

УДК 531.38

©2010. И.Н. Гашененко

ВОЗМУЩЕННЫЕ МАЯТНИКОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Исследованы возмущенные маятниковые движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Введены канонические переменные, упрощающие анализ гомоклинических и гетероклинических траекторий. Изучены характерные свойства возмущенных движений тела в неподвижном пространстве. Дано качественное описание асимптотически маятниковых движений в окрестности расщепленных сепаратрис.

Ключевые слова: твердое тело, расщепление сепаратрис, интеграл Мельникова, гетероклинический цикл, возмущенное движение Пуансо.

Введение. Дифференциальные уравнения движения, отнесенные к главным осям инерции твердого тела в его неподвижной точке, имеют вид

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \mu(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}), \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость, $\mathbf{M} = A\boldsymbol{\omega}$ – кинетический момент вращающегося тела, $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции, $\boldsymbol{\gamma}$ – орт вертикали, направленный вверх, \mathbf{r} – орт радиус-вектора центра тяжести тела, μ – произведение веса тела на расстояние центра тяжести от неподвижной точки.

Будем изучать движение тела, распределение масс которого удовлетворяет условиям

$$A_1 > A_3 > A_2, \quad r_1 \geq 0, \quad r_2 \geq 0, \quad r_3 = 0, \quad \mu \ll 1. \quad (2)$$

Если выполнены условия (2) и начальными значениями переменных выбраны $\omega_1 = \omega_2 = \gamma_3 = 0$, то тело вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси как физический маятник:

$$\begin{aligned} M_1 = M_2 = \gamma_3 = 0, \quad M_3 = \pm \sqrt{2A_3(h_0 + \mu)} \operatorname{dn}\tau, \\ \gamma_1 = r_1[2 \operatorname{sn}^2\tau - 1] \mp 2r_2 \operatorname{sn}\tau \operatorname{cn}\tau, \quad \gamma_2 = r_2[2 \operatorname{sn}^2\tau - 1] \pm 2r_1 \operatorname{sn}\tau \operatorname{cn}\tau, \\ \tau = (t - t_0)\sqrt{(h_0 + \mu)/(2A_3)}, \quad k = \sqrt{2\mu/(h_0 + \mu)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где определяемая начальными условиями константа энергии $h_0 > \mu$.

Для изучения движений твердого тела в окрестности интегрируемого случая Эйлера успешно применяются канонические переменные Андуайе–Депри [1–3]. Будем использовать обозначения: G – модуль вектора кинетического момента \mathbf{M} , L – проекция вектора \mathbf{M} на подвижную ось Oz , H – проекция вектора \mathbf{M} на направленную вверх вертикаль; сопряженные с G, L, H переменные g, l, h являются углами, изменяющимися по модулю 2π . Зависимость

фазовых переменных от переменных Андуайе–Депри выражается формулами

$$M_1 = \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \quad M_2 = \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \quad M_3 = L, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (\sin q \cos p + \sin p \cos q \cos g) \sin l + \cos q \sin g \cos l, \\ \gamma_2 &= (\sin q \cos p + \sin p \cos q \cos g) \cos l - \cos q \sin g \sin l, \\ \gamma_3 &= \sin q \sin p - \cos p \cos q \cos g, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\sin p = L/G$, $\sin q = H/G$. Формулы обратного преобразования таковы:

$$\begin{aligned} G &= |\mathbf{M}|, \quad g = \arcsin \left(\frac{(M_2 \gamma_1 - M_1 \gamma_2) |\mathbf{M}|}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2} |\mathbf{M} \times \boldsymbol{\gamma}|} \right), \\ L &= M_3, \quad l = \arctg(M_1/M_2), \quad H = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\gamma}. \end{aligned} \quad (6)$$

Введем новые параметры $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, характеризующие распределение масс:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 2 \arctg \left(\frac{\sqrt{A_1(A_3 - A_2)}}{\sqrt{A_2(A_1 - A_3)}} \right), \quad \beta_0 = 2 \arctg \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \in [0, \pi], \\ \gamma_0 &= 2 \arctg \left(\frac{\sqrt{A_3 - A_2}}{\sqrt{A_1 - A_3}} \right), \quad \text{где } \pi > \alpha_0 > \gamma_0 > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда из (7) находим соотношения

$$A_1 = A_3 \frac{\sin^2 \frac{\alpha_0}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma_0}{2}}, \quad A_2 = A_3 \frac{\cos^2 \frac{\alpha_0}{2}}{\cos^2 \frac{\gamma_0}{2}}, \quad r_1 = \cos \frac{\beta_0}{2}, \quad r_2 = \sin \frac{\beta_0}{2}.$$

Если $\alpha_0 = \beta_0$, то распределение масс твердого тела удовлетворяет условиям Гесса (центр масс принадлежит нормали, проведенной из неподвижной точки к плоскости кругового сечения гирационного эллипсоида). Если $\gamma_0 = \beta_0$, то распределение масс тела удовлетворяет условиям Гриоли (центр масс принадлежит нормали, проведенной из неподвижной точки к плоскости кругового сечения эллипсоида инерции). Кроме того, из неравенства треугольника $A_2 + A_3 > A_1$ находим дополнительное ограничение на параметры:

$$\cos \frac{\alpha_0}{2} > \cos^2 \frac{\gamma_0}{2}.$$

С учетом (4), (5) гамильтониан механической системы примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_* &= \frac{1}{2} [(G^2 - L^2)(A_1^{-1} \sin^2 l + A_2^{-1} \cos^2 l) + A_3^{-1} L^2] + \\ &+ \mu [\sin q \cos p \sin(l + \beta_0/2) + \cos q \sin p \sin(l + \beta_0/2) \cos g + \\ &+ \cos q \cos(l + \beta_0/2) \sin g]. \end{aligned} \quad (8)$$

Мы изменили порядок следования главных осей инерции в подвижном базисе $Oxyz$, потому введенные здесь канонические переменные G, L, H, g, l, h отличаются от стандартных переменных, использованных в работах [1–5]. На траекториях вращений тела вокруг средней оси инерции канонические переменные (6) вырождаются. Далее будет показано, что такие переменные упрощают исследование возмущенных маятниковых движений.

При условиях (2) вращения (3), как известно, неустойчивы. В связи с этим изучение характерных свойств возмущенных движений тела в неподвижном пространстве представляет особый интерес и определяет основную цель данной работы.

1. Новые канонические переменные. С помощью производящей функции

$$S_2 = (2l + \beta_0)J_1 + (g - l - \beta_0/2)J_2 + hJ_3$$

найдем соотношения

$$\begin{aligned} L = \frac{\partial S_2}{\partial l} &\equiv 2J_1 - J_2, & G = \frac{\partial S_2}{\partial g} &\equiv J_2, & H = \frac{\partial S_2}{\partial h} &\equiv J_3, \\ \theta_1 = \frac{\partial S_2}{\partial J_1} &\equiv 2l + \beta_0, & \theta_2 = \frac{\partial S_2}{\partial J_2} &\equiv g - l - \beta_0/2, & \theta_3 = \frac{\partial S_2}{\partial J_3} &\equiv h, \end{aligned} \quad (9)$$

которые задают каноническое преобразование к переменным (J_i, θ_i) , $i = \overline{1, 3}$. Тогда из (9) следуют выражения

$$l = \frac{\theta_1 - \beta_0}{2}, \quad g = \frac{1}{2}\theta_1 + \theta_2, \quad h = \theta_3, \quad J_1 = \frac{G + L}{2}, \quad J_2 = G, \quad J_3 = H.$$

Введем безразмерные переменные $J'_i = J_i \sqrt{(A_1 - A_2)/(A_1 A_2)}$, $i = \overline{1, 3}$, и время $t' = t \sqrt{(A_1 - A_2)/(A_1 A_2)}$. Для сокращения записи штрихи у безразмерных переменных опустим.

В новых переменных гамильтониан (8) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} = & J_1(J_2 - J_1) [\cos(\theta_1 - \beta_0) - \cos \alpha_0] + \frac{1}{2} \varkappa J_2^2 + \\ & + \mu [J_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + (J_2 - J_1) \sin \theta_2] \frac{\sqrt{J_2^2 - J_3^2}}{J_2^2} + \\ & + 2\mu \frac{J_3 \sqrt{J_1(J_2 - J_1)}}{J_2^2} \sin \frac{\theta_1}{2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\varkappa = \frac{A_1 A_2}{A_3(A_1 - A_2)} \equiv \frac{\sin^2 \alpha_0}{2(\cos \gamma_0 - \cos \alpha_0)} > 0.$$

На уровне $J_3 = 0$ гамильтониан (10) примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{\varkappa}{2} J_2^2 + J_1(J_2 - J_1) [\cos(\theta_1 - \beta_0) - \cos \alpha_0] + \\ & + \frac{\mu}{J_2} [J_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) + (J_2 - J_1) \sin \theta_2], \end{aligned} \quad (11)$$

Далее будем считать, что угол θ_2 изменяется по модулю 2π , а изменение переменных $J_{1,2}$ ограничено неравенствами $J_2 > 0$, $J_2 \geq J_1 \geq 0$.

На уровне $J_3 = 0$ дифференциальными уравнениями движения твердого тела в новых координатах являются уравнения Гамильтона

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i}, \quad \dot{J}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2,$$

запишем их в явном виде:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= (J_2 - 2J_1) [\cos(\theta_1 - \beta_0) - \cos \alpha_0] + \frac{\mu}{J_2} [\sin(\theta_1 + \theta_2) - \sin \theta_2], \\ \dot{J}_1 &= J_1(J_2 - J_1) \sin(\theta_1 - \beta_0) - \mu \frac{J_1}{J_2} \cos(\theta_1 + \theta_2), \\ \dot{\theta}_2 &= \varkappa J_2 + J_1 [\cos(\theta_1 - \beta_0) - \cos \alpha_0] - \mu \frac{J_1}{J_2^2} [\sin(\theta_1 + \theta_2) - \sin \theta_2], \\ \dot{J}_2 &= -\frac{\mu}{J_2} [J_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + (J_2 - J_1) \cos \theta_2]. \end{aligned} \tag{12}$$

Если известно решение системы (12), то циклическую координату θ_3 найдем квадратурой из уравнения

$$\dot{\theta}_3 = 2\mu \frac{\sqrt{J_1(J_2 - J_1)}}{J_2^2} \sin \frac{\theta_1}{2}. \tag{13}$$

2. Частные решения гамильтоновой системы (12). Для малых значений параметра μ модуль кинетического момента $|\mathbf{M}| = J_2(t)$ будет оставаться в малой окрестности своего начального значения $J_2^0 = J_2(t_0)$. Рассмотрим точные решения системы уравнений (12), которые соответствуют уровням энергии, близким к $h_0 = \varkappa J_2^2(t_0)/2 > \mu$.

а) Решения невозмущенной системы. При $\mu = 0$ имеем невозмущенную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= (J_2 - 2J_1) [\cos(\theta_1 - \beta_0) - \cos \alpha_0], \\ \dot{\theta}_2 &= \varkappa J_2 + J_1 [\cos(\theta_1 - \beta_0) - \cos \alpha_0], \\ \dot{J}_1 &= J_1(J_2 - J_1) \sin(\theta_1 - \beta_0), \quad \dot{J}_2 = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Эта система интегрируема – она описывает движение твердого тела в интегрируемом случае Эйлера. Общее решение системы (14) может быть выписано через тэта-функции в комбинации с элементарными функциями времени. Используемые далее невозмущенные сепаратрисы соответствуют двоякоасимптотическим решениям системы (14):

$$\begin{aligned} 1) \quad \theta_1 &= \beta_0 - \alpha_0, \quad J_1 = J_2^0 / \left(e^{u(t-t_0)+v} + 1 \right), \\ \theta_2 &= \varkappa J_2^0(t - t_0) + \theta_2^0, \quad J_2 = J_2^0; \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} 2) \theta_1 &= \alpha_0 + \beta_0, \quad J_1 = J_2^0 / \left(e^{-u(t-t_0)+v} + 1 \right), \\ \theta_2 &= \varkappa J_2^0 (t - t_0) + \theta_2^0, \quad J_2 = J_2^0; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 3) \theta_1 &= \beta_0 - \alpha_0 + 2\pi, \quad J_1 = J_2^0 / \left(e^{u(t-t_0)+v} + 1 \right), \\ \theta_2 &= \varkappa J_2^0 (t - t_0) + \theta_2^0, \quad J_2 = J_2^0; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 4) \theta_1 &= \alpha_0 + \beta_0 + 2\pi, \quad J_1 = J_2^0 / \left(e^{-u(t-t_0)+v} + 1 \right), \\ \theta_2 &= \varkappa J_2^0 (t - t_0) + \theta_2^0, \quad J_2 = J_2^0, \end{aligned} \quad (18)$$

где θ_i^0, J_i^0 – начальные значения переменных при $t = t_0$, постоянные параметры обозначены через

$$u = J_2^0 \sin \alpha_0 > 0, \quad v = \ln \frac{(J_2^0 - J_1^0)}{J_1^0} \in (-\infty, \infty).$$

В предельных случаях из соотношений (15)–(18) следуют равенства:

- | | |
|---|--|
| 1) $\theta_1 = \beta_0 - \alpha_0, \quad J_1 = 0;$ | 1*) $\theta_1 = \beta_0 - \alpha_0, \quad J_1 = J_2;$ |
| 2) $\theta_1 = \beta_0 + \alpha_0, \quad J_1 = 0;$ | 2*) $\theta_1 = \beta_0 + \alpha_0, \quad J_1 = J_2;$ |
| 3) $\theta_1 = \beta_0 - \alpha_0 + 2\pi, \quad J_1 = 0;$ | 3*) $\theta_1 = \beta_0 - \alpha_0 + 2\pi, \quad J_1 = J_2;$ |
| 4) $\theta_1 = \beta_0 + \alpha_0 + 2\pi, \quad J_1 = 0;$ | 4*) $\theta_1 = \beta_0 + \alpha_0 + 2\pi, \quad J_1 = J_2.$ |

На рис. 1 для значений $A_1 = 2, A_2 = 1, A_3 = 1.5$ изображены фазовые траектории невозмущенной системы уравнений (14) на сфере $|\mathbf{M}|^2 = \text{const}$ и на плоскости $\mathbb{R}^2(\theta_1, J_1/J_2)$. Сепаратриса, состоящая из двух пересекающихся окружностей на рис. 1, а, преобразуется в вертикальные отрезки на рис. 1, б.

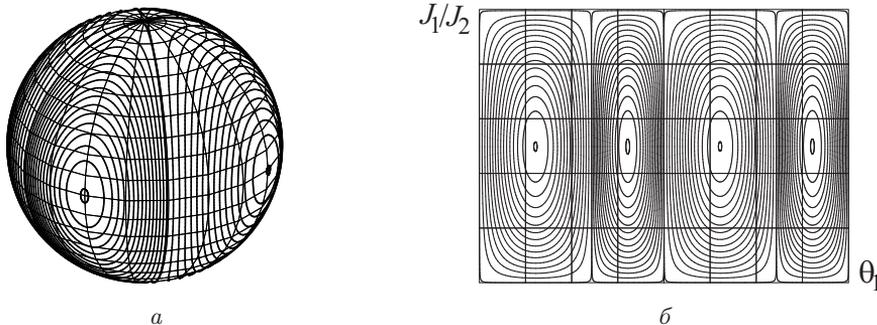


Рис. 1. Фазовые траектории случая Эйлера:

а) на сфере $|\mathbf{M}|^2 = \text{const}$, б) на плоскости $\mathbb{R}^2(\theta_1, J_1/J_2)$.

б) *Физический маятник.* Маятниковые вращения твердого тела выражаются в эллиптических функциях времени:

$$\begin{aligned} 1) J_1 = 0, \quad J_2 = \sqrt{2(h_0 + \mu)/\varkappa} \operatorname{dn} \tau, \quad \sin \theta_2 = 2\operatorname{sn}^2 \tau - 1, \\ 2) J_1 = J_2, \quad J_2 = \sqrt{2(h_0 + \mu)/\varkappa} \operatorname{dn} \tau, \quad \sin(\theta_1 + \theta_2) = 2\operatorname{sn}^2 \tau - 1, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\tau = (t - t_0)\sqrt{(h_0 + \mu)\varkappa/2}$, $k = \sqrt{2\mu/(h_0 + \mu)}$.

Из соотношений (4),(9) следует, что значение угла θ_1 не определено для $J_1 = 0$ и $J_1 = J_2$. Это вырождение не существенно, так как положение и скорость маятника, соответствующего приведенным равенствам, однозначно определяются меньшим числом фазовых переменных.

Если $J_1 = o(\mu)$, то с помощью интеграла (11) исключим J_2 из первого и третьего уравнений (12). Далее заменой переменных $y = \operatorname{ctg}(\theta_1/2)$, $\tau = \theta_2$ получим дифференциальное уравнение Риккати

$$y' + a_0 y^2 + a_1(\tau)y + a_2(\tau) = 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{2\varkappa}(\cos \beta_0 - \cos \alpha_0), \quad a_1(\tau) = \frac{1}{\varkappa} \sin \beta_0 + \frac{\mu \cos \tau}{2(h - \mu \sin \tau)}, \\ a_2(\tau) = -\frac{1}{2\varkappa}(\cos \alpha_0 + \cos \beta_0) - \frac{\mu \sin \tau}{2(h - \mu \sin \tau)}. \end{aligned}$$

Если $J_2 - J_1 = o(\mu)$, то аналогичное (20) уравнение Риккати получим в результате замены $y = \operatorname{ctg}(\theta_1/2)$, $\tau = \theta_1 + \theta_2$. Найденная зависимость $y(\tau)$ позволяет изучить $\theta_1(\theta_2)$ в сколь угодно малой окрестности маятниковых движений. Аналитическое исследование уравнений в вариациях, выписанных для маятниковых движений тела, и анализ простейших случаев их интегрируемости представлены в работе [6].

Малые возмущения точных решений, рассмотренных в случаях а), б), приводят к появлению семейств асимптотических решений на уровнях энергии, близких к $h_0 = \varkappa J_2^2(t_0)/2 > \mu$. Приведем формулы, в первом приближении описывающие асимптотические решения уравнений (12).

в) *Решения, близкие к маятниковым.* Получим приближенные формулы для малых значений μ . Обозначим $\theta_2^*(t) = \varkappa J_2^0(t - t_0) + \theta_2^0$. Периодическими решениями системы (12) являются

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1: \quad \theta_1 = \beta_0 + \varepsilon \alpha_0 + \mu(d_{11} \sin \theta_2^* + d_{12} \cos \theta_2^*), \quad J_1 = o(\mu), \\ \theta_2 = \theta_2^* + \frac{\mu}{\varkappa(J_2^0)^2} \cos \theta_2^*, \quad J_2 = J_2^0 - \frac{\mu}{\varkappa J_2^0} \sin \theta_2^*; \\ \tilde{T}_2: \quad \theta_1 = \beta_0 + \varepsilon \alpha_0 + \mu(d_{21} \sin \theta_2^* + d_{22} \cos \theta_2^*), \\ J_1 = J_2 = J_2^0 - \frac{\mu}{\varkappa J_2^0} \sin(\beta_0 + \varepsilon \alpha_0 + \theta_2^*), \\ \theta_2 = \theta_2^* - \mu(d_{21} \sin \theta_2^* + d_{22} \cos \theta_2^*) + \frac{\mu}{\varkappa(J_2^0)^2} \cos \theta_2^*, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\varepsilon = \pm 1$ и коэффициенты d_{ij} имеют вид

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{\varkappa \sin(\beta_0 + \varepsilon\alpha_0) + \varepsilon \sin \alpha_0 [\cos(\beta_0 + \varepsilon\alpha_0) - 1]}{(J_2^0)^2 (\varkappa^2 + \sin^2 \alpha_0)}, \\ d_{12} &= \frac{\varkappa [1 - \cos(\beta_0 + \varepsilon\alpha_0)] + \varepsilon \sin \alpha_0 \sin(\beta_0 + \varepsilon\alpha_0)}{(J_2^0)^2 (\varkappa^2 + \sin^2 \alpha_0)}, \\ d_{21} &= \frac{\varkappa \sin(\beta_0 + \varepsilon\alpha_0) - \varepsilon \sin \alpha_0 [\cos(\beta_0 + \varepsilon\alpha_0) - 1]}{(J_2^0)^2 (\varkappa^2 + \sin^2 \alpha_0)}, \\ d_{22} &= \frac{\varkappa [1 - \cos(\beta_0 + \varepsilon\alpha_0)] - \varepsilon \sin \alpha_0 \sin(\beta_0 + \varepsilon\alpha_0)}{(J_2^0)^2 (\varkappa^2 + \sin^2 \alpha_0)}. \end{aligned}$$

Решения системы (12), соответствующие асимптотически маятниковым движениям, неограниченно приближаются к предельным циклам \tilde{T}_1, \tilde{T}_2 , при этом переменная θ_1 колеблется в интервале $[\beta_0 + \varepsilon\alpha_0 - \Delta_1, \beta_0 + \varepsilon\alpha_0 + \Delta_1]$, где

$$\Delta_1 = \mu \sqrt{d_{11}^2 + d_{12}^2} \equiv \mu \sqrt{d_{21}^2 + d_{22}^2}.$$

В результате вычислений находим

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\mu \sin \alpha_0 \sin \frac{1}{2} |\beta_0 + \varepsilon\alpha_0|}{\sqrt{\sin^2 \alpha_0 + 16 \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha_0 + \gamma_0) \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha_0 - \gamma_0) h_0}} = \\ &= \frac{\mu \left| r_1 A_1 \sqrt{A_2(A_3 - A_2)} + \varepsilon r_2 A_2 \sqrt{A_1(A_1 - A_3)} \right|}{\sqrt{A_3(A_1 - A_2)(4A_1A_3 + 4A_2A_3 - 3A_1A_2 - 4A_3^2) h_0}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Те же рассуждения можно применить и к предельным циклам, полученным из (21) заменой $\beta_0 + \varepsilon\alpha_0$ на $\beta_0 + \varepsilon\alpha_0 + 2\pi$.

2) *Возмущенные сепаратрисы.* В качестве примера рассмотрим один из возможных случаев. Для этого положим в окрестности сепаратрисы (16)

$$\theta_1 = \alpha_0 + \beta_0 + \delta\theta_1, \quad J_1 = J_1^*(t) + \delta J_1, \quad \theta_2 = \theta_2^*(t) + \delta\theta_2, \quad J_2 = J_2^0 + \delta J_2.$$

где функции $J_1^*(t), \theta_2^*(t)$ определены формулами (16). Линеаризованные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned} \delta\dot{\theta}_1 &= (2J_1^* - J_2^0) \sin \alpha_0 \delta\theta_1 + \frac{\mu}{J_2^0} [\sin(\alpha_0 + \beta_0 + \theta_2^*) - \sin \theta_2^*], \\ \delta\dot{J}_1 &= (J_2^0 - 2J_1^*) \sin \alpha_0 \delta J_1 + J_1^* (J_2^0 - J_1^*) \cos \alpha_0 \delta\theta_1 + \\ &\quad + J_1^* \sin \alpha_0 \delta J_2 - \mu \frac{J_1^*}{J_2^0} \cos(\alpha_0 + \beta_0 + \theta_2^*), \\ \delta\dot{\theta}_2 &= \varkappa \delta J_2 - J_1^* \sin \alpha_0 \delta\theta_1 + \mu \frac{J_1^*}{(J_2^0)^2} [\sin \theta_2^* - \sin(\alpha_0 + \beta_0 + \theta_2^*)], \\ \delta\dot{J}_2 &= -\mu \cos \theta_2^* + \mu \frac{J_1^*}{J_2^0} [\cos \theta_2^* - \cos(\alpha_0 + \beta_0 + \theta_2^*)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнения (23) допускают первый интеграл, зависящий от $\delta\theta_1, \delta J_2$:

$$J = J_1^*(J_1^* - J_2^0) \sin \alpha_0 \delta\theta_1 + \varkappa J_2^0 \delta J_2 + \mu \sin \theta_2^* + \mu \frac{J_1^*}{J_2^0} [\sin(\alpha_0 + \beta_0 + \theta_2^*) - \sin \theta_2^*].$$

Интегрирование дифференциальных уравнений (23) сводится к квадратурам. В частности, из первого уравнения находим малое смещение величины θ_1 , вычисляемой вдоль возмущенной сепаратрисы, от исходного (невозмущенного) значения $\theta_1^0 = \alpha_0 + \beta_0$:

$$\begin{aligned} \delta\theta_1(t) &= \frac{J_1^0(J_2^0 - J_1^0)}{J_1^*(J_2^0 - J_1^*)} \delta\theta_1(t_0) + \frac{2\mu \sin \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0)}{J_2^0 J_1^*(J_2^0 - J_1^*)} \times \\ &\quad \times \int_{t_0}^t J_1^*(J_2^0 - J_1^*) \cos(\theta_2^* + \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0)) dt = \\ &= \frac{(e^{u(t-t_0)} + e^v)^2}{e^{u(t-t_0)}(e^v + 1)^2} \delta\theta_1(t_0) + 2\mu \sin \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \frac{(e^{u(t-t_0)} + e^v)^2}{J_2^0 e^{u(t-t_0)}} \times \\ &\quad \times \int_0^{t-t_0} \frac{e^{u\tau}}{(e^{u\tau} + e^v)^2} \cos(\varkappa J_2^0 \tau + \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0) + \theta_2^0) d\tau. \end{aligned} \quad (24)$$

3. Интеграл Мельникова. В соответствии с обозначениями [2, 3] запишем функцию Гамильтона (11) в виде суммы $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mu \mathcal{H}_1$. Пересечения родственных ветвей расщепленной сепаратрисы системы (12) исследуем с помощью интеграла Мельникова [7]

$$\begin{aligned} I_M(\tilde{\theta}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mathcal{H}_0, \frac{\mathcal{H}_1}{\varkappa J_2^0} \right\} (J_1^*, \theta_1^0, J_2^0, \theta_2^* + \tilde{\theta}) dt, \\ \left\{ \mathcal{H}_0, \frac{\mathcal{H}_1}{\varkappa J_2^0} \right\} (J_1^*, \theta_1^0, J_2^0, \theta_2^* + \tilde{\theta}) &= \frac{1}{\varkappa J_2^0} \left[\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \theta_1} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial J_1} - \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial J_1} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \theta_1} \right] \Big|_{J_1^*, \theta_1^0, J_2^0, \theta_2^* + \tilde{\theta}}, \end{aligned}$$

вычисленного вдоль невозмущенной орбиты (16), соединяющей устойчивый и неустойчивый предельные циклы. Функции $J_1^*(t), \theta_1^0, J_2^0, \theta_2^*(t)$ соответствуют двоякоасимптотическому решению (16). В результате преобразований найдем

$$I_M(\tilde{\theta}) = \sigma_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{u\tau-v}}{(e^{u\tau-v} + 1)^2} \cos(\varkappa J_2^0 \tau + \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0) + \tilde{\theta}) d\tau,$$

где $\sigma_0 = 2\varkappa^{-1} \sin \alpha_0 \sin \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0)$ – ненулевой постоянный множитель. Интеграл $I_M(\tilde{\theta})$ является расходящимся несобственным интегралом, потому нас будет интересовать только оценка его главного значения (без учета быстро осциллирующей части). Линейной подстановкой $\tau = (2\pi x + v)/u$, с учетом обозначений

$$\nu = \frac{\pi \varkappa}{\sin \alpha_0} > 0, \quad \delta = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0) + \frac{\varkappa v}{\sin \alpha_0},$$

главное значение $I_M(\tilde{\theta})$ приводится к несобственному интегралу Лежандра, который просто вычисляется:

$$\begin{aligned} \widehat{I}_M(\tilde{\theta}) &= \frac{\sigma_0}{u} \cos(\delta + \tilde{\theta}) \left[1 - 4\nu \int_0^\infty \frac{\sin(2\nu x)}{e^{2\pi x} + 1} dx \right] = \\ &= \frac{\sigma_0 \nu}{u} \frac{\cos(\delta + \tilde{\theta})}{\operatorname{sh} \nu} = \frac{2\pi}{J_2^0} \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0)}{\sin \alpha_0} \frac{\cos(\delta + \tilde{\theta})}{\operatorname{sh} \nu}. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, при любых значениях параметров, удовлетворяющих условиям (2), интеграл $\widehat{I}_M(\tilde{\theta})$, рассматриваемый как функция действительного аргумента $\tilde{\theta}$, имеет простые нули только в точках $\tilde{\theta} = \pm k\pi/2 - \delta$, $k = 1, 3, \dots$. Эти значения определяют два гетероклинических решения гамильтоновой системы (12), асимптотически стремящиеся (при $t \rightarrow \pm\infty$) к двум различным периодическим решениям \tilde{T}_1, \tilde{T}_2 . Трансверсальное пересечение возмущенных сепаратрис означает, что для твердого тела, удовлетворяющего условиям (2), хаотические движения всегда существуют (по крайней мере, вблизи сепаратрис), если только параметр $\mu \neq 0$ достаточно мал по сравнению с константой энергии h_0 . Следуя предложенной А. Пуанкаре методике, можно доказать,

что для произвольных фиксированных значений параметров, удовлетворяющих (2), и начальных условий, удовлетворяющих $J_3 = 0$, $h_0 \gg \mu > 0$, уравнения Гамильтона (12) допускают счетное число гетероклинических решений. Эти решения соответствуют двоякоасимптотическим маятниковым движениям твердого тела. На рис. 2 схематически показан гетероклинический цикл системы (12), он составлен из гиперболических периодических решений и гетероклинических решений, принадлежащих пересече-

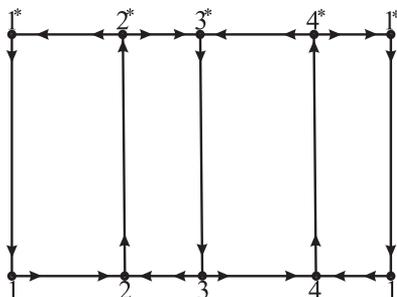


Рис. 2. Гетероклинический цикл на плоскости $\mathbb{R}^2(\theta_1, J_1/J_2)$.

нию возмущенных сепаратрис.

Несобственный интеграл $\widehat{I}_M(\tilde{\theta})$ является частным случаем интеграла, вычисленного С.Л. Зиглиным в работе [3]. Для проверки этого утверждения можно воспользоваться упрощенными формулами, полученными в [8, стр. 367]. Проведенные здесь вычисления подтверждают известный результат В.В. Козлова [2, с. 104] о расщеплении сепаратрис несимметричного тела, вращающегося вокруг неподвижной точки в слабом поле тяготения.

4. Асимптотически маятниковые движения. Динамическая система (1) при ограничениях (2) имеет два гиперболических периодических решения T_1 и T_2 , которые представлены двумя замкнутыми непересекающимися кривыми в пространстве $\mathbb{R}^6(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$. Через каждую из этих кривых проходят две асимптотические поверхности S_1^\pm, S_2^\pm . При $\mu = 0$ эти поверхности попарно сливаются, т. е. $S_1^+ = S_2^-, S_2^+ = S_1^-$. Решение Гесса принадлежит двоякной

сепаратрисе $S_1^+ = S_2^-$, которая, как известно из [2, § 4.6], не расщепляется под действием возмущения (при $\mu \neq 0$). Для описания асимптотических движений твердого тела в случае $h_0 > \mu$ важны следующие свойства:

- не существует инвариантных торов, которые могли бы изолировать одну из сепаратрис $S_1^-, S_2^-, S_1^+, S_2^+$;
- при заданных параметрах динамической системы (1) на любом уровне энергии $h_0 > \mu$ существует счетное число гетероклинических решений из $S_1^- \cap S_2^+ (S_2^- \cap S_1^+)$, предельными циклами которых являются T_1, T_2 ;
- любые две траектории на сепаратрисе $S_1^- (S_2^+)$ разделены гетероклинической орбитой, соседние траектории экспоненциально расходятся с течением времени;
- различные типы гомоклинических и гетероклинических траекторий характеризуются конечной двоичной последовательностью $z(\tilde{\theta})$, кодирующей маршрут движения вдоль невозмущенных сепаратрис (15)–(18).

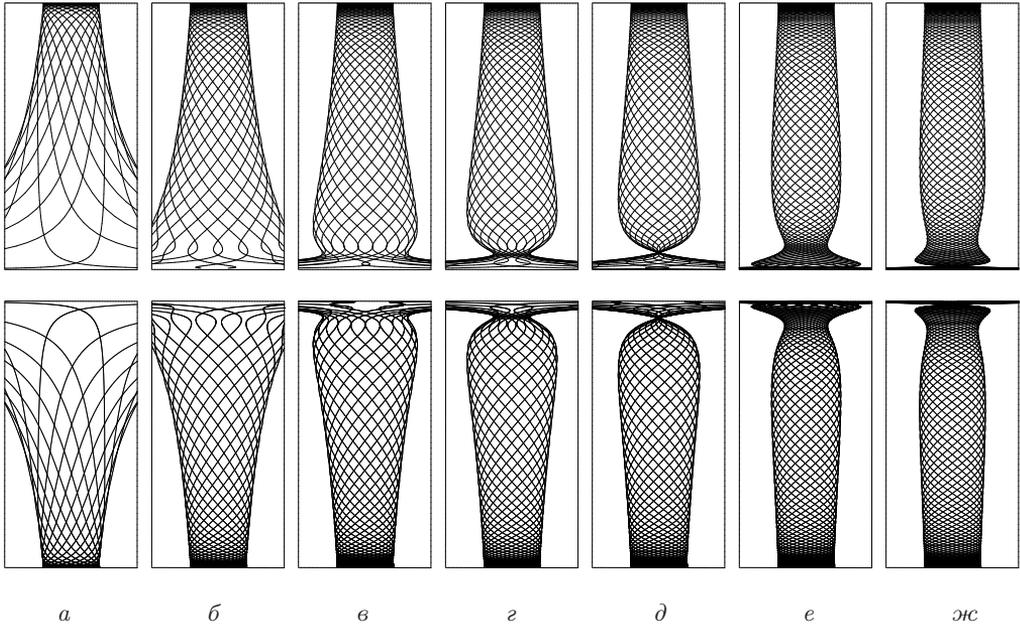


Рис. 3. Асимптотические поверхности S_1^-, S_2^+ .

Проекции фазовых траекторий возмущенной системы (12) на $\mathbb{R}^2(\theta_1, J_1/J_2)$ показаны на рис. 3. Вычисления производились для следующих значений параметров: $\mu = 0.01$, $\beta_0 = \gamma_0$, $\theta_1^0 = \alpha_0 + \beta_0$, $J_2^0 = 2/\sqrt{A_3\kappa}$, $\theta_2^0 \in (0, 2\pi)$; значения α_0, γ_0 см. в табл. 1. В нижней части рис. 3 изображены поверхности S_1^- , образованные решениями системы (12), которые при $t \rightarrow -\infty$ асимптотически приближаются к периодическому решению \tilde{T}_1 . В верхней части

рис. 3 показаны поверхности S_2^+ , образованные решениями системы (12), которые при $t \rightarrow +\infty$ асимптотически стремятся к периодическому решению \tilde{T}_2 . Множество $S_0 = (S_1^- \cap S_2^+) \cup (S_2^- \cap S_1^+)$ состоит из гетероклинических решений системы (12). Гомоклинические решения системы (12) принадлежат множеству $S^0 = (S_1^- \cap S_1^+) \cup (S_2^- \cap S_2^+)$.

Таблица 1. Значения α_0, γ_0 для рис. 3.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>g</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>эс</i>
α_0	2.91891	2.23654	1.23096	1.61146	1.97724	0.79020	0.56207
γ_0	2.46192	1.95519	0.92730	1.34948	1.77215	0.57351	0.40272

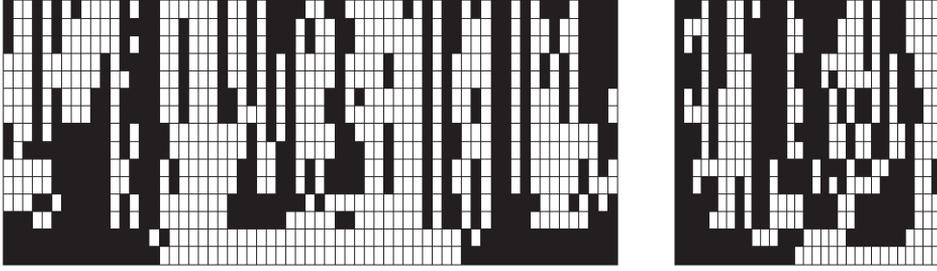


Рис. 4. Последовательность $z(\tilde{\theta}_k)$ для траекторий на S_1^- .

Рис. 4 содержит информацию о допустимых маршрутах движения семейства траекторий на S_1^- вдоль невозмущенных сепаратрис (15)–(18). Точками $\tilde{\theta}_k = k/10$, где $k = \overline{0, 62}$, зададим разбиение интервала $[0, 2\pi)$, в котором изменяется аргумент $\tilde{\theta}$ функции Мельникова (25). Рассмотрим множество решений системы (12), отвечающих начальным условиям $\theta_1^0 = \alpha_0 + \beta_0$, $J_1^0 \approx 0$, $\theta_2^0 = \tilde{\theta}_k$, $J_2^0 = \text{const}$ из малой окрестности периодического решения \tilde{T}_1 . Вблизи решения \tilde{T}_2 , в соответствии с (24), траектория покидает окрестность сепаратрисы (16) и далее движется вдоль периметра левого либо правого прямоугольника на рис. 2. Пусть $z_i(\tilde{\theta}_k) = 0$, если траектория смещается влево от входящей сепаратрисы, и $z_i(\tilde{\theta}_k) = 1$, если траектория смещается вправо от входящей сепаратрисы на рис. 2. Индекс i нумерует последовательность гиперболических периодических решений, вблизи которых проходит исследуемое решение системы (12). Вертикальные столбцы на рис. 4 составлены из первых членов последовательностей $z(\tilde{\theta}_k)$, где белые и черные клетки соответствует нулям и единицам $z_i(\tilde{\theta}_k), i \in \mathbb{Z}$. Вычисления проводились для $i = \overline{1, 15}$ и следующих значений параметров: $A_1 = 2, A_2 = 1.0, A_3 = 1.5, \mathbf{r} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0), \mu = 0.001, h_0 = 1.3342$. Нижняя строка рис. 4 соответствует $i = 1$, верхняя $-i = 15$. Белые и черные клетки в нижней строке рис. 4 отвечают различным знакам функции Мельникова (25). Правый рис. 4 уточняет часть левого рисунка: точками $\tilde{\theta}_k = 3\pi/40 + k/100$, где $k = \overline{0, 31}$, задано разбиение интервала $[3\pi/40, 7\pi/40]$. Многократное увеличение шага разби-

ния не влияет на качественные свойства исследуемых траекторий.

5. Движение тела в неподвижном базисе. Изучим качественные свойства движения тела в неподвижном базисе. При нулевой постоянной интеграла площадей ($J_3 = 0$) вектор кинетического момента \mathbf{M} во все время движения находится в горизонтальной плоскости $O\eta\zeta$. Направление вектора \mathbf{M} в плоскости $O\eta\zeta$ и его модуль $|\mathbf{M}|$ характеризуют переменные θ_3, J_2 , следовательно, временная динамика кинетического момента описывается функциями $\theta_3(t), J_2(t)$. Известно, что маятниковые вращения, соответствующие решениям (19), имеют дополнительное ограничение $\theta_3 = \text{const}$, т.е. сохраняется направление \mathbf{M} в неподвижном базисе и изменяется лишь модуль $|\mathbf{M}|$. Для возмущенных сепаратрис, описываемых линеаризованными уравнениями вида (23), находим приращение угла θ_3 при неограниченном возрастании времени:

$$\begin{aligned} 1) \theta_1^0 = \alpha_0 - \beta_0, \quad \Delta^{(1)}\theta_3 &\approx \frac{2\mu\pi}{(J_2^0)^2} \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta_0 - \alpha_0)}{\sin \alpha_0} \approx \frac{\mu\pi\kappa}{h_0} \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta_0 - \alpha_0)}{\sin \alpha_0}, \\ 2) \theta_1^0 = \alpha_0 + \beta_0, \quad \Delta^{(2)}\theta_3 &\approx \frac{2\mu\pi}{(J_2^0)^2} \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta_0 + \alpha_0)}{\sin \alpha_0} \approx \frac{\mu\pi\kappa}{h_0} \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta_0 + \alpha_0)}{\sin \alpha_0}, \quad (26) \\ 3) \theta_1^0 = \alpha_0 - \beta_0 + 2\pi, \quad \Delta^{(3)}\theta_3 &= -\Delta^{(1)}\theta_3, \\ 4) \theta_1^0 = \alpha_0 + \beta_0 + 2\pi, \quad \Delta^{(4)}\theta_3 &= -\Delta^{(2)}\theta_3. \end{aligned}$$

В частности, для случая Гесса ($\alpha_0 = \beta_0$) в работе [9] получено выражение

$$\Delta^{(2)}\theta_3 \approx \frac{2\mu\pi}{(J_2^0)^2} \approx \frac{\mu\pi A_1 A_2}{A_3(A_1 - A_2)h_0}.$$

Заметим, что эта величина может быть достаточно большой, если эллипсоид инерции мало отличается от сферы.

Для случая Гриоли ($\gamma_0 = \beta_0$) из (26) с учетом (7) получим

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}\theta_3 &\approx -\frac{\mu\pi}{4h_0} \frac{\sin \alpha_0}{\sin \frac{1}{2}(\alpha_0 + \gamma_0)} \in \left(\frac{\mu\pi}{h_0} \frac{(1 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}}, 0 \right), \\ \Delta^{(2)}\theta_3 &\approx \frac{\mu\pi}{4h_0} \frac{\sin \alpha_0}{\sin \frac{1}{2}(\alpha_0 - \gamma_0)} \in (0, \infty). \end{aligned}$$

В пространстве параметров твердого тела выделим подмножества с различным поведением угла θ_3 – угла прецессии вектора кинетического момента вокруг вертикали – в окрестности возмущенных сепаратрис:

$$\begin{aligned} i) \quad &\pi = \beta_0 > \alpha_0 > 0, \quad \Delta^{(2)}\theta_3 = \Delta^{(1)}\theta_3 > 0 > \Delta^{(3)}\theta_3 = \Delta^{(4)}\theta_3; \\ ii) \quad &\pi > \beta_0 > \alpha_0 > 0, \quad \Delta^{(2)}\theta_3 > \Delta^{(1)}\theta_3 > 0 > \Delta^{(3)}\theta_3 > \Delta^{(4)}\theta_3; \\ iii) \quad &\pi > \beta_0 = \alpha_0 > 0, \quad \Delta^{(2)}\theta_3 > \Delta^{(1)}\theta_3 = 0 = \Delta^{(3)}\theta_3 > \Delta^{(4)}\theta_3; \quad (27) \\ iv) \quad &\pi > \alpha_0 > \beta_0 > 0, \quad \Delta^{(2)}\theta_3 > \Delta^{(3)}\theta_3 > 0 > \Delta^{(1)}\theta_3 > \Delta^{(4)}\theta_3; \\ v) \quad &\pi > \alpha_0 > \beta_0 = 0, \quad \Delta^{(2)}\theta_3 = \Delta^{(3)}\theta_3 > 0 > \Delta^{(1)}\theta_3 = \Delta^{(4)}\theta_3. \end{aligned}$$

Таким образом, при малых значениях μ траектории возмущенного движения могут многократно проходить в окрестности сепаратрис (15)–(18), при этом всякий раз угол θ_3 получает приращение $\Delta^{(i)}\theta_3$ в соответствии с приведенными формулами (26). На остальных участках движения (вблизи предельных значений $J_1 = 0$, $J_2 - J_1 = 0$) имеем $\Delta\theta_3 = o(\mu)$.

Отличительной особенностью гомоклинических и гетероклинических решений является существование конечных пределов

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \theta_3(t) = \theta_3^-, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_3(t) = \theta_3^+.$$

В общем случае траектории двоякоасимптотических решений являются гетероклиническими в неподвижном базисе, но можно подобрать параметры динамической системы так, чтобы разность $(\theta_3^+ - \theta_3^-) \neq 0$ была произвольной величиной, например, соизмеримой или кратной 2π .

В качестве геометрической интерпретации движения твердого тела рассмотрим кинематическое представление движения по Пуансо с помощью эллипсоида инерции. В случае $\mu = 0$ построим для неподвижной точки O эллипсоид инерции тела, уравнение которого имеет вид

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 = 1. \quad (28)$$

Обозначим через ρ величину радиус-вектора этого эллипсоида, направленного по мгновенной оси вращения, и проведем через конец указанного радиус-вектора касательную плоскость Π . Тогда эллипсоид инерции (28) во все время движения катится без скольжения по одной из своих касательных плоскостей, эта плоскость Π перпендикулярна вектору кинетического момента \mathbf{M} и остается неподвижной в пространстве. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ движущегося тела направлена вдоль радиус-вектора точки касания, а по величине пропорциональна ρ . При движении точка касания описывает на эллипсоиде инерции кривую, называемую *полодией*; соответствующую ей кривую на неподвижной в пространстве плоскости \mathcal{L} . Пуансо называл *герполодией*. Геометрические свойства *полодий* и *герполодий* существенно зависят от величин моментов инерции и начальных условий движения.

Полодия является замкнутой кривой, описанной вокруг большой или малой оси эллипсоида инерции. Граничная кривая, разделяющая два семейства *полодий*, состоит из двух пересекающихся эллипсов, проходящих через среднюю ось эллипсоида инерции, и соответствует случаю $|\mathbf{M}|^2 = 2A_3h_0$. Эта кривая называется *разделяющей полодией* или сепаратрисой. *Герполодия*, отвечающая *полодии-сепаратрисе*, является симметричной спиралью на неподвижной в пространстве плоскости Π , бесконечное число раз обвивающей точку Q – точку пересечения вектора кинетического момента \mathbf{M} с плоскостью Π . Общая длина этой спирали конечна и равна длине соответствующей дуги *полодии*.

Для $\mu \neq 0$ составим уравнения возмущенной *герполодии* Пуансо. Для этого найдем компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = \omega_\xi \mathbf{i}_1 + \omega_\eta \mathbf{i}_2 + \omega_\zeta \mathbf{i}_3$ в неподвижном ортонормированном базисе $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$.

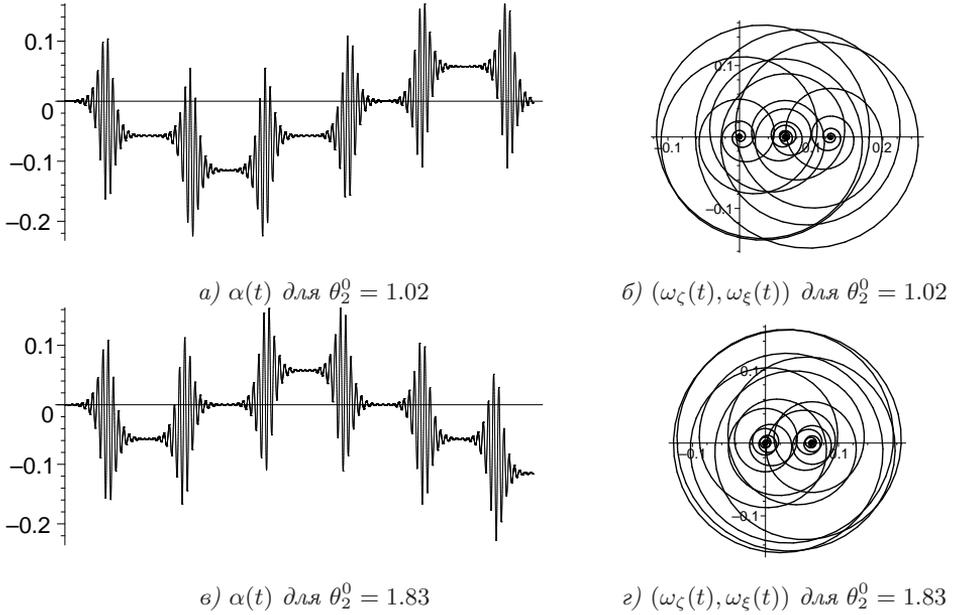


Рис. 5. Возмущенные герлодии в окрестности маятниковых движений.

Полагая $\omega_\eta = \omega_\rho \cos \alpha$, $\omega_\zeta = \omega_\rho \sin \alpha$, запишем кинематические уравнения П.В. Харламова [10], определяющие неподвижный годограф угловой скорости:

$$\omega_\xi \equiv \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad \omega_\rho^2 \equiv |\boldsymbol{\omega}|^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\gamma})^2, \quad \omega_\rho^2 \frac{d\alpha}{dt} = (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \quad (29)$$

Для маятниковых вращений (3) положим $\omega_\xi = \omega_\zeta = 0$. При малом возмущении маятниковых вращений конец вектора угловой скорости в неподвижном пространстве описывает кривую $(\omega_\zeta(t), \omega_\eta(t), \omega_\zeta(t))$, ее проекция на плоскость $\mathbb{R}^2(\omega_\zeta, \omega_\xi)$ – спираль, обвивающая начало координат. Вблизи сепаратрис (15)–(18) угол $\alpha(t)$ получает ненулевое приращение, определяемое формулами (26). Действительно, в рассматриваемом случае $J_3 = 0$ углы θ_3 , α связаны соотношением

$$\theta_3(t) = \alpha(t) - \arctg \left(\frac{\mathbf{M} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma})}{\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}} \right). \quad (30)$$

На рис. 5 для двух значений θ_2^0 показаны графики функции $\alpha(t)$ и кривые $(\omega_\zeta(t), \omega_\xi(t))$. Эти вычисления были проведены для следующих значений параметров: $A = (2, 1.5, 1.8)$, $\mathbf{r} = (0, 1, 0)$, $\mu = 0.01$, $h_0 = 1.1111$. В этом случае выполнены условия (27), i : $\Delta^{(1)}\theta_3 = \Delta^{(2)}\theta_3 = -\Delta^{(3)}\theta_3 = -\Delta^{(4)}\theta_3 \approx 0.057715$. Движение вдоль сепаратрис (15)–(18), как следует из результатов численного интегрирования системы (12), может быть описано упорядоченной последовательностью вершин гетероклинического цикла

на рис. 2:

$$\theta_2^0 = 1.02 : \{2 - 2^* - 1^* - 1 - 4 - 4^* - 3^* - 3 - 4 - 4^* - 1^* - 1\};$$

$$\theta_2^0 = 1.83 : \{2 - 2^* - 3^* - 3 - 4 - 4^* - 1^* - 1 - 2 - 2^* - 1^* - 1\}.$$

Изменение угла $\alpha(t)$ зависит от маршрута движения вдоль невозмущенных сепаратрис (см. рис. 5,а,б). На рис. 5,б,г показаны кривые $(\omega_\zeta(t), \omega_\xi(t))$, соответствующие различным маршрутам движения от вершины 2 к вершине 4^* гетероклинического цикла.

1. *Deprit A.* Free rotation of a rigid body studied in the phase plane// Amer. J. Phys. – 1967. – **35**, № 5. – P. 424–428.
2. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 232 с.
3. *Зиглин С.Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела// Тр. Моск. мат. о-ва. – 1980. – **41**. – С. 287–303.
4. *Galvani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Chaotic motions and transition to stochasticity in the classical problem of the heavy rigid body with a fixed point// Nuovo Cimento. – 1981. – **61** В, № 1. – P. 1–20.
5. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2005. – 576 с.
6. *Докшевич А.И.* Об уравнениях в вариациях, соответствующих вращению тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, вокруг горизонтальной оси// Матем. физика. – 1968. – Вып. 5. – С. 68–73.
7. *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях// Тр. Моск. мат. о-ва. – 1963. – **12**. – С. 3–52.
8. *Довбыш С.А.* Пересечение асимптотических поверхностей возмущенной задачи Эйлера–Пуансо// Прикл. матем. и механика. – 1987. – **51**, № 3. – С. 363–370.
9. *Ковалев А.М., Гашененко И.Н., Кириченко В.В.* О хаотических движениях и расщеплении сепаратрис возмущенного движения Гесса// Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 19–30.
10. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.

I.N. Gashenenko

Perturbed pendulum-like motions of a rigid body about a fixed point

This paper is devoted to a detailed investigation of the perturbed pendulum-like motions of a heavy rigid body about a fixed point. Canonical variables that allow one to simplify the analysis of homoclinic and heteroclinic orbits are introduced. Characteristic properties of perturbed pendulum-like motions of the body in inertial space are studied. A qualitative description of asymptotics of pendulum-like motions in a neighbourhood of split separatrixes is given.

Keywords: rigid body, separatrix splitting, Melnikov's integral, heteroclinic cycle, perturbed Poinsot motion.

І.М. Гашененко

Збурені маятникові рухи твердого тіла навколо нерухомої точки

Досліджено збурені маятникові рухи важкого твердого тіла навколо нерухомої точки. Введено канонічні змінні, що спрощують аналіз гомоклінічних і гетероклінічних траєкторій. Вивчено характерні властивості збурених рухів тіла в нерухомому просторі. Дано якісний опис асимптотично маятникових рухів в околі розщеплених сепаратрис.

Ключові слова: *тверде тіло, розщеплення сепаратрис, інтеграл Мельникова, гетероклінічний цикл, збурений рух Пуансо.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
gashenenko@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 12.07.10