{Y}(\delta_2) = \bar{Y}$. Критические значения параметров удовлетворяют условиям

$$\frac{v^2}{gl} = \frac{dY}{d(\delta_2 - \delta_1)}; \quad \frac{Y}{\theta + \delta_2 - \delta_1} = \frac{dY}{d(\delta_2 - \delta_1)}, \quad (6)$$

тогда

$$\theta = YY' - (\delta_2 - \delta_1).$$

Таким образом, система (6) позволяет найти бифуркационное множество в параметрическом виде

$$\theta = \theta(\delta_2 - \delta_1), \quad v = v(\delta_2 - \delta_1).$$

Иногда в качестве параметра целесообразно взять не $(\delta_2 - \delta_1)$, а \bar{Y} . В этом случае исходными зависимостями являются $Y_1 = f_1(\delta_1)$ и $Y_2 = f_2(\delta_2)$, разрешив их относительно δ_i , находим $\delta_1 = F_1(Y_1)$, $\delta_2 = F_2(Y_2)$. Определяющее уравнение (5) в этом случае будет иметь вид $\frac{gl}{v^2}Y - \theta = G(Y)$, где $G(Y) = F_2(Y) - F_1(Y)$. Из условий касания “неподвижной” кривой и “подвижной” прямой

$$\frac{gl}{v^2} = \frac{dG}{dY}; \quad \frac{\theta + G(Y)}{Y} = \frac{dG}{dY}$$

получим параметрические уравнения бифуркационного множества: $\theta = \theta(Y)$, $v = v(Y)$

$$\theta = YG'(Y) - G(Y); \quad v = \sqrt{\frac{gl}{G'(Y)}}. \quad (7)$$

Далее перейдем к процедуре формирования функции $G(Y) = \delta_2 - \delta_1$ в случае немонотонных зависимостей $Y_i(\delta_i)$. Для выбранных ранее численных значений параметров β, γ определим функции $F_i(Y)$. Для этого, разрешая соотношения (4) относительно δ_i , получим по две однозначные ветви, “сшиваемые” в точках поворота (рис. 2):

$$f_{11} = \frac{0.12(-|Y| + \sqrt{0.6272879344 - Y^2})Y}{-Y^2 + 0.3136439672},$$

$$f_{21} = \frac{0.15(-|Y| + \sqrt{0.5744942192 - Y^2})Y}{-Y^2 + 0.2872471096},$$

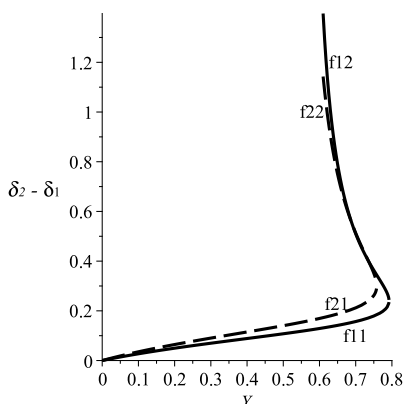


Рис. 2

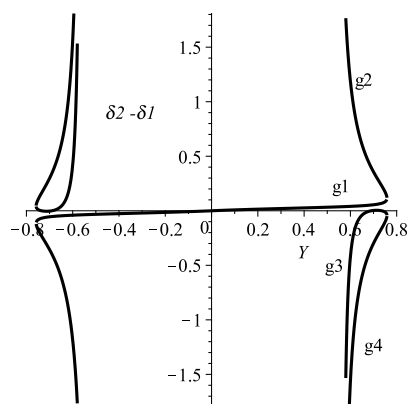


Рис. 3

$$f_{12} = \frac{0.12(Y + \sqrt{0.6272879344 - Y^2})Y}{Y^2 - 0.3136439672},$$

$$f_{22} = \frac{0.15(Y + \sqrt{0.5744942192 - Y^2})Y}{Y^2 - 0.2872471096}.$$

В свою очередь, функция $G(Y) = \delta_2 - \delta_1$ определяется как разность соответствующих однозначных ветвей f_{ij} , образуя три ветви (рис. 3).

Часть основной ветви до точки поворота получена из условия $G(Y) = g_1 = f_{21} - f_{11}$, вторая часть этой ветви определяется соотношением $G(Y) = g_2 = f_{22} - f_{11}$. Дополнительная ветвь “неподвижной кривой” появляется за счет ниспадающих участков зависимостей сил увода $G(Y) = g_3 = f_{22} - f_{12}$; $G(Y) = g_4 = f_{21} - f_{12}$.

Для каждой из ветвей функции $G(Y)$ в соответствии с (7) получена двойственная кривая, представляющая часть бифуркационного множества (рис. 3). При пересечении критического множества параметров в точках общего положения количество стационарных режимов изменяется на две единицы.

На рисунке 4 указано количество стационарных режимов в различных областях плоскости управляемых параметров. На рис. 4, а изображен общий вид бифуркационного множества для модели экипажа с нелинейной немонотонной зависимостью сил увода от угла увода, а на рис. 4, б – фрагменты множества.

Анализ уравнений возмущенного движения колесного экипажа. Исследование устойчивости стационарных состояний сводится к анализу уравнения в вариациях:

$$\ddot{\omega} + p\dot{\omega} + q\omega = 0, \quad p = -[\text{div}(P, Q)]|_{(\omega^*u^*)}, \quad q = [D(P, Q)/D(\omega, u)]|_{(\omega^*u^*)}.$$

Знак дивергенции векторного поля, заданного системой (2), однозначно опре-

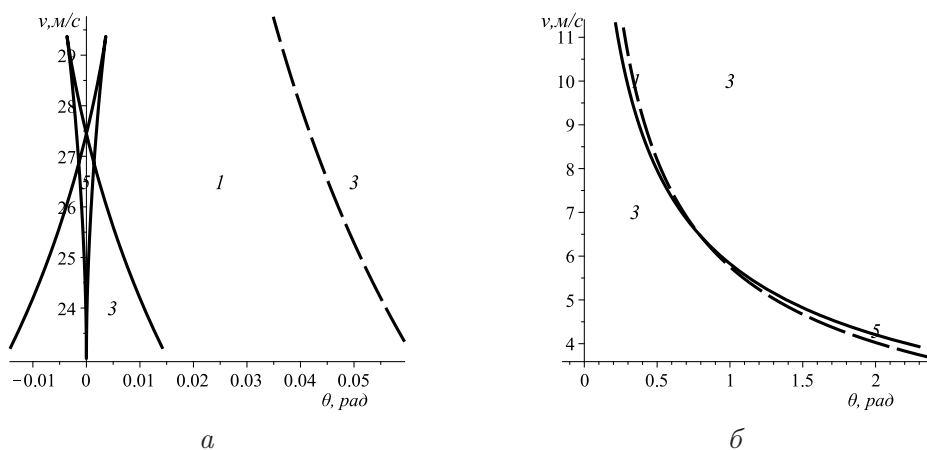


Рис. 4

деляется в случае совпадения знаков $\frac{dY_1}{d\delta_1}$ и $\frac{dY_2}{d\delta_2}$:

$$\operatorname{div}(P, Q) = -\frac{1}{v} \left[\left(\frac{a^2}{I} + \frac{1}{m} \right) \frac{dY_1}{d\delta_1} + \left(\frac{b^2}{I} + \frac{1}{m} \right) \frac{dY_2}{d\delta_2} \right].$$

В особых точках, соответствующих выпуклым участкам зависимостей сил увода $Y_1(\delta_1), Y_2(\delta_2)$, дивергенция векторного поля отрицательна, а для точек, соответствующих ниспадающим участкам – положительна. Так, для ветви g_3 (см. рис. 3) дивергенция векторного поля заведомо положительна, так как обе производные $\frac{dY_1}{d\delta_1}$ и $\frac{dY_2}{d\delta_2}$ имеют отрицательный знак; для ветви g_1 – отрицательна.

Из общей теории динамических систем [4] следует, что устойчивость какой-либо особой точки (с индексом Пуанкаре $j = +1$) не может измениться (предполагается, что дивергенция векторного поля отрицательна) до встречи с другой особой точкой с отрицательным индексом $j = -1$. В этом случае реализуется двукратный стационарный режим, что соответствует бифуркации складки.

На рисунке 5, а проиллюстрирован подход к анализу устойчивости стационарных режимов (при $\theta = 0$ и вариации параметра продольной скорости v) на основе понятия индекса Пуанкаре.

Прямолинейный режим устойчив при $v < v^+$ ($j = 1$) и неустойчив при $v > v^+$ ($j = -1$). При $v = v^+$ (рис. 5, а) в начало координат приходят две особые точки, образуя трехкратную особую точку; при $v > v^+$ в начале координат имеется седловая особая точка (как следует из линейного анализа), следовательно, индекс Пуанкаре “подвижных” особых точек – $j = -1$. Анализ устойчивости круговых стационарных режимов движения представлен на рисунке 5, б. Сохраняя скорость постоянной $v = \text{const}$, будем варьировать

лишь параметр θ . При $\theta = \theta_1$ на основной ветви g_1 , а при $\theta = \theta_2$ на дополнительной ветви g_3 имеются двукратные особые точки. “Верхняя” определяет границу расположения устойчивых круговых режимов на ветви f_1 при изменении параметра $\theta (0 \leq \theta \leq \theta_1)$; “нижняя” отвечает рождению пары особых точек с противоположными по знаку индексами Пуанкаре при $\theta = \theta_2$. При $\theta > \theta_2$ этим особым точкам соответствуют неустойчивые круговые стационарные режимы – одна седловая, вторая неустойчивая в силу положительности дивергенции на ветви (неустойчивый узел или фокус). Меняя оба управляющих параметра одновременно, можно получить случай, когда максимальное число особых точек равно пяти (рис. 5, в).

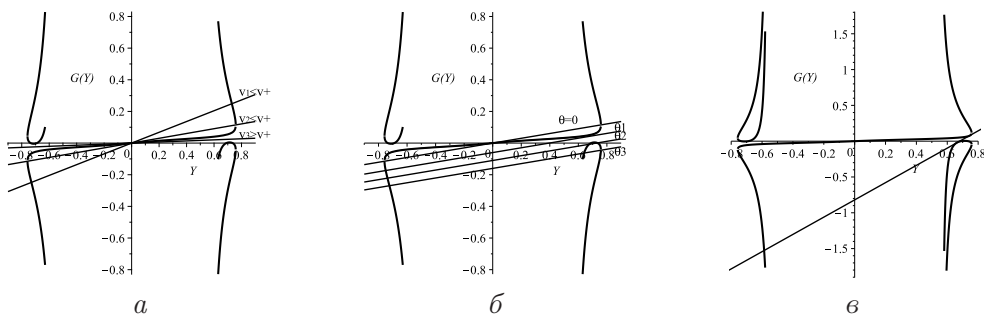


Рис. 5

Проведенный качественный анализ может быть конкретизирован с помощью построения фазовых портретов системы, соответствующих характерным значениям управляющих параметров. Это позволяет подтвердить число стационарных режимов и свойства их устойчивости в различных областях плоскости управляемых параметров (рис. 6).

Построение фазового портрета выполнено для следующего набора численных значений параметров:

$\varphi_1 = 0.8, \varphi_2 = 0.8$ – коэффициенты сцепления на осях;

$a = 2.3$ м, $b = 2.7$ м – расстояния от центра масс до точек крепления передней и задней осей соответственно;

$l = a + b = 5$ м;

$k_1 = 23000$ Н/рад, $k_2 = 15000$ Н/рад – коэффициенты бокового увода;

$m = 1317$ кг – масса экипажа;

$N_1 = \frac{mgb}{a+b} = 696.564$ Н, $N_2 = \frac{mga}{a+b} = 5937.036$ Н – реакции опорной поверхности для передней и задней осей;

$q_1 = \frac{k_1}{N_1} = 3.300, q_2 = \frac{k_2}{N_2} = 2.526$ – безразмерные коэффициенты сопротивления уводу;

$v^+ = \sqrt{\frac{glq_1q_2}{q_1 - q_2}} = 22.98$ м/с – критическая скорость прямолинейного движения без учета пяточных моментов.

Фазовые портреты, иллюстрирующие динамическое поведение модели в различных областях бифуркационного множества, изображены на рис. 6. Фазовый портрет на рис. 6, *а* соответствует случаю трех круговых стационарных режимов, один из которых устойчивый ($v = 20 \text{ м/с} < v^+, \theta = 0.02 \text{ рад} < \theta_1$). Случай появления особых точек на дополнительной ветви $g_3g_4(\theta = \theta_3)$ (см. рис. 4) соответствует фазовому портрету на рис. 6, *б* ($v = 30 \text{ м/с}, \theta = 0.06 \text{ рад}$).

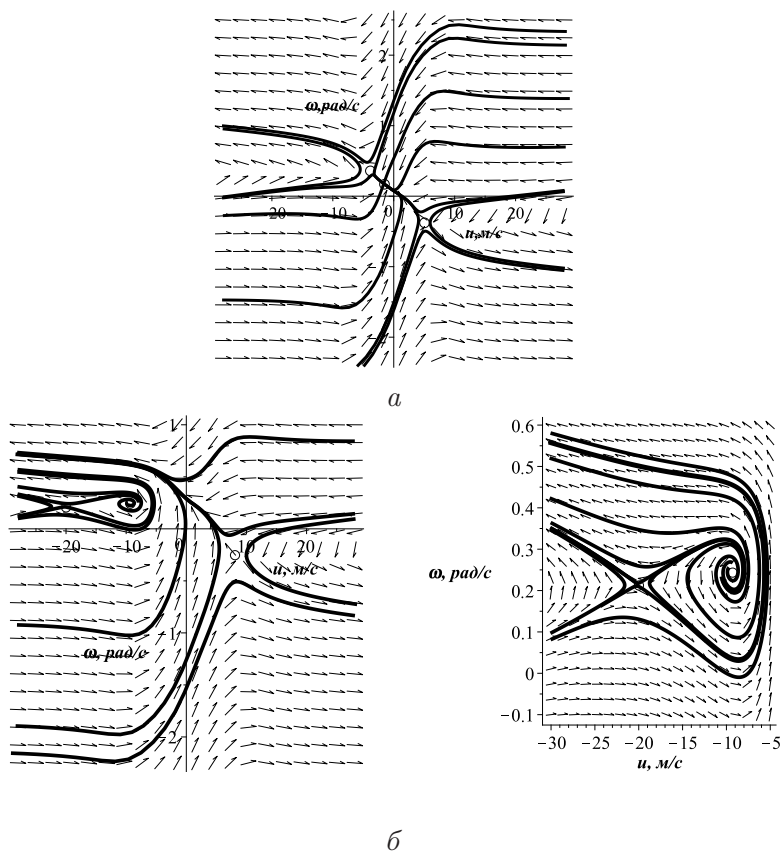


Рис. 6

В этом случае все стационарные состояния (два седла и фокус) неустойчивые, седло–фокус во втором квадранте – отвечают “ниспадающим” участкам зависимостей сил увода как функций углов увода. Характер фазового портрета для случая реализации пяти стационарных режимов легко представить, объединив рисунок 6, *а* и фрагмент седло–фокус из рисунка 6, *б*.

Выводы. Известный способ определения стационарных режимов движения колесного экипажа [6], дополненный алгоритмом построения бифуркационного множества и методом индекса Пуанкаре, дал возможность про-

вести предварительный анализ количества стационарных режимов и определить границы устойчивости в плоскости управляемых параметров в случае немонотонных зависимостей сил увода. Ниспадающие участки сил увода приводят к появлению дополнительных ветвей бифуркационного множества, что связано с качественными изменениями фазового портрета модели.

1. *Вербицкий В.Г.* Бифуркационные множества и катастрофы в многообразиях стационарных состояний пневмоколесных машин // Прикл. механика. – 1995. – **31**, №3. – С. 89–95.
2. *Холоднюк М., Клич А., Кубичек М., Марек М.* Методы анализа нелинейных математических моделей: Пер. с чешск. – М.: Мир, 1991. – 368 с.
3. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. 3-е изд., доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – С. 128.
4. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959. – 916 с.
5. *Певзнер Я.М.* Теория устойчивости автомобиля. – М.: Машгиз, 1947. – 156 с.
6. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Нелинейный анализ поведения механических систем. – Киев: Наук. думка, 1984. – 286 с.

N.A. Velmagina, V.G. Verbitskii

The bifurcation set for a two-axes vehicle model with the non-monotone dependence of slipping forces

The approach to constructing the bifurcation set of steady states for a two-axes vehicle model with non-linear nonmonotone dependences of lateral forces is presented; the series of phase portraits, illustrating structural changes in a system at passing of critical values of managing parameters are given.

Keywords: *vehicle model, steady states, stability, bifurcation set.*

Н.А. Вельмагіна, В.Г. Вербицький

Біфуркаційна множина моделі двохосьового екіпажу з нелінійною немонотонною залежністю сил відведення

Представлено підхід побудови біфуркаційної множини моделі двохосьового екіпажу з немонотонними залежностями сил відведення; наведено серію фазових портретів, що ілюструють структурні зміни в системі при проходженні критичних значень керуючих параметрів.

Ключові слова: *модель екіпажу, стаціонарні положення, стійкість, біфуркаційна множина.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
oxsi@bigmir.net

Получено 15.02.10