УДК 531.38

©2010. **А.В. Зыза**

ОДИН СЛУЧАЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА–ПУАССОНА

Исследованы условия существования одного класса полиномиальных решений уравнений Кирхгофа–Пуассона задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Получено новое решение, которое отличается от решений В.А. Стеклова, Н. Ковалевского, Д.Н. Горячева и их обобщений, указанных П.В. Харламовым.

Ключевые слова: *полиномиальные решения, уравнения Кирхгофа–Пуассона, гиростат, инвариантное соотношение, потенциальные и гироскопические силы.*

При интегрировании уравнений динамики гиростата с неподвижной точкой используют различные методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Среди них можно отметить: построение решений в виде рядов по вспомогательной переменной [1]; исследование решений уравнений движения на основе дополнительного первого интеграла (метода Якоби, см., например, [2]); применение методов инвариантных соотношений, развитых Т. Леви-Чивита [3], П.В. Харламовым [4].

Особый интерес представляют полиномиальные решения класса Стеклова–Ковалевского–Горячева, которые обобщены на случай тяжелого гиростата П.В. Харламовым [2]. Как показано в [5], полиномиальные решения указанного класса существуют и для уравнений Кирхгофа–Пуассона. Эти решения имеют как общие, так и отличительные свойства с решениями классической задачи [2].

Данная работа посвящена исследованию условий существования полиномиальных решений уравнений Кирхгофа–Пуассона в случае, когда квадрат второй компоненты вектора угловой скорости является линейной функцией от первой компоненты этого вектора. Построено новое частное решение, в котором компоненты вектора угловой скорости и вектора вертикали являются эллиптическими функциями времени.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение заряженного и намагниченного гиростата с неподвижной точкой в поле потенциальных и гироскопических сил. Потенциальные силы возникают при взаимодействии магнитов с постоянным магнитным полем, электрических зарядов с электрическим полем и ньютоновском притяжении масс. Центры ньютоновского и кулоновского притяжений лежат на оси, проходящей через неподвижную точку и параллельной вектору, характеризующему направление постоянного магнитного поля. Гироскопические силы определяются лоренцевым воздействием магнитного поля на движущиеся в пространстве электрические заряды и циклическим движением роторов в теле–носителе. Уравнения движения такого гиростата запишем в векторной форме [6]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = \Big(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}\Big) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times \Big(C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}\Big), \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Эти уравнения допускают три первых интеграла

$$A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} - 2\Big(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\nu}\Big) + \Big(C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\Big) = 2E_0, \quad 2\Big(A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}\Big)\cdot\boldsymbol{\nu} - \Big(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\Big) = 2k_0, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс; A – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке; B и C – симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает относительную производную; E_0 и k_0 – постоянные интегралов.

Запишем уравнения (1) и первые интегралы (2) в скалярном виде, полагая $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $\quad B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $C = \operatorname{diag}(C_1, C_2, C_3)$:

$$\left.\begin{aligned}
A_1\dot{p} &= (A_2 - A_3)qr + B_3\nu_3 q - B_2\nu_2 r + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3 + \lambda_2 r - \lambda_3 q + \\
&\quad + \nu_3 s_2 - \nu_2 s_3, \\
A_2\dot{q} &= (A_3 - A_1)rp + B_1\nu_1 r - B_3\nu_3 p + (C_1 - C_3)\nu_3\nu_1 + \lambda_3 p - \lambda_1 r + \\
&\quad + \nu_1 s_3 - \nu_3 s_1, \\
A_3\dot{r} &= (A_1 - A_2)pq + B_2\nu_2 p - B_1\nu_1 q + (C_2 - C_1)\nu_2\nu_1 + \lambda_1 q - \lambda_2 p + \\
&\quad + \nu_2 s_1 - \nu_1 s_2;
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \qquad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \qquad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2; \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2 - 2(s_1\nu_1 + s_2\nu_2 + s_3\nu_3) + C_1\nu_1^2 + C_2\nu_2^2 + \\
&\qquad + C_3\nu_3^2 = 2E_0, \\
&2(A_1 p + \lambda_1)\nu_1 + 2(A_2 q + \lambda_2)\nu_2 + 2(A_3 r + \lambda_3)\nu_3 - B_1\nu_1^2 - B_2\nu_2^2 - \\
&\qquad - B_3\nu_3^2 = 2k_0; \\
&\qquad\qquad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Следуя [5], поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (3), (4) при $s_2 = s_3 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ решений следующего вида

$$\begin{aligned}
&q^2 = Q(p) = \sum_{k=0}^{n} b_k p^k, \qquad r^2 = R(p) = \sum_{i=0}^{m} c_i p^i, \qquad \nu_1 = \varphi(p) = \sum_{j=0}^{l} a_j p^j, \\
&\nu_2 = q\psi(p), \qquad \nu_3 = r\varkappa(p), \qquad \psi(p) = \sum_{i=0}^{n_1} g_i p^i, \qquad \varkappa(p) = \sum_{j=0}^{m_1} f_j p^j,
\end{aligned} \tag{6}$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа или нули; коэффициенты b_k, c_i, a_j, g_i, f_j – некоторые параметры, подлежащие определению.

Известно, что в классической задаче о движении тяжелого твердого тела к указанному классу можно отнести решения В.А. Стеклова, Н. Ковалевского, Д.Н. Горячева [2].

Подставим выражения (6) в уравнения (3), (4) и геометрический интеграл из (5):

$$\dot{p} = \mu(p)\sqrt{Q(p)R(p)}, \qquad \mu(p) = \Big(\psi(p) - \varkappa(p)\Big)\Big(\varphi'(p)\Big)^{-1}; \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \Big(Q(p)\psi^2(p)\Big)'\mu(p) &= 2\psi(p)\Big(p\varkappa(p) - \varphi(p)\Big), \\ \Big(R(p)\varkappa^2(p)\Big)'\mu(p) &= 2\varkappa(p)\Big(\varphi(p) - p\psi(p)\Big); \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} A_1\mu(p) &= \Big(C_3 - C_2\Big)\psi(p)\varkappa(p) + B_3\varkappa(p) - B_2\psi(p) + A_2 - A_3, \\ A_2Q'(p)\mu(p) &= 2\Big[(C_1 - C_3)\varphi(p)\varkappa(p) - \varkappa(p)\big(B_3p + s_1\big) + \\ &\qquad + B_1\varphi(p) + \big(A_3 - A_1\big)p - \lambda_1\Big], \\ A_3R'(p)\mu(p) &= 2\Big[(C_2 - C_1)\varphi(p)\psi(p) + \psi(p)\big(B_2p + s_1\big) - \\ &\qquad - B_1\varphi(p) + \big(A_1 - A_2\big)p + \lambda_1\Big]; \end{aligned} \tag{9}$$

$$\varphi^2(p) - 1 + Q(p)\psi^2(p) + R(p)\varkappa^2(p) = 0. \tag{10}$$

В уравнениях (7)–(9) штрихом обозначено дифференцирование по независимой переменной p. Если функции $Q(p)$, $R(p)$, $\varphi(p)$, $\psi(p)$, $\varkappa(p)$ определены, то зависимость p от времени устанавливается из дифференциального уравнения (7).

2. Новое частное решение. Рассмотрим случай, когда в решении (6) $m = l = 2$, а $n = n_1 = m_1 = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} &q^2 = Q(p) = b_1p + b_0, \qquad r^2 = R(p) = c_2p^2 + c_1p + c_0, \\ &\nu_1 = \varphi(p) = a_2p^2 + a_1p + a_0, \qquad \nu_2 = \psi(p)q, \qquad \nu_3 = \varkappa(p)r, \\ &\psi(p) = g_1p + g_0, \qquad \varkappa(p) = f_1p + f_0. \end{aligned} \tag{11}$$

Подставим полиномы из (11) в уравнения (8)–(10). Требование того, чтобы полученные равенства были тождествами по p приводит к следующей системе уравнений на параметры задачи и коэффициенты решения (11):

$$\begin{aligned} &C_1 = C_2 = C_3, \qquad B_3f_1 - B_2g_1 = 0, \qquad g_1 - f_1 - 2a_2\mu_0 = 0, \\ &\mu_0 = \big(B_3f_0 - B_2g_0 + A_2 - A_3\big)A_1^{-1}, \qquad g_0 - f_0 - a_1\mu_0 = 0, \\ &f_1 - a_2 = 0, \qquad 3\mu_0b_1g_1 + 2(a_1 - f_0) = 0, \qquad 2\mu_0c_2f_1 + g_1 - a_2 = 0, \\ &\mu_0(b_1g_0 + 2g_1b_0) + 2a_0 = 0, \qquad \mu_0(c_1f_0 + 2c_0f_1) - 2a_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mu_0(2c_2f_0+3c_1f_1)+2(g_0-a_1)=0, \qquad B_1a_2-f_1B_3=0,\\
&B_1a_1-f_0B_3-f_1s_1+A_3-A_1=0,\\
&\mu_0b_1A_2-2(B_1a_0-\lambda_1-f_0s_1)=0,\\
&B_2g_1-B_1a_2=0, \qquad \mu_0c_2A_3-B_2g_0-s_1g_1+B_1a_1-A_1+A_2=0,\\
&\mu_0c_1A_3-2(g_0s_1-B_1a_0+\lambda_1)=0, \qquad a_0^2+b_0g_0^2+c_0f_0^2-1=0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Считая $A_1-A_3\neq 0$, представим решение системы (12) в виде

$$\begin{aligned}
&B_1=B_3=kB_2, \quad k=\frac{2A_2-3A_1+\sqrt{9A_1^2-4A_1A_2+4A_2^2}}{2A_1}, \quad \mu_0=\frac{k-1}{2},\\
&b_1=\frac{4s_1}{k^2(1-k)B_2}, \quad b_0=\frac{2[(k(1-k)A_1+2(k+1)A_2-2kA_3)s_1-2k^2\lambda_1B_2]s_1}{k^4(1-k)(A_3-A_1)B_2^2},\\
&C_1=C_2=C_3, \qquad c_2=-1, \qquad c_1=\frac{2(k-3)s_1}{k(1-k)B_2},\\
&c_0=\frac{[(k(1-k)(2k+3)A_1+4(k^2+1)A_2-k(k+3)A_3)s_1-4k^2\lambda_1B_2]s_1}{k^3(1-k)(A_1-A_3)B_2^2},\\
&a_2=\frac{A_1-A_3}{2s_1}, \qquad a_1=\frac{(1-k)(k+3)A_1+2kA_2+(k-3)A_3}{k(1-k)B_2}, \qquad a_0=\\
&=\frac{(k(1-k)(2k+3)A_1+2(2k-1)(k+1)A_2-k(k+3)A_3)s_1+2k^2(1-k)\lambda_1B_2}{2k^3(1-k)B_2^2},\\
&g_1=\frac{(A_1-A_3)k}{2s_1}, \qquad g_0=\frac{(1-k)(k+4)A_1+2(k+1)A_2+(k-5)A_3}{2(1-k)B_2},\\
&f_1=a_2, \qquad f_0=\frac{k[(2k+1)A_1-4A_2+A_3]+3(A_3-A_1)}{2k(k-1)B_2}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь λ_1 – корень квадратного уравнения

$$\Delta_1\lambda^2+\Delta_2\lambda+\Delta_3=0, \quad \text{а} \quad \Delta_1=2k^4(k-1)^2(A_1-A_3)B_2^2,$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2=-2k^2(k-1)s_1B_2\Big[&k(k-1)(k^2+3k+6)A_1^2+2(2k^2A_2^2-(2k^2(k+1)-\\
&-(k-1))A_1A_2-(k-1)A_2A_3+k(k-3)(A_3-2A_1)A_3)\Big],\\
\Delta_3=2k^6(k-1)^2B_2^4(A_3-A_1)+s_1^2\Big\{&k(k-1)A_1^2[k(k-1)(3k^2(k+4)+\\
&+17k+18)A_1-2(k^2(9k^2+21k+7)-3(k-2))A_2+2k(2k^2(k+4)+
\end{aligned}$$

$$+ 3(k+9))A_3] + 2A_2^2[(6k^3(3k^2+2k-3)+k(5k-2)+1)A_1-$$
$$- 4k^2(3k^2+1)A_2 + (8k^3(k+3)-(k-1)^2)A_3] + 2kA_3^2[k(k^2(2k+11)-$$
$$- 24k+27)A_1 - 2(k^2(2k+5)+4k-3)A_2 - k(k-1)(k-9)A_3]-$$
$$- 8k(2k^3(k+3)+(k-1)(k-3))A_1A_2A_3\Big\}.$$

Решение (11) при условиях (13) будет действительным, если

$$b_0 \geq 0, \qquad c_0 > 0, \qquad \Delta_2^2 \geq 4\Delta_1\Delta_3. \tag{14}$$

Зависимость p от времени устанавливаем из (7):

$$\dot{p} = \mu_0\sqrt{(b_1p+b_0)(c_2p^2+c_1p+c_0)}. \tag{15}$$

Итак, найдено новое частное решение полиномиального вида дифференциальных уравнений, описывающих задачу о движении гиростата в поле потенциальных и гироскопических сил. Полученное решение выражается через эллиптические функции времени и зависит от пяти свободных параметров: A_1, A_2, A_3, B_2, s_1.

Это решение также можно найти из уравнений, указанных в [7].

Рассмотрим численный пример решения (11), (13)–(15) уравнений (3), (4). Пусть

$$C_1 = C_2 = C_3, \qquad A_1 = \frac{2}{3}A_3, \qquad A_2 = \frac{3}{2}A_3, \qquad A_3 = a,$$
$$B_1 = B_3 = 3B_2, \qquad B_2 = b, \quad s_1 = -54\frac{b^2}{a}, \qquad \lambda_1 = -6b \qquad (a > 0, \quad b > 0).$$

Тогда из (13)–(15) имеем

$$\begin{gathered} q^2 = 12\xi p, \qquad r^2 = -p^2 + 324\xi^2, \\ \nu_1 = \frac{1}{324\xi^2}p^2 - \frac{1}{6\xi}p + 1, \qquad \nu_2 = \Big(\frac{1}{108\xi^2}p - \frac{1}{6\xi}\Big)\sqrt{12\xi p}, \\ \nu_3 = \frac{1}{324\xi^2}p\sqrt{-p^2+324\xi^2}; \end{gathered} \tag{16}$$

$$\dot{p} = \sqrt{12\xi p(-p^2+324\xi^2)}, \tag{17}$$

где $\xi = \dfrac{b}{a}$, $0 \leq p \leq 18\xi$. В этом решении остался свободный параметр ξ, который, вообще говоря, не существенный — его можно устранить переходом к безразмерным величинам.

Рассмотрим сведение задачи к квадратурам в случае (16), (17). В эллиптическом интеграле, полученном из (17) при $y = \sqrt{p}$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\Big(1 - \dfrac{y^2}{18\xi}\Big)\Big(1 + \dfrac{y^2}{18\xi}\Big)}} = 18\xi\sqrt{3\xi}(t-t_0),$$

произведем замену
$$hy = \sqrt{1-u^2}, \tag{18}$$
где $0 \le u \le 1$ и $h = \dfrac{1}{3\sqrt{2\xi}}$, тогда
$$\int\limits_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\widetilde{k}^2u^2)}} = \widetilde{h}(t-t_0), \tag{19}$$
а $\widetilde{k} = 2^{-\frac{1}{2}}$, $\widetilde{h} = -6\sqrt{3}\xi$.

Если положить $u = \sin\varphi$, $\left(\varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$, то интеграл (19) примет форму Лежандра
$$\int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\dfrac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \theta, \tag{20}$$
где $\theta = -6\sqrt{3}\xi(t-t_0)$. В результате обращения (20) получим значение для угла φ: $\varphi = \mathrm{am}\,\theta$, а $u = \mathrm{sn}\,\theta$.

Так как $y = \sqrt{p}$, то полученное значение для y из (18) дает зависимость переменной p от времени, с помощью которой из (16) можно получить выражение всех переменных от t.

1. *Зубов В.И.* Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение). – М.: Высшая школа, 1984. – 232 с.
2. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
3. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. **II**, ч. 2. – 555 с.
4. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
5. *Горр Г.В., Зыза А.В.* Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – №6. – С. 12–21.
6. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
7. *Горр Г.В., Зыза А.В.* О редукции дифференциальных уравнений в двух задачах динамики твердого тела // Тр. ИПММ НАНУ. – 2009. – **18**. – С. 29–36.

A.V. Zyza

One case of polynomial solutions of Kirchhoff–Poisson equations

The conditions of the existence of one class of polynomial solutions of Kirchhoff-Poisson equations for the problem of gyrostat movement under the influence of potential and gyroscopic forces has been studied. A new solution of the given equations has been obtained which differs from those by V.A. Steklov, N. Kovalevsky, D.N. Goriachev and their generalizations indicated by P.V. Kharlamov.

Keywords: *polynomial solutions, Kirchhoff–Poisson equations, gyrostat, invariant correlation, potential and gyroscopic forces.*

О.В. Зиза

Один випадок поліноміальних розв'язків рівнянь Кірхгофа–Пуассона

Досліджено умови існування одного класу поліноміальних розв'язків рівнянь Кірхгофа–Пуассона задачі про рух гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил. Отримано новий розв'язок даних рівнянь, який має відміну від розв'язків В.А. Стєклова, Н. Ковалевського, Д.Н. Горячева та їх узагальнень, указаних П.В. Харламовим.

Ключові слова: *поліноміальні розв'язки, рівняння Кірхгофа–Пуассона, гіростат, інваріантні співвідношення, потенціальні і гіроскопічні сили.*

Национальный ун-т, Донецк Получено 23.09.09
`3bl3a@mail.ru`