

УДК 531.38

©2010. И.Н. Гашененко

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПО ПУАНСО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В СЛУЧАЕ ГЕССА

На нулевом уровне интеграла площадей исследованы аналитические и качественные свойства решения В. Гесса классической задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Найдена явная зависимость фазовых переменных от времени. Изучена временная и пространственная эволюция угловой скорости и кинетического момента. Движение тела представлено качением эллипсоида инерции по неподвижной плоскости.

Ключевые слова: динамика твердого тела, решение Гесса, угловая скорость, кинетический момент, полодия, герполодия, движение Пуансо.

Введение. Движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки описывается дифференциальными уравнениями Эйлера–Пуассона

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega + \mathbf{r} \times \gamma, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \quad (1)$$

где $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции тела в неподвижной точке, ω – угловая скорость, $A\omega$ – кинетический момент, γ – орт вертикали, \mathbf{r} – орт радиус-вектора центра масс тела. Уравнения (1) имеют три первых интеграла

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} A\omega \cdot \omega - \mathbf{r} \cdot \gamma = h, \quad G \stackrel{\text{def}}{=} A\omega \cdot \gamma = g, \quad I \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \cdot \gamma = 1. \quad (2)$$

В 1890 г. Вильгельм Гесс [1] показал, что при ограничениях на параметры

$$r_1 \sqrt{A_1(A_3 - A_2)} = r_2 \sqrt{A_2(A_1 - A_3)}, \quad r_3 = 0, \quad A_1 > A_3 > A_2 \quad (3)$$

уравнения (1) допускают линейное инвариантное соотношение

$$A_1\omega_1 r_1 + A_2\omega_2 r_2 = 0. \quad (4)$$

При условии $g = 0$ уравнения (1) допускают дополнительное инвариантное соотношение, которое может быть записано в виде

$$A_3\omega_3 r_2 - A_1\omega_1 \text{sh} \{b(\text{Arccos}(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2) - \theta_0)\} = 0. \quad (5)$$

Детальное аналитическое исследование решения Гесса выполнил П.А. Некрасов [2,3]: он свел задачу к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с двоякопериодическими комплексными коэффициентами, изучил аналитические свойства решений этого уравнения и выявил основные свойства траекторий на сфере Пуассона. Некоторые результаты работ [1,2] впоследствии были повторены Р. Лиувиллем [4]. В совместной работе Б.К. Млодзеевского и П.А. Некрасова сформулированы достаточные условия

существования периодических и асимптотических движений. Важные качественные свойства движения тела (в частности, при нулевой постоянной площадей) отмечены Н.Е. Жуковским [5]. Полный качественный анализ фазовых траекторий решения Гесса выполнен А.М. Ковалевым [6]. Основанная на результатах [6] детальная классификация возможных годографов вектора кинетического момента в зависимости от значений h, g предложена в [7]. В работе [8] методом годографов [9] дано кинематическое истолкование движения гироскопа Гесса при нулевой постоянной площадей.

1. Специальные оси. Успехи исследований решения Гесса во многом связаны с использованием специальной ортогональной системы подвижных координат, первая ось которой проходит через центр масс тела, а третья ось совпадает с главной осью инерции. Такие оси нашли применение в работах [3, 4, 6, 10, 11] и др. В новой системе координат проекции фазовых переменных выражаются по формулам [3]

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2, & \omega_y &= \omega_2 r_1 - \omega_1 r_2, & \omega_z &= \omega_3, \\ \nu_1 &= \gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2, & \nu_2 &= \gamma_2 r_1 - \gamma_1 r_2, & \nu_3 &= \gamma_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Дифференциальные уравнения (1) и их первые интегралы (2) при ограничениях (3),(4) достаточно просто записываются в переменных (6):

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_y &= \omega_x \omega_z - \nu_3 / A_3, & \dot{\omega}_z &= -\omega_y \omega_x + \nu_2 / A_3, \\ \dot{\nu}_1 &= \nu_2 \omega_z - \nu_3 \omega_y, & \dot{\nu}_2 &= \nu_3 \omega_x - \nu_1 \omega_z, & \dot{\nu}_3 &= \nu_1 \omega_y - \nu_2 \omega_x, \\ \frac{A_3}{2} (\omega_y^2 + \omega_z^2) - \nu_1 &= h, & A_3 (\omega_y \nu_2 + \omega_z \nu_3) &= g, & \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Положим $g = 0$. Инвариантные соотношения (4),(5) запишем в виде

$$\omega_x - b\omega_y = 0, \quad \omega_z + \omega_y \operatorname{sh} \{b(\operatorname{Arccos} \nu_1 - \theta_0)\} = 0, \quad (8)$$

где $b^2 = (A_1 - A_3)(A_3 - A_2)/(A_1 A_2)$, $|b| < 1$, $\theta_0 \in [0, \infty)$. В результате замены переменных [12–14]

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \cos \theta, & \nu_2 &= \sin \theta \operatorname{th} \sigma, & \nu_3 &= \sin \theta / \operatorname{ch} \sigma, \\ \omega_x &= b \dot{\theta} / \operatorname{ch} \sigma, & \omega_y &= \dot{\theta} / \operatorname{ch} \sigma, & \omega_z &= -\dot{\theta} \operatorname{th} \sigma \end{aligned} \quad (9)$$

система уравнений (7),(8) сводится к двум уравнениям:

$$\frac{A_3}{2} \dot{\theta}^2 - \cos \theta = h, \quad \sigma = b(\theta - \theta_0). \quad (10)$$

2. Зависимость переменных от времени. Из уравнений (9), (10) следует важное свойство [1, §12]: решение Гесса в случае $g = 0$ выражается в эллиптических функциях времени.

Пусть $h \in (-1, 1)$, тогда решение Гесса записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}\omega_x &= 2abk \frac{\operatorname{cn}\tau}{\operatorname{ch}\sigma}, \quad \omega_y = 2ak \frac{\operatorname{cn}\tau}{\operatorname{ch}\sigma}, \quad \omega_z = -2ak \operatorname{cn}\tau \operatorname{th}\sigma, \quad \tau = a(t - t_0), \\ \nu_1 &= 2 \operatorname{dn}^2 \tau - 1, \quad \nu_2 = 2k \operatorname{sn}\tau \operatorname{dn}\tau \operatorname{th}\sigma, \quad \nu_3 = 2k \frac{\operatorname{sn}\tau \operatorname{dn}\tau}{\operatorname{ch}\sigma}, \\ \sigma &= b(2\varepsilon \operatorname{arccos}\{\operatorname{dn}\tau\} - \theta_0), \quad k = \sqrt{(h+1)/2}, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn}(\operatorname{sn}\tau).\end{aligned}\tag{11}$$

Здесь и далее использовано обозначение $a = 1/\sqrt{A_3}$. Период T решения (11) не зависит от параметров b, θ_0 и выражается через полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$ по формуле $T = 4K(k)/a$.

Полагая $\theta_0 = \infty$, из (11) получим формулы, описывающие колебания физического маятника вокруг третьей главной оси инерции:

$$\omega_x = \omega_y = \nu_3 = 0, \quad \omega_z = -2ak \operatorname{cn}\tau, \quad \nu_1 = 2 \operatorname{dn}^2 \tau - 1, \quad \nu_2 = 2k \operatorname{sn}\tau \operatorname{dn}\tau.\tag{12}$$

В случае $h > 1$ решение Гесса имеет вид

$$\begin{aligned}\omega_x &= 2\varepsilon b \frac{a}{k} \frac{\operatorname{dn}\tau}{\operatorname{ch}\sigma}, \quad \omega_y = 2\varepsilon \frac{a}{k} \frac{\operatorname{dn}\tau}{\operatorname{ch}\sigma}, \quad \omega_z = -2 \frac{a}{k} \operatorname{dn}\tau \operatorname{th}\sigma, \\ \nu_1 &= 2 \operatorname{cn}^2 \tau - 1, \quad \nu_2 = 2 \operatorname{sn}\tau \operatorname{cn}\tau \operatorname{th}\sigma, \quad \nu_3 = 2\varepsilon \frac{\operatorname{sn}\tau \operatorname{cn}\tau}{\operatorname{ch}\sigma}, \\ \sigma &= b(2\operatorname{Arccos}\{\operatorname{cn}\tau\} - \theta_0), \quad k = \sqrt{2/(h+1)}, \quad \tau = \frac{a}{k}(t - t_0), \quad \varepsilon = \pm 1.\end{aligned}\tag{13}$$

При $\theta_0 = \infty$ формулы (13) описывают периодические ($T = 2kK(k)/a$) вращения физического маятника вокруг главной оси инерции:

$$\omega_x = \omega_y = \nu_3 = 0, \quad \omega_z = \mp 2 \frac{a}{k} \operatorname{dn}\tau, \quad \nu_1 = 2 \operatorname{cn}^2 \tau - 1, \quad \nu_2 = \pm 2 \operatorname{sn}\tau \operatorname{cn}\tau.\tag{14}$$

Если $\theta_0 \in [0, \infty)$, то решение (13) является гетероклиническим, при $t \rightarrow \pm\infty$ оно асимптотически приближается к двум периодическим решениям (14).

Пусть $h = 1$, тогда решение Гесса описывает движение твердого тела в окрестности неустойчивого положения равновесия:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{2\varepsilon ab}{\operatorname{ch}\tau \operatorname{ch}\sigma}, \quad \omega_y = \frac{2\varepsilon a}{\operatorname{ch}\tau \operatorname{ch}\sigma}, \quad \omega_z = -\frac{2a}{\operatorname{ch}\tau} \operatorname{th}\sigma, \\ \nu_1 &= \frac{2}{\operatorname{ch}^2 \tau} - 1, \quad \nu_2 = 2 \frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}^2 \tau} \operatorname{th}\sigma, \quad \nu_3 = 2\varepsilon \frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}^2 \tau \operatorname{ch}\sigma}, \\ \sigma &= b(4 \operatorname{arctg}\{e^\tau\} - \theta_0), \quad \tau = a(t - t_0), \quad \varepsilon = \pm 1.\end{aligned}\tag{15}$$

При $t \rightarrow \pm\infty$ решение (15) асимптотически стремится к точке

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}) = (0, 0, 0, -1, 0, 0).$$

Аналогичные (13),(15) явные выражения решения Гесса использовались ранее в работах [12, 13].

3. Изменение угловой скорости в подвижном и неподвижном базисе. Зададим значения параметров $a > 0$, $b \in (0, 1)$, $\theta_0 \in [0, \infty)$. Зависящее от h однопараметрическое семейство годографов угловой скорости заполняет плоскость $\mathcal{P} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z : \omega_x = b\omega_y\}$, причем пересечения различных траекторий этого семейства возможны только в начале координат. Если $h \in (-1, 1)$, то подвижные годографы симметричны относительно преобразования $(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \rightarrow (-\omega_x, -\omega_y, -\omega_z)$, они имеют вид восьмерки с точкой самопересечения в начале координат (см. рис. 1). Если $h > 1$, то подвижные годографы не проходят через начало координат, при $t \rightarrow \pm\infty$ траектории на рис. 1 асимптотически приближаются к оси $O\omega_z$.

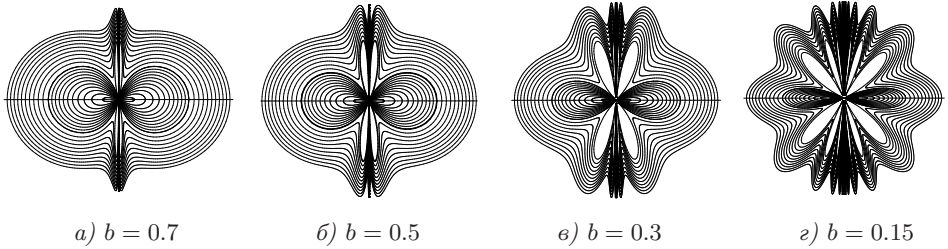


Рис. 1. Подвижные годографы угловой скорости для $\theta_0 = 0$, $h \in (-1, 4]$.

Если построены фазовые траектории для $\theta_0 = 0$, то для произвольного значения θ_0 фазовые траектории находим координатным преобразованием

$$\omega'_x = b\omega'_y, \quad \omega'_y = \frac{\omega_y \sqrt{\omega_y^2 + \omega_z^2}}{c_1 \sqrt{\omega_y^2 + \omega_z^2} + c_2 \omega_z}, \quad \omega'_z = \omega_z + \frac{c_2 \omega_y^2}{c_1 \sqrt{\omega_y^2 + \omega_z^2} + c_2 \omega_z}, \quad (16)$$

$$\nu'_1 = \nu_1, \quad \nu'_2 = \nu_2 - \frac{c_2 \nu_3^2}{c_1 \sqrt{\nu_2^2 + \nu_3^2} - c_2 \nu_2}, \quad \nu'_3 = \frac{\nu_3 \sqrt{\nu_2^2 + \nu_3^2}}{c_1 \sqrt{\nu_2^2 + \nu_3^2} - c_2 \nu_2},$$

где $c_1 = \text{ch}(b\theta_0)$, $c_2 = \text{sh}(b\theta_0)$, $\text{sgn}(\sqrt{\omega_y^2 + \omega_z^2}) = \text{sgn}(\omega_y)$, $\text{sgn}(\sqrt{\nu_2^2 + \nu_3^2}) = \text{sgn}(\nu_3)$. В частности, полученные для $h \in (-1, 1)$, $\theta_0 = 0$ подвижные годографы отображением (16), где $c_1 = \text{ch}(2n\pi b)$, $c_2 = \text{sh}(2n\pi b)$, $n \in \mathbb{Z}$, переводятся в траектории, которые на рис. 1 заполняют все пустые области, имеющиеся в окрестности начала координат.

Орт вертикали ν описывает в подвижном базисе сферическую кривую, лежащую на пересечении двух поверхностей:

$$\begin{cases} \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \\ \nu_1 = \cos\left(\theta_0 + \frac{1}{b} \text{Arsh} \frac{\nu_2}{\nu_3}\right). \end{cases} \quad (17)$$

Пусть $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ – ортонормированный базис, состоящий из неподвижных в пространстве векторов, причем $\mathbf{i}_1 = \boldsymbol{\gamma}$. С учетом результатов работы [8] найдем компоненты вектора угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega} = \Omega_\xi \mathbf{i}_1 + \Omega_\eta \mathbf{i}_2 + \Omega_\zeta \mathbf{i}_3$ в базисе $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$. В переменных (9) компоненты угловой скорости имеют вид

$$\Omega_\xi = b \dot{\theta} \frac{\cos \theta}{\operatorname{ch} \sigma}, \quad \Omega_\eta = b \dot{\theta} \frac{\sin \theta}{\operatorname{ch} \sigma}, \quad \Omega_\zeta = \dot{\theta}. \quad (18)$$

Зададим значение $h = \text{const}$, тогда из первого уравнения (10) следует уравнение линейчатой поверхности

$$\left(\frac{\Omega_\zeta^2}{2a^2} - h \right)^2 (\Omega_\xi^2 + \Omega_\eta^2) - \Omega_\xi^2 = 0,$$

несущей зависящее от θ_0 семейство неподвижных годографов. Расположение годографов угловой скорости в $\mathbb{R}^3(\Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta)$ ограничено конусом:

$$\Omega_\xi^2 + \Omega_\eta^2 - b^2 \Omega_\zeta^2 \leq 0. \quad (19)$$

Если $h \in (-1, 1)$, то движение твердого тела в случае Гесса является периодическим [3, 8]. Из формул (9), (11), (18) найдем зависимость от времени величин $\Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta$ для значений энергии $h \in (-1, 1)$:

$$\Omega_\xi = 2abk(2 \operatorname{dn}^2 \tau - 1) \frac{\operatorname{cn} \tau}{\operatorname{ch} \sigma}, \quad \Omega_\eta = 4abk^2 \frac{\operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau}{\operatorname{ch} \sigma}, \quad \Omega_\zeta = 2ak \operatorname{cn} \tau, \quad (20)$$

где $\sigma = b(2\varepsilon \arccos \{\operatorname{dn} \tau\} - \theta_0)$, $k = \sqrt{(h+1)/2}$, $\varepsilon = \operatorname{sgn}(\operatorname{sn} \tau)$, $\tau = a(t - t_0)$.

Для $h > 1$ из (9), (13), (18) получим выражения

$$\Omega_\xi = \frac{2\varepsilon ab}{k} (2 \operatorname{cn}^2 \tau - 1) \frac{\operatorname{dn} \tau}{\operatorname{ch} \sigma}, \quad \Omega_\eta = \frac{4ab}{k} \frac{\operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau}{\operatorname{ch} \sigma}, \quad \Omega_\zeta = \frac{2\varepsilon a}{k} \operatorname{dn} \tau, \quad (21)$$

где $\sigma = b(2 \operatorname{Arccos} \{\operatorname{cn} \tau\} - \theta_0)$, $k = \sqrt{2/(h+1)}$, $\tau = a(t - t_0)/k$, $\varepsilon = \pm 1$.

При асимптотическом движении тела к неустойчивому положению равновесия ($h = 1$) проекции угловой скорости на неподвижные оси имеют вид

$$\Omega_\xi = \frac{2\varepsilon ab(1 - \operatorname{sh}^2 \tau)}{\operatorname{ch}^3 \tau \operatorname{ch} \sigma}, \quad \Omega_\eta = \frac{4ab \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch}^3 \tau \operatorname{ch} \sigma}, \quad \Omega_\zeta = \frac{2\varepsilon a}{\operatorname{ch} \tau}, \quad (22)$$

где $\sigma = b(4 \operatorname{arctg} \{e^\tau\} - \theta_0)$, $\tau = a(t - t_0)$, $\varepsilon = \pm 1$.

Снова зафиксируем значения параметров $a > 0$, $b \in (0, 1)$, $\theta_0 \in [0, \infty)$. Зависящее от h однопараметрическое семейство неподвижных годографов угловой скорости заполняет в $\mathbb{R}^3(\Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta)$ коническую поверхность

$$\mathcal{N} = \{\Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta : \Omega_\xi = bu \cos(v + \theta_0)/\operatorname{ch} bv, \Omega_\eta = bu \sin(v + \theta_0)/\operatorname{ch} bv,$$

$$\Omega_\zeta = u, \quad -\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < \infty \}.$$

Направляющей линией конической поверхности \mathcal{N} может служить плоская кривая $\mathcal{L} = \{\Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta : \Omega_\xi = \cos(v + \theta_0)/\text{ch } bv, \Omega_\eta = \sin(v + \theta_0)/\text{ch } bv, \Omega_\zeta = 1/b, -\infty < v < \infty\}$.

Кривые \mathcal{L} , соответствующие различным значениям параметра $b \in (0, 1)$, показаны на рис. 2. Подобные кривые (разделяющие герполодии) были изучены Пуансо в задаче о движении тела по инерции [10, п. 151].

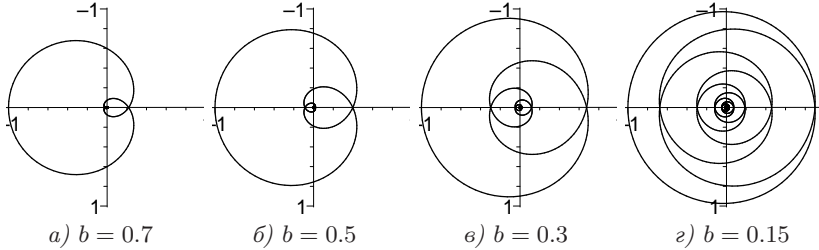


Рис. 2. Герполодии на неподвижной плоскости.

4. Кинематическая интерпретация движения. Неизменно связанную с телом коническую поверхность – геометрическое место мгновенных осей в теле – называют подвижным аксоидом. Вершиной его служит неподвижная точка, а направляющей линией – подвижный годограф угловой скорости. Неподвижный аксоид – это геометрическое место мгновенных осей в пространстве. Его вершина также находится в точке O , а направляющей линией служит неподвижный годограф угловой скорости. По теореме Пуансо, вращение твердого тела вокруг неподвижной точки может быть представлено качением без скольжения подвижного аксоида по неподвижному.

Вычислим элементы матрицы ориентации E , связывающей в заданный момент времени подвижный $(\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t))$ и неподвижный $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ базисы:

$$\mathbf{i}_j = \sum_{k=1}^3 E_{jk}(t) \mathbf{e}_k(t), \quad j = 1, 2, 3.$$

Для рассматриваемого решения Гесса матрица E имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \Delta & -\nu_1\nu_2/\Delta & -\nu_1\nu_3/\Delta \\ 0 & \nu_3/\Delta & -\nu_2/\Delta \end{pmatrix}, \quad \text{где } \Delta = \sqrt{\nu_2^2 + \nu_3^2}. \quad (23)$$

Запишем матрицу E в переменных θ, σ :

$$E = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \text{ th } \sigma & \sin \theta / \text{ch } \sigma \\ \sin \theta & -\cos \theta \text{ th } \sigma & -\cos \theta / \text{ch } \sigma \\ 0 & 1 / \text{ch } \sigma & -\text{th } \sigma \end{pmatrix}.$$

Отнесенные к подвижному (связанному с телом) базису $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ векторы

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= K_x \mathbf{e}_1 + K_y \mathbf{e}_2 + K_z \mathbf{e}_3 \equiv A_3 \omega_y \mathbf{e}_2 + A_3 \omega_z \mathbf{e}_3, \\ \boldsymbol{\omega} &= \omega_x \mathbf{e}_1 + \omega_y \mathbf{e}_2 + \omega_z \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r} = \mathbf{e}_1\end{aligned}$$

в неподвижной системе координат $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= K_\xi \mathbf{i}_1 + K_\eta \mathbf{i}_2 + K_\zeta \mathbf{i}_3 \equiv A_3 \dot{\theta} \mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\omega} = \Omega_\xi \mathbf{i}_1 + \Omega_\eta \mathbf{i}_2 + \Omega_\zeta \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{r} &= r_\xi \mathbf{i}_1 + r_\eta \mathbf{i}_2 + r_\zeta \mathbf{i}_3 \equiv \mathbf{i}_1 \cos \theta + \mathbf{i}_2 \sin \theta.\end{aligned}\tag{24}$$

Кинетический момент $\mathbf{K} \stackrel{\text{def}}{=} A \boldsymbol{\omega}$ твердого тела направлен по \mathbf{i}_3 и, значит, сохраняет в пространстве неизменное горизонтальное положение [5, § 3].

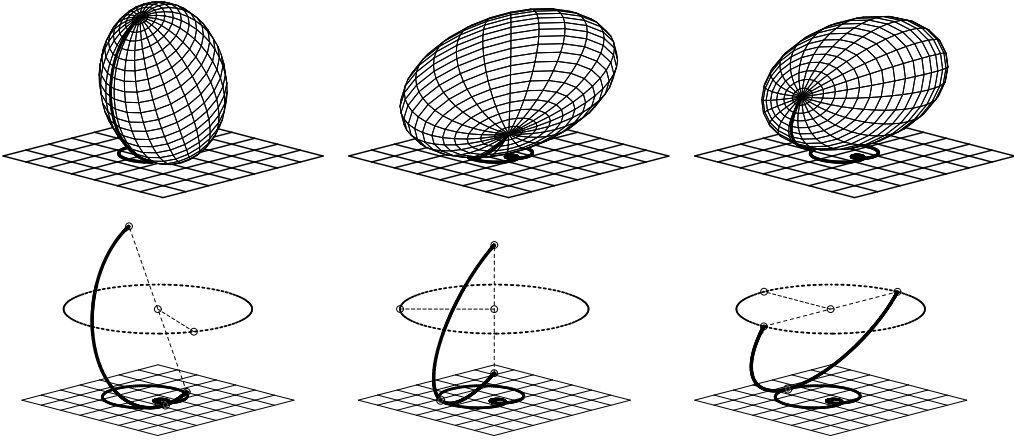


Рис. 3. Качение эллипсоида (25) по неподвижной плоскости $\Pi = \{x_1, x_2, x_3 : x_3 = 1\}$.

В неподвижном пространстве зададим плоскость $\Pi = \{x_1, x_2, x_3 : x_3 = 1\}$. Пересечение неподвижного аксиоида \mathcal{N} с плоскостью Π происходит в точках, радиус-векторы которых заданы вектор-функцией

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(v) = \left(b \frac{\cos(v + \theta_0)}{\text{ch } bv}, b \frac{\sin(v + \theta_0)}{\text{ch } bv}, 1 \right).$$

Аналогичным преобразованием подвижного аксиоида найдем вектор-функцию

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(v) \stackrel{\text{def}}{=} E^T \tilde{\boldsymbol{\Omega}}(v) = \left(b \frac{1}{\text{ch } bv}, \frac{1}{\text{ch } bv}, \text{th } bv \right),$$

которая при изменении параметра $v \in (-\infty, \infty)$ задает дугу полюдии (дугу эллипса) на эллипсоиде инерции:

$$\mathcal{A}_{11} \tilde{\omega}_1^2 + \mathcal{A}_{22} \tilde{\omega}_2^2 + \mathcal{A}_{33} \tilde{\omega}_3^2 + 2\mathcal{A}_{12} \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 = \mathcal{A}_{33},\tag{25}$$

где $\mathcal{A}_{11}(\mathcal{A}_{33} - \mathcal{A}_{22}) + \mathcal{A}_{12}^2 = 0$, $\mathcal{A}_{11}\mathcal{A}_{33} = A_1A_2$, $\mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{22} = A_1 + A_2$, $\mathcal{A}_{33} = A_3$.

Для фиксированного значения $\theta_0 = \text{const}$ вид полюдии и герполюдии не зависит от значения константы h . Если $h \in (-1, 1)$, то $v \in [v_1, v_2]$, где $v_1 = -\arccos(-h) - \theta_0$, $v_2 = \arccos(-h) - \theta_0$. В этом случае переменная v периодически изменяется с течением времени. Годографы векторов $\tilde{\omega}, \tilde{\Omega}$ вычерчивают дуги плоских кривых, возвращаясь в исходную точку за время $T = 4K(k)/a$. Если $h \in (1, \infty)$, то $v \in (-\infty, \infty)$, герполюдия совершает бесконечно много оборотов вокруг точки $(0, 0, 1) \in \Pi$.

Движение твердого тела в случае Гесса может быть представлено качением эллипсоида инерции по неподвижной плоскости. На рис. 3 вектор \mathbf{i}_3 направлен вертикально вниз, а плоскость, содержащая векторы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3$, является плоскостью симметрии для герполюдии. Центр масс тела (см. (24)) движется по окружности [5, § 3], при этом векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{i}_3$ остаются ортогональными. Обкатывание годографов векторов $\tilde{\omega}, \tilde{\Omega}$ происходит без скольжения.

1. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt// *Math. Ann.* – 1890. – **37**. – S. 153–181.
2. *Некрасов П.А.* К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки// *Мат. сборник.* – 1892. – **16**, вып. 3. – С. 508–517.
3. *Некрасов П.А.* Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки// Там же. – 1896. – **18**, вып. 2. – С. 161–274.
4. *Liouville R.* Sur la rotation des solides// *Comptes rendus de l'Acad. des Sci. Paris.* – 1895. – **120**, № 17. – P. 903–906.
5. *Жуковский Н.Е.* Локсодромический маятник Гесса// *Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания.* – 1893. – **5**, вып. 2. – С. 37–45; *Собр. соч.:* В 7 т. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – Т. 1. – С. 257–274.
6. *Ковалев А.М.* Подвижный годограф угловой скорости в решении Гесса задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку// *Прикл. математика и механика.* – 1968. – **32**, вып. 6. – С. 1111–1118.
7. *Ковалев А.М., Кириченко В.В.* Годограф вектора кинетического момента в решении Гесса// *Механика твердого тела.* – 2004. – Вып. 34. – С. 9–20.
8. *Ковалев А.М.* О движении тела в случае Гесса// Там же. – 1969. – Вып. 1. – С. 12–27.
9. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
10. *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. – М.: Наука, 1983. – Т. 2. – 544 с.
11. *Bressan A.* Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess// *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova.* – 1957. – **27**. – С. 276–283.
12. *Довбыш С.А.* О сепаратрисе неустойчивого положения равновесия волчка Гесса–Аппельрота// *Прикл. математика и механика.* – 1992. – **56**, № 4. – С. 632–642.
13. *Ковалев В.М.* Асимптотические движения гироскопа Гесса с нулевым значением постоянной площадей// *Механика твердого тела.* – 1993. – Вып. 25. – С. 20–26.
14. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. – Киев: Наук. думка, 1992. – 168 с.

I.N. Gashenenko

Poinsot kinematic representation of the motion of a body in the Hess case

On the zero level of the momentum integral, analytic and qualitative properties of the Hess solution of the classical problem on rotation of a heavy rigid body about a fixed point are studied. The explicit time dependence of the phase variables is expressed in terms of Jacobi elliptic functions. The time and the spatial evolution of the angular velocity and angular momentum are investigated. The motion of the body is represented by the rolling motion of the body's ellipsoid of inertia on a fixed plane in space.

Keywords: *dynamics of a rigid body, the Hess solution, angular velocity, angular momentum, polhode, herpolhode, Poinsot motion.*

I.M. Гашененко

Кінематичне зображення за Пуансо руху тіла у випадку Гесса

На нульовому рівні інтеграла площ досліджено аналітичні та якісні властивості розв'язку В. Гесса класичної задачі про обертання важкого твердого тіла навколо нерухомої точки. Знайдено явну залежність фазових змінних від часу. Вивчено часову і просторову еволюції кутової швидкості і кінетичного моменту. Рух тіла зображено коченням еліпсоїда інерції по нерухомій площині.

Ключові слова: *динаміка твердого тіла, розв'язок Гесса, кутова швидкість, кінетичний момент, полодія, герполодія, рух Пуансо.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
gashenenko@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 19.08.10