

УДК 531.38

©2011. М.П. Харламов, И.И. Харламова, Е.Г. Шведов

## БИФУРКАЦИОННЫЕ ДИАГРАММЫ НА ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЯХ ГИРОСТАТА КОВАЛЕВСКОЙ–ЯХЬЯ

Предложен новый взгляд на классификацию бифуркационных диаграмм и условия существования критических движений интегрируемой задачи о движении тяжелого гиристора при условиях типа Ковалевской (случай интегрируемости Х.М. Яхья). Построено разделяющее множество на плоскости “энергия–гиростатический момент”, классифицирующее диаграммы на изоэнергетических уровнях. Выписаны конструктивно проверяемые условия существования критических движений в терминах параметров на поверхностях, несущих листы бифуркационных диаграмм.

**Ключевые слова:** гиристор Ковалевской, случай Яхья, бифуркационные диаграммы, изоэнергетические уровни.

**1. Постановка задачи.** Случаем Ковалевской–Яхья называют задачу о движении тяжелого гиристора, главные моменты инерции которого удовлетворяют отношению 2:2:1, центр масс лежит в экваториальной плоскости, а гириростатический момент направлен по оси динамической симметрии. Подходящим выбором осей и единиц измерения уравнения движения приводятся к виду

$$\begin{aligned} 2\dot{\omega}_1 &= \omega_2(\omega_3 - \lambda), & 2\dot{\omega}_2 &= -\omega_1(\omega_3 - \lambda) - \alpha_3, & \dot{\omega}_3 &= \alpha_2, \\ \dot{\alpha}_1 &= \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2, & \dot{\alpha}_2 &= \alpha_3\omega_1 - \alpha_1\omega_3, & \dot{\alpha}_3 &= \alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\lambda \geq 0$ . Фазовое пространство  $\mathcal{P}^5 = \mathbb{R}_\omega^3 \times S_\alpha^2$  определено в  $\mathbb{R}^6$  геометрическим интегралом  $\alpha^2 = 1$ . Система (1) была проинтегрирована П.В. Харламовым на трехмерных подмногообразиях, состоящих из периодических решений и их бифуркаций [1, 2]. Х.М. Яхья указал, в дополнение к классическим интегралам энергии и площадей, новый интеграл типа Ковалевской, получив полную инволютивную систему [3]

$$\begin{aligned} H &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - \alpha_1, & L &= \omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \frac{1}{2}(\omega_3 + \lambda)\alpha_3, \\ K &= (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2)^2 + 2\lambda[(\omega_3 - \lambda)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2\omega_1\alpha_3]. \end{aligned} \quad (2)$$

Исследование множества критических точек отображения, порожденного функциями (2), начато в [4–6] и завершено в работах [7, 8]. Как оказалось, это множество исчерпывается решениями П.В. Харламова. В [7, 8] получены и уравнения бифуркационных поверхностей, т.е. связных поверхностей  $\Pi_j$  в

---

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №10-01-00043.

$\mathbb{R}^3(h, \ell, k)$ , объединение которых содержит в себе бифуркационную диаграмму  $\Sigma$  интегралов (2) как собственное подмножество<sup>1</sup>. Пересечение  $\Sigma_j = \Sigma \cap \Pi_j$  будем называть *допустимой областью* на бифуркационной поверхности  $\Pi_j$ .

В работах [9–11] исследовалась эволюция сечений  $\mathcal{S}_\ell$  множества  $\Sigma$  плоскостями  $\ell = \text{const}$ , которые с точки зрения гамильтоновой механики служат бифуркационными диаграммами приведенных систем с двумя степенями свободы, параметризованных постоянной площадью. В работе [12] указана топология регулярных интегральных многообразий для точек  $(h, \ell, k)$  из связных компонент  $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ . Все перечисленные объекты и свойства зависят от одного свободного параметра – величины гиростатического момента  $\lambda$ . В связи с этим в работе [13] исследована зависимость диаграммы  $\mathcal{S}_\ell(\lambda)$  от *двух* параметров  $(\ell, \lambda)$  и на плоскости этих параметров построено множество, при пересечении точек которого меняется тип  $\mathcal{S}_\ell(\lambda)$ . Кроме того, в [13] для нулевой постоянной площадей построено множество в плоскости  $(\lambda, h)$ , классифицирующее типы графов Фоменко на трехмерных изоэнергетических уровнях, вычислены эти графы и соответствующие неоснащенные молекулы. Описание всех графов и молекул, включая случай  $\ell \neq 0$ , приведено в работе [14]. Совокупность результатов по топологическим инвариантам случая Ковалевской–Яхья подробно изложена в [15, гл. 9]. Наиболее полное исследование бифуркационных диаграмм содержится в [16], где, в частности, в терминах некоторых вспомогательных параметров решена представляющаяся аналитически наиболее сложной задачей определения допустимых областей на бифуркационных поверхностях (см. [16, §5.3]).

Цель настоящей работы – основываясь на перечисленных результатах, построить атлас бифуркационных диаграмм двух интегралов  $G = L^2, K$  на четырехмерных изоэнергетических уровнях  $E_h(\lambda) = \{H = h\} \subset \mathcal{P}^5$ . Вводя вместо функции  $L$  ее квадрат, мы искусственно добавляем в каждую плоскую диаграмму замыкающий ее отрезок прямой  $g = 0$ . Такая постановка связана с тем, что только интеграл  $G$  имеет аналог в общем случае А.Г. Реймана–М.А. Семенова–Тян–Шанского [17]. В частности, полученные ниже результаты являются необходимым дополнением к классификации бифуркационных диаграмм на изоэнергетических уровнях (пятимерных, ввиду отсутствия симметрии) волчка и гиростата типа Ковалевской в двойном силовом поле [18–20]. Таким образом, будет решена задача классификации по параметрам  $h, \lambda$  бифуркационных диаграмм  $\Sigma_h(\lambda)$  ограничения отображения  $G \times K$  на подмногообразии  $E_h(\lambda)$ .

Понимая под *атласом* объектов полное описание классифицирующего (разделяющего) множества в пространстве параметров и возможность указания для каждой неразделяющей точки этого пространства структурно устойчивого типа самого объекта, потребуем еще наличия диалоговой компьютерной системы, которая позволяет осуществить *визуализацию и детализацию* разделяющего множества и объекта при интерактивном изменении параметров. Пример такой системы реализован для диаграмм волчка в двойном поле

---

<sup>1</sup>Здесь и далее постоянные первых интегралов обозначаются строчными буквами, соответствующими обозначениям самих интегралов как функций на фазовом пространстве.

по параметрам  $(h, \gamma)$ , где  $\gamma$  – отношение напряженностей силовых полей [21]. Здесь возникает следующая проблема. Пусть  $\Pi_j$  – одна из поверхностей, несущих диаграмму  $\Sigma(\beta)$ , где  $\beta$  – физический параметр задачи ( $\beta = \lambda$  для гиростата Ковалевской–Яхья и  $\beta = \gamma$  для волчка в двойном поле). Предположим, что уравнения для  $\Pi_j$  записаны в параметрическом виде, необходимом для построения изоэнергетических сечений, т.е.  $g, k$  выражены в зависимости от  $h$  и некоторой второй координаты  $s$ . Для построения диаграмм с помощью компьютера необходимо иметь алгоритм, позволяющий по любому  $h$  вычислить промежутки *фактического* изменения параметра  $s$  в допустимой области. Для волчка в двойном поле такой алгоритм реализован в [21] путем указания допустимых областей на бифуркационных поверхностях неравенствами, в которых  $h$  выступает в роли параметра. Для гиростата Ковалевской–Яхья эта проблема до сих пор не решена даже для диаграмм  $\mathcal{S}_\ell(\lambda)$ , что с вычислительной точки зрения равносильно нашей постановке, поскольку в параметрических уравнениях  $h$  и  $g = \ell^2$  оказываются связанными линейно. В настоящей работе получена вся необходимая информация для компьютерной визуализации диаграмм гиростата Ковалевской–Яхья.

## 2. Критическое множество и бифуркационные поверхности.

Опираясь на результаты П.Е. Рябова и И.Н. Гашененко, представим множество критических точек отображения  $J = H \times G \times K : \mathcal{P}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3(h, g, k)$  в виде трех критических подсистем – трехмерных инвариантных подмногообразий  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  в фазовом пространстве. Их образы под действием  $J$  лежат на трех бифуркационных поверхностях, уравнения которых запишем в форме, вытекающей из представления Лакса [17] при анализе особенностей возникающей алгебраической кривой. Вводя параметр  $s$  как удвоенный квадрат спектрального параметра на кривой, получим (подробности см. в работе [20] для более общего случая):

$$\Pi_1 : \begin{cases} g = (h - \frac{\lambda^2}{2} - s)s^2, \\ k = 1 + (h - \frac{\lambda^2}{2})^2 - 4(h - \frac{\lambda^2}{2})s + 3s^2, \end{cases} \quad (3)$$

$$\Pi_2, \Pi_3 : \begin{cases} g = \frac{1}{2}(h + \frac{\lambda^2}{2}) - \lambda^2 s^2 - \frac{1}{4s}, \\ k = -2\lambda^2(h - \frac{\lambda^2}{2} - 2s) - \lambda^4 + \frac{1}{4s^2}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $s \in \mathbb{R}$  для  $\Pi_1$ ,  $s < 0$  для  $\Pi_2$  и  $s > 0$  для  $\Pi_3$ . В отличие от двойного поля, поверхность  $\Pi_1$  имеет одну компоненту.

Движения на  $\mathcal{M}_1$  соответствуют решению, построенному в [1] для произвольного осесимметричного тензора инерции. Предполагая в этом решении выполненными такие же условия на физические параметры, как в системе (1), и выбирая на  $\Pi_1$  точку, заданную уравнениями (3) с параметрами  $h, s$ ,

будем иметь

$$\begin{aligned} \omega_1 &= p_0, & \omega_2 &= 0, & \omega_3 &= r, \\ \alpha_1 &= p_0^2 + \frac{1}{2}r^2 - h, & \alpha_2 &= R, & \alpha_3 &= -p_0(r - \lambda), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\dot{r} = R$  и

$$\begin{aligned} p_0^2 &= h - \frac{\lambda^2}{2} - s, \\ R^2 &= -\frac{1}{4}r^4 - (2p_0^2 - h)r^2 + 2\lambda p_0^2 r + 1 - (p_0^2 - h)^2 - p_0^2 \lambda^2. \end{aligned}$$

Движения на  $\mathcal{M}_2$  и  $\mathcal{M}_3$  описываются решением П.В. Харламова, найденным в работе [2]. При заданных  $h, s$  и  $g$ , удовлетворяющих (4), введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \mu^2 &= g + \lambda^2 s^2, & \rho^2 &= 1 - \frac{2\mu^2}{s}, & F^2 &= \frac{1}{2} \left[ \left( X + \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 + \left( \rho Y + \frac{\sqrt{g}}{s\mu} \right)^2 - 1 \right], \\ (X, Y) &= \begin{cases} (\cos \sigma, \sin \sigma), & \rho^2 \geq 0, \\ (\operatorname{ch} \sigma, i \operatorname{sh} \sigma), & \rho^2 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь  $i$  – мнимая единица,  $\sigma$  – вспомогательная переменная. Многообразия  $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{\sqrt{g}}{s} - \mu \rho Y, & \omega_2 &= -\rho \sqrt{s} F, & \omega_3 &= \lambda + 2\mu X, \\ \alpha_1 &= \frac{\lambda s}{\mu} X + \frac{\sqrt{g}}{\mu} \rho Y, & \alpha_2 &= -2\mu Y \sqrt{s} F, & \alpha_3 &= -\frac{\lambda s}{\mu} \rho Y + \frac{\sqrt{g}}{\mu} X, \end{aligned} \quad (6)$$

а динамика задана уравнением  $\dot{\sigma}^2 = \operatorname{sgn}(\rho^2) s F^2$ . При этом  $s < 0$  для  $\mathcal{M}_2$  и  $s > 0$  для  $\mathcal{M}_3$ .

**3. Бифуркационные диаграммы критических подсистем и существование движений.** Особым случаям *внутри* критических подсистем отвечают особенности поверхностей (3), (4). Геометрия этих поверхностей достаточно хорошо изучена в работах [5, 7, 8, 16]. Нам понадобятся уточнения, связанные с условиями существования критических движений. Имеется три кривые, по которым  $\Pi_1$  пересекается с объединением  $\Pi_2 \cup \Pi_3$  трансверсально. В части, принадлежащей  $\Sigma$ , обозначим их через  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  (необходимые формулы будут даны ниже). Кроме этого, поверхность  $\Pi_1$  касается  $\Pi_3$  по кривой, пересечение которой с  $\Sigma$  обозначим через  $\delta_0$ .

**Замечание 1.** Указанные кривые и возникающие на них узловые точки, будучи одними и теми же объектами в  $\mathbb{R}^3(h, g, k)$ , получают различное представление в координатах на поверхностях  $\Pi_j$ . Несмотря на это, их образы в  $(s, h)$ -плоскостях будем для наглядности обозначать одинаково.

По определению  $g \geq 0$ , поэтому в границы допустимых областей всегда входят линии пересечения  $\Pi_j$  с плоскостью  $g = 0$ . Обозначим соответствующие кривые через  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ).

Введем следующую систему обозначений. Представляя кривую  $\gamma_j \subset \Pi_j$  в соответствующей  $(s, h)$ -плоскости, рассмотрим ее уравнение  $h = h(s)$ . Если в заданных пределах изменения  $h$  решение относительно  $s$  единственно, то обозначим его через  $\xi_j(h, \lambda)$ . Если же этих решений два, то обозначим их через  $\xi_j^-(h, \lambda) < \xi_j^+(h, \lambda)$ . Каждая из кривых  $\delta_i$  может отображаться в различных  $(s, h)$ -плоскостях. Проведем сечение образа  $\delta_i$  в  $(s, h)$ -плоскости, отвечающей поверхности  $\Pi_j$ , на заданном уровне  $h$ . Если на рассматриваемой ветви кривой точка пересечения единственна, то ее  $s$ -координату обозначим через  $\eta_{ij}(h, \lambda)$ . Если же таких точек две, то их  $s$ -координаты обозначим через  $\eta_{ij}^-(h, \lambda) < \eta_{ij}^+(h, \lambda)$ .

Рассмотрим систему  $\mathcal{M}_1$  с точки зрения условий существования вещественных движений.

**Утверждение 1.** При заданных  $s, h$  вещественные решения (5) существуют тогда и только тогда, когда  $p_0^2 \geq 0$  и  $R^2(r) \geq 0$  для некоторого  $r \in \mathbb{R}$ .

Бифуркациям решений (5) отвечают точки  $(s, h)$ , в которых либо  $p_0 = 0$ , либо многочлен  $R^2(r)$  имеет кратный корень. Выбирая, следуя работе [7], этот корень в качестве параметра, на дискриминантном множестве будем иметь

$$h = \varphi_{\pm}(r) = \frac{1}{2} \left[ r(\lambda - r) \pm \frac{2r - \lambda}{r - \lambda} D \right], \quad s = \psi_{\pm}(r) = \frac{1}{2} [\lambda(r - \lambda) \pm D], \quad (7)$$

$$D = \sqrt{r^2(r - \lambda)^2 + 4} \geq 0.$$

Из предложения 1 получим следующее утверждение.

**Утверждение 2.** Бифуркационная  $(s, h)$ -диаграмма критической системы  $\mathcal{M}_1$  состоит из следующих множеств:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \quad h &= s + \frac{\lambda^2}{2}, \quad s \geq -1 - \frac{\lambda^2}{2}; \\ \delta_1 : \quad h &= \varphi_-(r), \quad s = \psi_-(r), \quad r \in [0, \lambda); \\ \delta_2 : \quad h &= \varphi_+(r), \quad s = \psi_+(r), \quad r \in (-\infty, 0]; \\ \delta_3 : \quad h &= \varphi_+(r), \quad s = \psi_+(r), \quad r \in (\lambda, +\infty). \end{aligned}$$

При этом внешними границами области существования движений служат кривые  $\gamma_1, \delta_1$  и  $\delta_3$ .

Диаграмма системы  $\mathcal{M}_1$  показана на рис. 1, а. Здесь и далее на аналогичных рисунках звездочкой отмечены связные компоненты дополнения диаграммы, не входящие в допустимую область.

Точки  $A_1, A_2$  отвечают глобальным критическим значениям энергии

$$A_{1,2} : \quad h = \mp 1, \quad \lambda \geq 0. \quad (8)$$

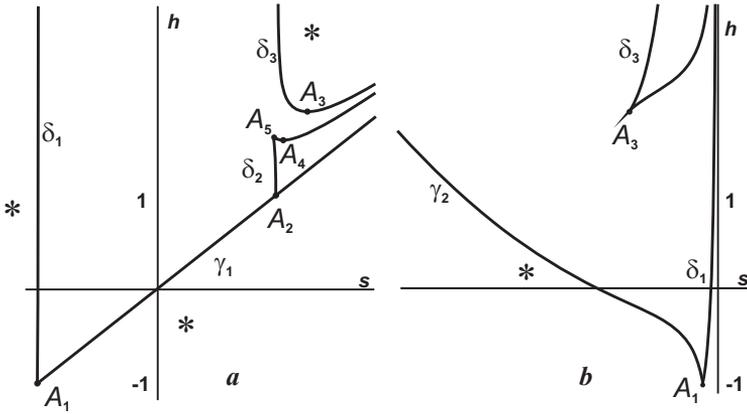


Рис. 1. Допустимые области: а) для  $M_1$ , б) для  $M_2$ .

На кривой  $\delta_1$  зависимость  $h(r)$  монотонна, поэтому для любого  $h \geq -1$  существует единственное решение

$$r_- = r_-(h, \lambda) \in [0, \lambda) \quad (9)$$

уравнения  $\varphi_-(r) = h$ . Очевидно, по принятым обозначениям,  $\eta_{11} = \psi_-(r_-)$ .

Перестройки  $h$ -сечений допустимой области происходят при прохождении величиной  $h$ , в дополнение к значениям (8), экстремумов на кривых  $\delta_2, \delta_3$ , т.е. точек, обозначенных через  $A_3 - A_5$ . Уравнение  $\varphi'_+(r) = 0$  распадается на два

$$(2r - \lambda)(r - \lambda) - D = 0, \quad (10)$$

$$r(2r - \lambda)(r - \lambda) + \lambda D = 0. \quad (11)$$

Вычисляя  $\psi'_+(r)$ , убеждаемся, что условие (10) задает экстремумы на гладких участках – точки  $A_3, A_4$ , а условие (11) определяет точку возврата  $A_5$ . Из (10) получаем уравнение

$$(r - \lambda)^3(3r - \lambda) - 4 = 0, \quad (12)$$

которое имеет ровно два корня, причем верхний всегда больше  $\lambda$ , поэтому это единственный экстремум  $h$  на  $\delta_3$  (точка  $A_3$ ), а нижний оказывается положительным лишь при  $\lambda \leq \sqrt{2}$ . В последнем случае имеем экстремум  $h$  на  $\delta_2$  (точка  $A_4$ ). Явной функции  $h(\lambda)$  в этих точках построить не удастся. Поступим следующим образом. Положим в уравнении (12)

$$x = \lambda - r. \quad (13)$$

Из (12) выразим  $\lambda(x)$ , а из (13) найдем  $r(x)$  и подставим в выражение для  $h$  на кривых  $\delta_2, \delta_3$ . Получим

$$\lambda = \frac{3x^4 - 4}{2x^3}, \quad r = \frac{x^4 - 4}{2x^3}, \quad h = \frac{3}{8}x^2 + \frac{2}{x^6},$$

где  $x \in [-\sqrt[4]{4/3}, 0)$  для  $A_3$  и  $x \in [\sqrt[4]{4/3}, \sqrt{2}]$  для  $A_4$ . Поскольку  $\lambda \geq 0$ , можно записать единую параметризацию зависимости  $h$  и  $\lambda$ , положив  $u = x^2$ :

$$A_{3,4}: \quad h_{3,4} = \frac{3}{8}u + \frac{2}{u^3}, \quad \lambda_{3,4}^2 = \frac{(3u^2 - 4)^2}{4u^3}, \quad u \in (0, 2]. \quad (14)$$

При  $h > h_3$  уравнение  $\varphi_+(r) = h$  имеет ровно два вещественных корня в области  $r \in (\lambda, +\infty)$ . Их подстановка в функцию  $\psi_+$  дает зависимости  $\eta_{31}^-(h, \lambda)$  и  $\eta_{31}^+(h, \lambda)$  на монотонных участках  $\delta_3$ . Очевидно,  $\eta_{31}^- < \eta_{31}^+ < \xi_1 = h - \lambda^2/2$ .

Уравнение (11) вместе с уравнением кривой  $\delta_2$  дает в точке возврата

$$A_5: \quad h_5 = \frac{1}{4} \left[ (4 + \lambda^{4/3})^{3/2} - \lambda^{2/3}(6 + \lambda^{4/3}) \right], \quad \lambda \geq 0. \quad (15)$$

**Утверждение 3.** Допустимая область на поверхности  $\Pi_1$  описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} h \in (-\infty, -1) &\Rightarrow s \in \emptyset; \\ h \in [-1, h_3] &\Rightarrow s \in [\eta_{11}, h - \frac{\lambda^2}{2}]; \\ h \in (h_3, +\infty) &\Rightarrow s \in [\eta_{11}, \eta_{31}^-] \cup [\eta_{31}^+, h - \frac{\lambda^2}{2}]. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что  $\eta_{11}, \eta_{31}^-, \eta_{31}^+$  — однозначно определенные и эффективно вычисляемые функции от  $h, \lambda$ .

Для систем  $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  условие  $g \geq 0$  равносильно

$$h \geq h_{\min} = \frac{1 - \lambda^2 s + 4\lambda^2 s^3}{2s}, \quad (16)$$

а из уравнений (6) следует, что  $\text{sgn}(\rho^2) = \text{sgn}(Y^2)$  и  $\text{sgn}(\rho^2) = \text{sgn}(sF^2)$ . Пусть  $Y_* = Y$ , если  $\rho$  вещественно, и  $Y_* = iY$ , если  $\rho$  чисто мнимое. Тогда в плоскости  $(X, Y_*)$  кривая  $\Gamma_0$ , заданная тождеством  $X^2 + Y^2 = 1$ , представляет собой окружность или гиперболу, в то время как кривая  $\Gamma_1$ , заданная уравнением  $F^2(X, Y) = 0$ , при всех  $\rho^2 \neq 0$  есть эллипс. Отметим также следующие из определений равенства

$$\rho^2 = \frac{h_{\tan} - h}{s}, \quad h_{\tan} = \frac{1 - \lambda^2 s + 2s^2}{2s}, \quad h_{\min} - h_{\tan} = -s(1 - 2\lambda^2 s). \quad (17)$$

Здесь  $h = h_{\tan}(s)$  — зависимость на кривой  $\delta_0$  касания поверхностей  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$ .

Из (16), (17) получаем следующее утверждение.

**Утверждение 4.** Для существования вещественных решений (6) при заданных  $s, h$  необходимо и достаточно выполнение условия (16) и следующих условий:

- 1) при  $s < 0$  окружность  $\Gamma_0$  и эллипс  $\Gamma_1$  имеют общую точку;
- 2) при  $s > 0$ ,  $\rho^2 \geq 0$  окружность  $\Gamma_0$  не лежит целиком строго внутри области, ограниченной эллипсом  $\Gamma_1$ ;
- 3) при  $s > 0$ ,  $\rho^2 < 0$  гипербола  $\Gamma_0$  и эллипс  $\Gamma_1$  имеют общую точку.

Отсюда следует, что бифуркации решений по  $s, h$  происходят в случаях касания кривых второго порядка  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ . Обозначая в точке касания  $\omega_3 = r$  (здесь это константа), получим выражения

$$h = \varphi_{\pm}(r), \quad s = \theta_{\pm}(r) = \frac{r - \lambda}{4\lambda} [r(r - \lambda) \mp D], \quad (18)$$

где  $D, \varphi_{\pm}$  определены в (7). Это совпадение не случайно, поскольку найденные значения отвечают точкам трансверсального пересечения поверхности  $\Pi_1$  с  $\Pi_2, \Pi_3$ . Выражения для  $s$  различны, так как они определяют одну из компонент нормали к соответствующей поверхности в общей точке.

Анализируя условия предложения 4 в областях, на которые полуплоскость  $s < 0$  делится кривыми (18), с учетом условия (16) приходим к следующему результату.

**Утверждение 55.** Бифуркационная  $(s, h)$ -диаграмма критической системы  $\mathcal{M}_2$  состоит из следующих множеств:

$$\begin{aligned} \gamma_2 : \quad h &= h_{\min}(s), \quad s \leq -\frac{1}{2}; \\ \delta_1 : \quad h &= \varphi_-(r), \quad s = \theta_-(r), \quad r \in [0, \lambda]; \\ \delta_3 : \quad h &= \varphi_+(r), \quad s = \theta_+(r), \quad r \in (\lambda, +\infty). \end{aligned}$$

Внешними границами области существования движений служат  $\gamma_2$  и  $\delta_1$ .

Поскольку зависимость (9) на  $\delta_1$  уже известна, получаем  $\eta_{12} = \theta_-(r_-)$ . На кривой  $\gamma_2$  имеем

$$h'_{\min}(s) = \frac{1}{2s^2}(8\lambda^2 s^3 - 1).$$

Поэтому при отрицательных  $s$  уравнение  $h = h_{\min}(s)$  имеет единственное решение  $s = \xi_2(h, \lambda)$ . Тогда из предложения 5 получим следующее утверждение.

**Утверждение 6.** Допустимая область на поверхности  $\Pi_2$  описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} h \in (-\infty, -1) &\Rightarrow s \in \emptyset; \\ h \in [-1, +\infty) &\Rightarrow s \in [\xi_2, \eta_{12}]. \end{aligned}$$

И здесь функции  $\eta_{12}(h, \lambda), \xi_2(h, \lambda)$  эффективно вычисляются.

Диаграмма системы  $\mathcal{M}_2$  показана на рис. 1, *b*. Новых разделяющих зависимостей между  $h$  и  $\lambda$  не появляется, поскольку узловые точки  $A_1$  и  $A_3$  уже учтены в системе  $\mathcal{M}_1$ .

**Замечание 2.** Отметим двойственность, типичную для случая, когда ребро возврата одной бифуркационной поверхности попадает на другую. Возникающий след в параметрах одной поверхности дает экстремум на гладкой кривой, а в параметрах другой порождает точку возврата. Здесь это видно для точки  $A_3$ , но ниже проявится и для точек  $A_4, A_5$ .

Для системы на  $\mathcal{M}_3$  к уже известным уравнениям бифуркаций решений (6) добавляется разделяющий случай  $\rho^2 = 0$ . Из последнего равенства (17) определяются значения  $s$ , при которых эта кривая лежит в области (16).

**Утверждение 7.** Бифуркационная  $(s, h)$ -диаграмма критической системы  $\mathcal{M}_3$  состоит из следующих множеств:

$$\begin{aligned} \delta_0 : h &= h_{\tan}(s), \quad 0 < s \leq \frac{1}{2\lambda^2}; \\ \delta_2 : h &= \varphi_+(r), \quad s = \theta_+(r), \quad r \in (-\infty, 0]; \\ \gamma_3 : h &= h_{\min}(s), \quad s \in I(\lambda), \end{aligned}$$

где

$$I(\lambda) = \begin{cases} (0, +\infty), & \lambda^2 \leq 8/(3\sqrt{3}), \\ (0, s_*] \cup [s^*, +\infty), & 8/(3\sqrt{3}) \leq \lambda^2 \leq 2, \\ (0, s_*] \cup [1/2, +\infty), & \lambda^2 \geq 2, \end{cases}$$

$s_*(\lambda) < s^*(\lambda)$  – абсциссы точек касания кривых  $\delta_2$  и  $\gamma_3$ , существующих при значениях  $\lambda^2 \geq 8/(3\sqrt{3})$ .

Внешними границами допустимой области служат:

- 1) кривая  $\gamma_3$  в указанных пределах;
- 2) кривая  $\delta_0$  в пределах

$$s \in \begin{cases} (0, 1/(2\lambda^{2/3})], & \lambda^2 \leq 1/(2\sqrt{2}) \\ (0, \sqrt{1 + \lambda^4} - \lambda^2], & \lambda^2 \geq 1/(2\sqrt{2}) \end{cases};$$

- 3) кривая  $\delta_2$  в пределах

$$s \in \begin{cases} [s_*, s^*], & 8/(3\sqrt{3}) \leq \lambda^2 \leq 2 \\ [s_*, 1/2], & \lambda^2 \geq 2 \end{cases}.$$

Кривая  $\delta_2$  заканчивается на кривой  $\gamma_3$  при  $r = 0, s = 1/2$ . Это – отмеченная ранее точка  $A_2$ . Уравнение для точки возврата кривой  $\delta_2$  совпадает с (10), поэтому это точка  $A_4$ . Экстремум  $h$  на  $\delta_2$  – это точка  $A_5$  (замечание 2).

Кривая  $\delta_2$  имеет с кривой  $\delta_0$  точку касания  $A_6$  при  $s = \sqrt{1 + \lambda^4} - \lambda^2, r = -\lambda$  для всех  $\lambda > 0$ . Точка их трансверсального пересечения  $A_7$ , в которой  $s = 1/(2\lambda^{2/3}), r = \lambda - 1/\sqrt[3]{\lambda}$ , существует при  $0 < \lambda \leq 1$ . Верхняя граница  $s$  на  $\delta_0$  определяется из последнего уравнения (17) точкой  $A_8$  пересечения с кривой  $\gamma_3$ . При условии  $\lambda^2 < 1/\sqrt{2}$  на кривой  $\delta_0$  реализуется минимум  $h$ , равный  $\sqrt{2} - \lambda^2/2$ . Соответствующая точка  $A_9$  лежит левее  $A_7$  при  $\lambda^2 < 1/(2\sqrt{2})$ , а при увеличении  $\lambda$  она находится правее  $A_6$  и на допустимую область уже не влияет. При проходе кривой  $\delta_0$  в сторону увеличения  $s$  точка  $A_6$  встречается раньше, чем  $A_7$ . При  $\lambda^2 = 1/(2\sqrt{2})$  они совпадают (причем сразу же и с  $A_4, A_9$ ), затем снова расходятся. Отметим еще минимум  $h$  на кривой  $\gamma_3$  (точка  $A_{10}$ ), равный  $(3\lambda^{2/3} - \lambda^2)/2$ .

На рис. 2 показаны первые три варианта бифуркационной  $(s, h)$ -диаграммы при возрастании  $\lambda$ : 1)  $0 < \lambda^2 < 1/(2\sqrt{2})$ ; 2)  $1/(2\sqrt{2}) < \lambda^2 < 1$ ; 3)  $\lambda^2 > 1$ . Проверка условий предложения 4 показывает, что движения невозможны в области, ограниченной двумя бесконечными отрезками кривых  $\delta_2$  и  $\delta_0$  до точки пересечения  $A_7$  в первом случае и до точки касания  $A_6$  при остальных  $\lambda$ . Как отмечалось, это свойство впервые доказано (в иных терминах и параметрах) в работе [16]. Обсуждаемая недопустимая область на рис. 2 указана звездочкой со стрелками.

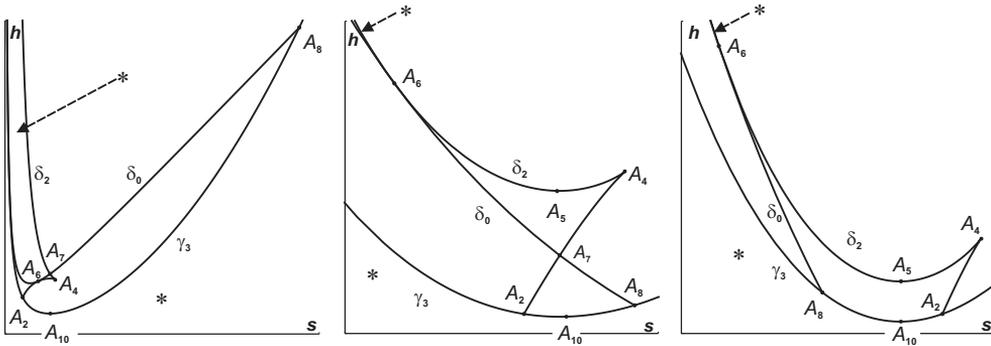


Рис. 2. Допустимая область для  $M_3$ .

**Замечание 3.** Строго говоря, пересечение кривой  $\delta_0$  не всегда сопровождается топологическими бифуркациями решений, но заведомо меняется их аналитическое представление (6). Как следует из результатов [20], эта кривая также отвечает за вырождение индуцированной симплектической структуры на соответствующем четырехмерном критическом подмногообразии фазового пространства  $TSO(3)$  нередуцированной системы.

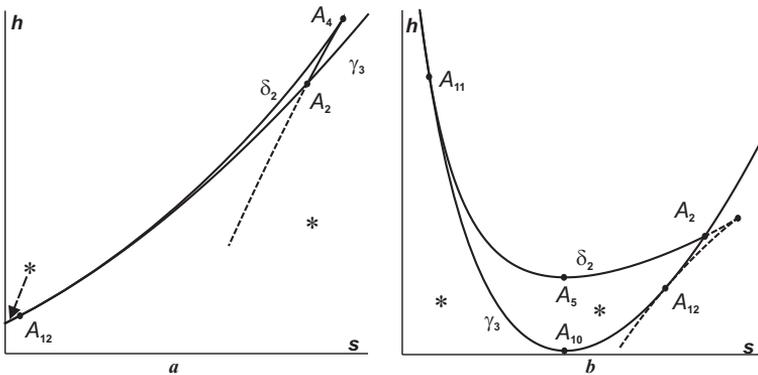


Рис. 3. Эволюция особых точек в окрестности  $\lambda^2 = 2$ .

Приведенными тремя случаями видоизменения  $(s, h)$ -диаграммы на  $M_3$

не исчерпываются. Точка возврата  $A_4$  кривой  $\delta_2$  существует лишь при  $\lambda^2 < 2$ . При  $\lambda^2 = 2$  она сливается с  $A_2$  и после этого исчезает. При  $r < 0$  имеем

$$\frac{\varphi_+(r) - h_{\min}(\theta_+(r))}{\theta_+(r)} = -\frac{\lambda r}{(r - \lambda)^2} [\lambda(r - \lambda) + D]^2 \geq 0,$$

поэтому другие возможные общие точки  $\gamma_3$  и  $\delta_2$  оказываются точками касания и подчинены уравнению

$$(\lambda - r)^3(\lambda + r) - 4 = 0. \quad (19)$$

Оно имеет вещественные корни лишь при  $\lambda^2 \geq 8/(3\sqrt{3})$ . В случае строгого неравенства таких корней два, нижний всегда отрицателен, а верхний отрицателен лишь при  $\lambda^2 < 2$ . Поэтому если  $8/(3\sqrt{3}) < \lambda^2 < 2$ , то между точками  $A_6, A_4$  кривая  $\delta_2$  имеет еще две точки касания  $A_{11}, A_{12}$  с кривой  $\gamma_3$ . Соответствующие значения  $s$  в предложении 7 обозначены через  $s_*, s^*$ . При  $\lambda^2 = 2$  точка  $A_{12}$  сливается с  $A_4$  и  $A_2$  и при  $\lambda^2 > 2$  уходит из допустимой области вместе с точкой возврата (см. рис. 3). При  $g = 0$  между точками  $A_8$  и  $A_2$  имеем  $\rho^2 = 1 - 2\lambda^2 s < 0$ , поэтому совместность уравнений (6) равносильна существованию решений системы неравенств

$$X^2 \geq 1, \quad Q(X) = 2\lambda^2 s^3(X^2 - 1) + 2sX + 1 \leq 0.$$

Между точками  $A_{11}$  и  $A_{12}$  дискриминант  $Q(X)$  отрицателен, а при  $\lambda^2 > 2$  между точками  $A_{11}$  и  $A_2$  оба корня  $Q(X)$  по модулю меньше 1. Поэтому на этих интервалах кривой  $\gamma_3$  вещественных решений не существует. Следовательно, при  $\lambda^2 > 8/(3\sqrt{3})$  нижней границей допустимой области является соответствующий участок кривой  $\delta_2$  (от  $A_{11}$  до  $A_{12}$  при  $\lambda^2 \leq 2$  и от  $A_{11}$  до  $A_2$  при  $\lambda^2 > 2$ ). Неявную зависимость  $h$  и  $\lambda$  для  $A_{11,12}$  можно параметризовать, используя для уравнения (19) замену (13).

В разделяющее множество на плоскости  $(h, \lambda)$  для атласа диаграмм  $\Sigma_h(\lambda)$ , в дополнение к найденным ранее кривым (8), (14), (15), необходимо включить кривые, отвечающие зависимостям между  $h$  и  $\lambda$  в новых особых точках:

$$\begin{aligned} A_6 : \quad h_6 &= \frac{3}{2}\sqrt{1 + \lambda^4} - \lambda^2, & \lambda &\geq 0; \\ A_7 : \quad h_7 &= -\frac{\lambda^2}{2} + \lambda^{2/3} + \frac{1}{2\lambda^{2/3}}, & 0 < \lambda &\leq 1; \\ A_8 : \quad h_8 &= \frac{1 + \lambda^4}{2\lambda^2}, & \lambda &> 0; \\ A_9 : \quad h_9 &= \sqrt{2} - \lambda^2/2, & 0 &\leq \lambda \leq \sqrt{1/(2\sqrt{2})}; \\ A_{10} : \quad h_{10} &= \frac{1}{2}(3\lambda^{2/3} - \lambda^2), & 0 &\leq \lambda \leq \sqrt{8/(3\sqrt{3})}; \\ A_{11,12} : \quad h_{11,12} &= \frac{1}{8}x^2 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^6}, & \lambda &= \frac{1}{2}x + \frac{2}{x^3}, \quad x \in [\sqrt{2}, +\infty). \end{aligned} \quad (20)$$

Для явного указания интервалов изменения  $s$  в зависимости от  $\lambda, h$  обозначим через  $\zeta^- < \zeta^+$  решения уравнения  $h = h_{\tan}(s)$  при  $h \geq h_9$

$$\zeta^\pm(h, \lambda) = \frac{1}{2} \left[ h + \frac{\lambda^2}{2} \pm \sqrt{\left( h + \frac{\lambda^2}{2} \right)^2 - 2} \right]$$

и напомним, что положительные решения уравнения  $h = h_{\min}(s)$  при  $h \geq h_{10}$  обозначаются  $\xi_3^- < \xi_3^+$ . Здесь и далее  $h_j$  определены в соответствии с (20).

При  $\lambda^2 \leq 1/(2\sqrt{2})$  на участке кривой  $\delta_2$  при  $h \geq h_7$ , а при остальных  $\lambda$  – на участке  $h \geq h_6$  имеем однозначную зависимость  $s = \eta_{23}(h, \lambda)$ . При  $\lambda^2 \geq 8/(3\sqrt{3})$  на монотонно убывающем бесконечном участке кривой  $\delta_2$  до пересечения с точкой  $A_{11}$  имеем решение  $s = \eta_{23}^-(h, \lambda)$ , а от точки  $A_{12}$  до точки  $A_2$  – решение  $s = \eta_{23}^+(h, \lambda)$ . Получаем следующее утверждение.

**Утверждение 8.** Допустимая область на поверхности  $\Pi_3$  такова: при  $0 < \lambda^2 \leq 1/(2\sqrt{2})$

$$\begin{aligned} h \in (-\infty, h_{10}) &\Rightarrow s \in \emptyset, \\ h \in [h_{10}, h_9] &\Rightarrow s \in [\xi_3^-, \xi_3^+], \\ h \in (h_9, h_7) &\Rightarrow s \in [\xi_3^-, \zeta^-] \cup [\zeta^+, \xi_3^+], \\ h \in (h_7, +\infty) &\Rightarrow s \in [\xi_3^-, \zeta^-] \cup [\eta_{23}, \xi_3^+]; \end{aligned}$$

при  $1/(2\sqrt{2}) \leq \lambda^2 \leq 8/(3\sqrt{3})$

$$\begin{aligned} h \in (-\infty, h_{10}) &\Rightarrow s \in \emptyset, \\ h \in [h_{10}, h_6] &\Rightarrow s \in [\xi_3^-, \xi_3^+], \\ h \in (h_6, +\infty) &\Rightarrow s \in [\xi_3^-, \zeta^-] \cup [\eta_{23}, \xi_3^+]; \end{aligned}$$

при  $8/(3\sqrt{3}) \leq \lambda^2 \leq 2$

$$\begin{aligned} h \in (-\infty, h_5) &\Rightarrow s \in \emptyset, \\ h \in [h_5, h_{12}] &\Rightarrow s \in [\eta_{23}^-, \eta_{23}^+], \\ h \in [h_{12}, h_{11}] &\Rightarrow s \in [\eta_{23}^-, \xi_3^+], \\ h \in [h_{11}, h_6] &\Rightarrow s \in [\xi_3^-, \xi_3^+], \\ h \in (h_6, +\infty) &\Rightarrow s \in [\xi_3^-, \zeta^-] \cup [\eta_{23}, \xi_3^+]; \end{aligned}$$

при  $\lambda^2 \geq 2$

$$\begin{aligned} h \in (-\infty, h_5) &\Rightarrow s \in \emptyset, \\ h \in [h_5, h_2] &\Rightarrow s \in [\eta_{23}^-, \eta_{23}^+], \\ h \in [h_2, h_{11}] &\Rightarrow s \in [\eta_{23}^-, \xi_3^+], \\ h \in [h_{11}, h_6] &\Rightarrow s \in [\xi_3^-, \xi_3^+], \\ h \in (h_6, +\infty) &\Rightarrow s \in [\xi_3^-, \zeta^-] \cup [\eta_{23}, \xi_3^+]. \end{aligned}$$

Для пороговых значений  $\lambda$ , естественно, можно пользоваться любым из двух подходящих представлений.

Таким образом, представлена вся информация по классификации бифуркационных диаграмм на изоэнергетических уровнях гиристора Ковалевской–Яхья. Разделяющее множество  $\mathcal{C}$  на плоскости  $(h, \lambda)$  задано уравнениями (8), (14), (15), (20). Отметим, что пересечение  $\mathcal{C}$  с осью  $\lambda = 0$  дает значения  $h = -1, 0, 1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{3}, 2$ , классифицирующие изоэнергетические диаграммы классического волчка Ковалевской (см., например, предельный случай в [19]).

Программы символьных вычислений позволяют вывести на экран компьютера множество  $\mathcal{C}$  и, выбирая интерактивно точку в какой-либо из областей, получить при необходимости детализацию окрестности этой точки. Позиционируя окончательное значение пары параметров  $(h, \lambda)$  в более мелком масштабе, согласно предложениям 3, 6, 8 строим диаграмму  $\Sigma_h(\lambda)$  по формулам (4), (3) с уже вполне определенными промежутками изменения параметра  $s$ . В результате получаем компьютерную систему, реализующую построение искомого электронного атласа.

1. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Изд-во НГУ. – 1965. – 221 с.
2. Харламов П.В. Один случай интегрируемости уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 1971. – № 3. – С. 57-64.
3. Yehia H. New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // Mech. Res. Commun. – 1986. – **13**, 3. – P. 169-172.
4. Гашененко И.Н. Новый класс движений тяжелого гиристора // Докл. АН СССР. – 1991. – **318**, 1. – С. 66-68.
5. Рябов П.Е. Некоторые случаи вырождения переменных в одной задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки // Деп. в ВИНТИ. – 1991. – № 3660-В91. – 9 с.
6. Гашененко И.Н. Один случай интегрируемости уравнений движения гиристора // Механика твердого тела. – 1992. – № 24. – С. 1-4.
7. Гашененко И.Н. Бифуркационное множество задачи о движении гиристора, подчиненного условиям Ковалевской // Там же. – 1995. – № 27. – С. 31-35.
8. Рябов П.Е. О вычислении бифуркационного множества в случае Ковалевской–Яхья // Механика твердого тела. – 1995. – № 27. – С. 36-40.
9. Рябов П.Е. Перестройки бифуркационного множества в обобщенной задаче С.В. Ковалевской // Деп. в ВИНТИ. – 1996. – № 884-В96. – 7 с.
10. Рябов П.Е. Об одном свойстве бифуркационных кривых // Деп. в ВИНТИ. – 1996. – № 1954-В96. – 16 с.
11. Рябов П.Е. Бифуркационные множества в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестн. ВолГУ. – 1996. – № 1. – С. 41-49.
12. Гашененко И.Н. Бифуркационное множество в задаче о движении тяжелого гиристора при Ковалевской // Докл. НАН Украины. – 1997. – № 2. – С. 60-62.
13. Рябов П.Е., Харламов М.П. Бифуркации первых интегралов в случае Ковалевской–Яхья // Регулярная и хаотическая динамика. – 1997. – **2**, 2. – С. 25-40.
14. Гашененко И.Н. Интегральные многообразия и топологические инварианты одного случая движения гиристора // Механика твердого тела. – 1997. – № 29. – С. 1-7.
15. Гашененко И.Н. Инвариантные многообразия и множества допустимых скоростей в динамике твердого тела // Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. – Донецк, ИПММ НАНУ. – 2008. – 300 с.

16. *Рябов П.Е.* Бифуркационное множество задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Ковалевской-Яхья // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Москва, МГУ. – 1997. – 143 с.
17. *Рейман А.Г., Семенов-Тянь-Шанский М.А.* Лаксово представление со спектральным параметром для волчка Ковалевской и его обобщений // Функц. анализ и его приложения. – 1988. – **22**, № 2. – С. 87-88.
18. *Харламов М.П.* Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2004. – № 34. – С. 47-58.
19. *Харламов М.П., Шведов Е.Г.* Бифуркационные диаграммы на изоэнергетических уровнях волчка Ковалевской в двойном поле // Там же. – С. 59-65.
20. *Харламов М.П.* Критические подсистемы гиростата Ковалевской в двух постоянных полях // Нелинейная динамика. – 2007. – **3**, 3. – С. 331-348.
21. *Харламов М.П.* Области существования критических движений обобщенного волчка Ковалевской и бифуркационные диаграммы // Механика твердого тела. – 2006. – № 36. – С. 13-22.

**M.P. Kharlamov, I.I. Kharlamova, E.G. Shvedov**

### **Bifurcation diagrams on iso-energetic levels of the Kowalevski–Yehia gyrostat**

We consider the problem of motion of the heavy gyrostat in the case of Kowalevski–Yehia. To classify the bifurcation diagrams on iso-energetic levels we establish the existence of motion conditions in terms of parameters on the bifurcation surfaces. Obtaining these conditions in the form of explicit inequalities we build the separating set in the “energy-gyrostatic momentum” plane. Thus the electronic atlas of iso-energetic diagrams is created.

**Keywords:** *Kowalevski gyrostat, Yehia case, iso-energetic bifurcation diagrams.*

**М.П. Харламов, И.И. Харламова, Е.Г. Шведов**

### **Біфуркаційні діаграми на ізоенергетичних рівнях гіростата Ковалевської–Яхья**

Запропоновано новий погляд на класифікацію біфуркаційних діаграм і умови існування критичних рухів інтегрованої задачі про рух важкого гіростата при умовах типу Ковалевської (випадок інтегровності Х.М. Яхья). Побудовано поділяючу множину на площині “енергія – гіростатичний момент”, що класифікує діаграми на ізоенергетичних рівнях. Виписано умови, які перевіряються конструктивно, існування критичних рухів у термінах параметрів на поверхнях, що несуть листи біфуркаційних діаграм.

**Ключові слова:** *гіростат Ковалевської, випадок Яхья, біфуркаційні діаграми, ізоенергетичні рівні.*

Волгоградская академия гос. службы,  
Волгоградский техн. ун-т, Россия

mharlamov@vags.ru

Получено 01.07.2010