УДК 531.36

©2010. **А.М. Ковалев**

ИНВАРИАНТНОСТЬ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

В работе рассматривается задача устойчивости нулевого решения автономной системы дифференциальных уравнений. Решена задача максимального улучшения функции со знакопостоянной производной, которое может позволить метод дополнительных функций. Получена теорема о построении функции со знакоопределенной производной либо со знакопостоянной производной, множество обращения которой в нуль является инвариантным. Доказана теорема о неустойчивости в случае существования знакопостоянной производной. Рассмотрены иллюстративные примеры.

Ключевые слова: *метод дополнительных функций, знакопостоянная производная, неустойчивость, автономная система дифференциальных уравнений.*

В теории устойчивости движения случаи неустойчивости наряду с критическими случаями относятся к наиболее трудным. В своей знаменитой монографии [1] А.М. Ляпунов двумя первыми теоремами практически исчерпывающим образом охватил свойства устойчивости и асимптотической устойчивости. Более сложным оказалось свойство неустойчивости, которому посвящены две следующие теоремы А.М. Ляпунова. Н.Г. Четаев [2] обобщил первую теорему Ляпунова о неустойчивости и обозначил направление, в котором продолжилось изучение вопросов неустойчивости. Н.Н. Красовский распространил идею использования знакопостоянной производной с задач асимптотической устойчивости [3] на задачи неустойчивости [4]. В обоих случаях ключевым является отсутствие целых полутраекторий на множестве обращения в нуль производной функции Ляпунова.

Рассмотрение знакопостоянной производной вызвано двумя причинами: первая состоит в том, что в распоряжении исследователя такая функция уже имеется, вторая связана со свойствами рассматриваемой системы, для которой можно получить лишь функцию со знакопостоянной производной, как, например, в случае линейной системы с нулевым или парой чисто мнимых корней. Стоит отметить, что последняя ситуация имеет место и для нелинейных систем при наличии координат с устойчивым поведением. Вместе с тем, в связи с рассмотрением этого круга вопросов проявилось влияние на устойчивость свойства инвариантности, особенно в задачах частичной устойчивости [5–7].

В полной мере теория инвариантности была использована для решения задач устойчивости при создании метода дополнительных функций [8–10]. Прежде всего, с использованием метода инвариантных соотношений [11, 12] получены два типа дополнительных функций, максимально расширяющих область знакоопределенности функции Ляпунова. Это позволило построить функции Ляпунова и решить ряд новых задач теории устойчивости по всем и по части переменных. Следующим шагом является применение этого метода к функциям со знакопостоянной производной без дополнительных требований к самим функциям. Результатом является получение функции со знакоопределенной производной либо со знакопостоянной производной, множество, на котором она обращается в нуль, является инвариантным. При наложении дополнительных условий на саму функцию доказана теорема о неустойчивости. Этому и посвящена настоящая статья.

В первом пункте статьи дана постановка задачи и приведены теоремы о неустойчивости, наиболее употребительные при исследовании неустойчивых движений. Вопросам инвариантности и методу дополнительных функций посвящен п. 2. Основной результат получен в п. 3. В п. 4 рассмотрены иллюстративные примеры.

1. Неустойчивые движения. Рассматриваются задачи устойчивости нулевого решения системы

$$\dot{x} = f(x), \qquad f(0) = 0, \qquad x \in D \subset R^n, \quad t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

где D – некоторая окрестность нуля; функция $f(x)$ предполагается непрерывно дифференцируемой достаточное число раз для $x \in D$. Точка означает дифференцирование по времени t зависимой переменной x, а также функции $V(x)$ в силу системы (1): $\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$. Здесь ∇ – оператор дифференцирования, в применении к скалярной функции он дает градиент, а к вектор-функции – матрицу Якоби; символ $\langle , \rangle$ означает скалярное произведение.

При исследовании неустойчивых движений наиболее употребительны первая теорема Ляпунова о неустойчивости и ее обобщения, из которых приведем два основных.

Теорема 1 [1]**.** Если для уравнений (1) возможно найти функцию $V(x)$ такую, что ее производная $\dot{V}(x)$ есть функция знакоопределенная, а сама функция $V(x)$ не будет знакопостоянной, знака, противоположного $\dot{V}(x)$, то нулевое решение неустойчиво.

Теорема 2 [2]**.** Если для уравнений (1) можно найти такую функцию $V(x)$, что 1) в сколь угодно малой окрестности начала координат существует область, где $V(x) > 0$, на границе которой $V(x) = 0$ и 2) во всех точках области $V > 0$ производная $\dot{V}(x)$ принимает положительные значения, то нулевое решение неустойчиво.

Теорема 3 [4]**.** Пусть существует функция $V(x)$, принимающая в произвольно малой окрестности точки O неотрицательные значения и такая, что в окрестности $\dot{V}(x) = 0$ на H, $\dot{V} > 0$ вне H, где H – область в окрестности точки O. Если H не содержит целиком положительных полутраекторий, отличных от 0, то нулевое решение уравнений (1) неустойчиво.

Теоремы 2, 3 определяют два основных направления, в которых обобщалась теорема 1. Это, во-первых, уменьшение требований на множество, в точках которого функция Ляпунова $V(x)$ принимает значения того же знака, что и ее производная (теорема 2). Второе направление связано с возможностью использования знакопостоянной производной $\dot{V}(x)$ (теорема 3), для которого, как и в задачах асимптотической устойчивости, характерно отсутствие целых полутраекторий на множестве обращения в нуль производной функции Ляпунова.

2. Инвариантность и дополнительные функции. Вопрос о наличии целых полутраекторий системы (1) в некотором множестве зависит от свойства инвариантности. В качественной теории дифференциальных уравнений со свойством инвариантности связаны два следующих понятия: инвариантное множество и инвариантное соотношение.

Определение 1. Множество $G \subset D$ называется инвариантным множеством системы (1), если всякое ее решение $x(t)$, имеющее с G общую точку $x(t^*) \in G$, целиком принадлежит этому множеству: $x(t) \in G,\ t \in [t_0, \infty)$.

Определение 2. Соотношение $\varphi(x) = 0$ называется инвариантным соотношением системы (1), если определяемое им множество содержит инвариантное множество системы (1).

Удобный инструмент для проверки, является ли заданное соотношение инвариантным соотношением системы (1), дает следующая теорема [12].

Теорема 4. Порождаемое инвариантным соотношением $\varphi(x) = 0$ инвариантное множество G системы (1) определяется уравнениями

$$\varphi^{(i)}(x) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, l-1), \tag{2}$$

где l – число независимых функций в последовательности

$$\varphi(x),\ \dot{\varphi}(x),\ \ddot{\varphi}(x), \ldots, \tag{3}$$

при этом $\nabla\varphi(x) \neq 0$ для $x \in G$.

Данная теорема дала возможность получить [8–10] дополнительные функции $V_a(x)$, добавление которых к исходной функции Ляпунова $V(x)$ при выполнении условий теоремы Барбашина–Красовского последовательно сужает множество обращения в нуль ее производной, начиная с исходного множества M и до нулевой точки, сохраняя знакоопределенность самой функции и ее производной в остальных точках.

Для построения дополнительных функций важное значение имеет структура множества M, определяемая его геометрическими и дифференциальными особенностями. Во-первых (геометрические особенности), множество M может быть суммой подмножеств: $M = \bigcup\limits_{i=1}^{s} M_i,\ M_i = \{x : \varphi_i(x) = 0, \nabla\varphi_i(x) \neq 0\}$. Кроме того, попарные пересечения $M_k \bigcap M_m$ могут содержать ненулевые точки для некоторых k, m, что также необходимо учитывать. Во-вторых (дифференциальные особенности), для некоторых множеств M_i вопрос о существовании инвариантного множества может не решаться первыми двумя членами последовательности (3), т.е. в теореме 4 для точек $x_0 \in M_i$ имеем $i > 1$.

Приведем два типа дополнительных функций [8–10], с использованием которых строится функция Ляпунова со знакоопределенной производной. В простейшем случае, когда множество M обращения в нуль производной $\dot{V}(x)$ описывается одной функцией $\varphi(x) : M = \{x : \varphi(x) = 0, \nabla\varphi(x) \neq 0\}$ и задача существования инвариантного множества решается первыми двумя членами последовательности (3), в качестве дополнительной функции принимается следующая функция

$$V_a = \langle \nabla\varphi(x), f(x)\rangle^{2m} \big\langle \langle \nabla\varphi(x), f(x)\rangle, \varphi(x)\big\rangle.$$

Функция типа

$$V_{ai} = \langle \nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle^{2m} \big\langle \langle \nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle, \varphi_i(x)\big\rangle \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{s} \varphi_j^2(x)$$

принимается в качестве дополнительной функции для множества M_i в случае, когда множество M состоит из нескольких множеств: $M = \bigcup\limits_{i=1}^{s} M_i$, для каждого из которых задача существования инвариантного множества решается первыми двумя членами последовательности (3).

3. Две теоремы. С целью рассмотрения всего круга задач устойчивости (включая и неустойчивость) поставим вопрос о максимальном расширении области знакоопределенности производной для известной функции со знакопостоянной производной, не обращая при этом внимания на значения самой функции. Используя метод дополнительных функций, получаем следующий результат.

Теорема 5. Пусть для системы (1) известна функция $V(x)$ со знакопостоянной производной $\dot{V}(x)$. Множество $M = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ описывается функцией $\varphi(x) : \varphi(x) = 0, \nabla\varphi(x) \neq 0$ для $x \in M$. Неравенство нулю функций $\varphi_i(x)$, описывающих множества M_i, возникающие при построении инвариантного множества, устанавливается членами разложения конечного порядка. Тогда добавлением конечного числа дополнительных функций строится функция $V_f(x)$, производная которой $\dot{V}_f$ обладает одним из следующих свойств: 1) $\dot{V}_f(x)$ является знакоопределенной функцией; 2) $\dot{V}_f(x)$ является знакопостоянной функцией, при этом множество ее обращения в нуль является инвариантным множеством.

Доказательство. Множество M представим в виде суммы множеств:

$$M = \bigcup_{i=1}^{s} M_i, \;\; M_k \bigcap M_m = \emptyset, (k, m = 1, ..., s),$$

$$M_i = \{x : \varphi_i(x) = 0, \; \nabla\varphi_i(x) \neq 0\}.$$

С помощью теоремы 4 исследуем множества M_i на инвариантность. Возможны два случая. В первом случае уравнения (2) для $i = 1, ..., s$ допускают только нулевое решение, т.е. все множества M_i не содержат инвариантного множества, и для системы (1) строится функция V_f со знакоопределенной производной (свойство 1 теоремы 5) методом дополнительных функций [8–10].

Во втором случае наряду с множествами M_i, не содержащими инвариантных множеств, имеются множества $M_{p1}, ..., M_{pc}$, содержащие инвариантные множества, описываемые функциями $\varphi_{p1}(x)$, ..., $\varphi_{pc}(x)$: $\varphi_{pi}(x) = 0$, $i = 1$, ..., c. Пусть среди функций $\varphi_{pi}(x)$ имеется k независимых. Примем их в качестве новых переменных $y_i = \varphi_{pi}(x)$, $i = 1$, ..., k. Тогда дополнительные функции, соответствующие первой группе, обеспечивают знакоопределенность производной на соответствующих множествах, а функции второй группы приводят к знакоопределенности лишь по отношению к переменным y_i. Поэтому построенная функция будет иметь y-знакоопределенную производную $\dot{V}_f(x)$, при этом в силу построения множество $G = \{x : y = 0\}$ является инвариантным (свойство 2 теоремы 5). Теорема доказана. □

В теории устойчивости подход, в котором исходным моментом является построение функции со знакоопределенной производной, связан, в основном, с изучением свойства неустойчивости. Для функций, обладающих свойством 1 теоремы 5, доказана первая теорема Ляпунова о неустойчивости и ее обобщения. Представляет интерес (как сама по себе, так и в связи с известными результатами) следующая теорема, доказанная для функций, обладающих свойством 2 теоремы 5.

Теорема 6. Пусть для системы (1) существует функция $V(x)$, производная которой $\dot{V}(x)$ является функцией знакопостоянной и представима в форме знакоопределенной функции $\dot{V}(y)$, меньшего числа переменных $y_1, ..., y_k$ $(k < n)$, причем множество $M = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ является инвариантным. При этом в любой сколь угодно малой окрестности B нуля существуют точки $x \in B \backslash M$, в которых функция $V(x)$ принимает значения того же знака, что и $\dot{V}(x)$. Тогда нулевое решение неустойчиво.

Доказательство. Выберем достаточно малую окрестность B_0 нуля, в которой выполнены условия теоремы 6, и покажем, что в любой сколь угодно малой окрестности нуля $B \subset B_0$ найдется точка, начинающаяся в которой траектория системы (1) покидает B_0. Для удобства сделаем замену переменных $y = y(x)$, $y = (y^{(1)}, \ y^{(2)})$, выделив подвектор $y^{(1)} = (y_1, ..., y_k)$, относительно которого производная $\dot{V}(y^{(1)})$ знакоопределена и который определяет $M = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ уравнением $y^{(1)} = 0$. Необходимо отметить, что ввиду инвариантности множества M траектории системы (1), начинающиеся в области $B_0 \setminus M$, не попадают в множество M и поэтому для этих траекторий выполнено $\dot{V}(y^{(1)}) > 0$. Здесь и в дальнейшем $\dot{V}(y^{(1)})$ принята положительно определенной.

В силу условий теоремы начальная точка x_0, для которой $V(x_0) > 0$, присутствует в любой сколь угодно малой окрестности из $B_0 \setminus M$. Вдоль траектории, начинающейся в этой точке, выполнено неравенство $V(x(t)) >$

$> V(x_0)$ и, поскольку $V(x)$ непрерывна и $V(0) = 0$, то $\|y^{(1)}(t)\| \geq \alpha > 0$. Тогда в силу знакоопределенности $\dot V(y^{(1)})$ имеем $\dot V(y^{(1)}) \geq \beta > 0$. Следовательно,

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \dot V(y^{(1)}(\tau))d\tau \geq V(x_0) + \beta(t - t_0).$$

Отсюда следует, что $V(x(t))$ возрастает с увеличением времени, и траектория $x(t)$ покидает заданную окрестность нуля, сколь бы близко к нулю не была выбрана начальная точка x_0. Это и доказывает неустойчивость нулевого решения. □

Представляет интерес сравнить теоремы 3 и 6. Обе они используют знакопостоянные производные. Однако свойства множеств обращения их в нуль прямо противоположны. Если в теореме 3 это множество не содержит траекторий системы, то в теореме 6 множество полностью состоит из траекторий системы, являясь инвариантным множеством. Ситуация, представленная в теореме 6, характерна для исследований в качественной теории дифференциальных уравнений и появляется при изучении особых точек дифференциальных уравнений и в задачах частичной устойчивости. Кроме того, использование теоремы 6 представляется перспективным при комплексном рассмотрении задач устойчивости, которое может быть осуществлено с использованием метода дополнительных функций.

4. Примеры. Рассмотрим две линейные системы для иллюстрации применения теоремы 6 и возможности ее использования в дальнейшем исследовании особых точек. Для простоты системы выбраны таким образом, что поведение траекторий в окрестности нуля очевидно и выбор функций Ляпунова в форме, удовлетворяющей теореме 6 без применения теоремы 5, не вызывает затруднений.

Пример 1. Исследуем устойчивость нулевого решения системы

$$\dot x_1 = 2x_1, \qquad \dot x_2 = -\omega x_3, \qquad \dot x_3 = \omega x_2. \tag{4}$$

Для функции $V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ имеем $\dot V = 4x_1^2$. Производная $\dot V$ положительно постоянна. Множество $M = \{x : \dot V(x) = 0\}$ представляет собой плоскость Ox_2x_3 и является инвариантным множеством. Функция V положительно определена. Таким образом, условия теоремы 6 выполнены и нулевое решение системы (4) неустойчиво. Для дальнейшего исследования поведения системы в плоскости Ox_2x_3 можно использовать начальную функцию V, приняв $x_1 = 0$. Тогда в инвариантном множестве $M = \{x : x_1 = 0\}$ система (4) принимает вид

$$\dot x_2 = -\omega x_3, \qquad \dot x_3 = \omega x_2. \tag{5}$$

Для функции $V = x_2^2 + x_3^2$ получаем $\dot V = 0$, что означает устойчивость нулевого решения системы (5). Таким образом, использование функции $V(x)$ сначала для исходной системы (4), а затем для инвариантного множества позволило получить полную картину движения для системы (4). Траектории являются спиралями, расположенными на цилиндрах $x_2^2 + x_3^2 = c^2$, вдоль которых точки расходятся от окружностей $x_1 = 0$, $x_2^2 + x_3^2 = c^2$, удаляясь вдоль оси Ox_1 в бесконечность и вращаясь вокруг нее с угловой скоростью ω.

Отметим, что возможность получения полной картины поведения решения системы (4) обеспечена выбором функции $V(x)$. Для установления неустойчивости с использованием теоремы 6 можно применить функцию $V = x_1^2$. Однако, для дальнейшего анализа системы в инвариантном множестве эта функция непригодна.

Несколько более сложный и разнообразный характер носят траектории следующей системы.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = 2x_1, \qquad \dot{x}_2 = 3x_2, \qquad \dot{x}_3 = -4x_3. \tag{6}$$

Исследование системы (6) начнем с функции $V = x_1^2 + x_2^2$. Для ее производной имеем выражение $\dot{V} = 4x_1^2 + 6x_2^2$. Условия теоремы 6 выполнены и нулевое решение системы (6) неустойчиво. Для анализа поведения системы в инвариантном множестве $M = \{x : x_1 = x_2 = 0\}$ рассматриваемая функция ничего не дает. Однако функция $V = x_3^2$ показывает, что нулевое решение уравнения $\dot{x}_3 = -4x_3$ является асимптотически устойчивым по второй теореме Ляпунова. Эта же функция $V = x_3^2$ с применением теоремы Ризито дает асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (6) по отношению к переменной x_3 ввиду того, что множество $M = \{x : \dot{V} = 0\}$ является инвариантным, а в остальных точках $\dot{V} < 0$.

Покажем, как этот же результат можно получить с помощью функций $V_i = x_i^2$, $i = 1, 2$. Для каждой из этих функций условия теоремы 6 выполнены, и подтверждается полученный вывод о неустойчивости нулевого решения системы (6). Дальнейший анализ для функций V_i проводится по одной схеме. Поэтому выполним его для функции $V_1 = x_1^2$. В инвариантном множестве $M = \{x : x_1 = 0\}$ система (6) принимает вид

$$\dot{x}_2 = 3x_2, \qquad \dot{x}_3 = -4x_3. \tag{7}$$

Начальная функция V_1 ничего не дает. Исследование можно продолжить с помощью функции $V_2 = x_2^2$. С помощью теоремы 6 получаем неустойчивость нулевого решения системы (7), а затем с помощью второй теоремы Ляпунова устанавливаем асимптотическую устойчивость нулевого решения уравнения $\dot{x}_3 = -4x_3$ с использованием функции $V_3 = x_3^2$. Эту же функцию V_3 можно применить к системе (7) и с помощью теоремы Ризито установить асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (7) по отношению к переменной x_3. Затем неустойчивость нулевого решения уравнения $\dot{x}_2 = 3x_2$ устанавливается с помощью первой теоремы Ляпунова о неустойчивости для функции V_2.

Приведенные рассуждения показывают, что метод функций Ляпунова позволяет не только получить исчерпывающее заключение об устойчивости и неустойчивости движений, но и дает возможность сформировать полное представление о движениях системы в окрестности особой точки. Важное значение при этом наряду с теоремами об устойчивости сыграло свойство инвариантности, которое, собственно, и обеспечило простейший вид систем (4), (6). В нелинейном случае преимущества, которые дает инвариантность, обеспечивает использование метода дополнительных функций, и, в частности, применение в исследовании теоремы 5.

Заключение. В настоящей работе решена задача максимального улучшения функции со знакопостоянной производной, которое может позволить метод дополнительных функций. Как следует из теоремы 5, получаемая функция знакоопределена всюду в окрестности нуля, кроме некоторого множества, которое является инвариантным. Функция с такими свойствами производной обладает большими преимуществами. Во-первых, позволяет получить новые теоремы об устойчивости и неустойчивости. В настоящей работе – это теорема 6 о неустойчивости. Во-вторых, возникает новое направление в исследованиях по устойчивости редукционного плана, связанное с продолжением изучения движений в инвариантном множестве, что включает идеи частичной устойчивости.

Совместное применение метода функций Ляпунова, метода дополнительных функций и теории инвариантности открывает путь к комплексному исследованию устойчивости: выделению асимптотически устойчивых, устойчивых и неустойчивых движений в окрестности особой точки, что можно использовать в качестве классификации особых точек. Частично это продемонстрировано в статье на рассмотренных примерах.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.; *Ляпунов А.М.* Собр. соч. Т. 2. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – 476 с.
2. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. 4-е изд., исправл. – М.: Наука, 1990. – 176 с.
3. *Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.* Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. – 1952. – **86**, № 3. – С. 453–456.
4. *Красовский Н.Н.* Об условиях обращения теорем А.М. Ляпунова о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1955. – **101**, № 1. – С. 17–20.
5. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987.– 256 с.
6. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964. – 168 с.
7. *Risito C.* Sulla stabilita asintotica parziale // Ann. Math. Pura Appl. – 1970. – **84**. – P. 279–292.
8. *Ковалев А.М.* Построение функции Ляпунова со знакоопределенной производной для систем, удовлетворяющих теореме Барбашина–Красовского // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, вып. 2. – С. 266–272.
9. *Ковалев А.М., Суйков А.С.* Построение функции Ляпунова при выполнении теоремы Барбашина–Красовского // Докл. НАН Украины (математика). – 2008. – № 12. – С. 22–27.

10. *Ковалев А.М., Суйков А.С.* Функции Ляпунова для систем, удовлетворяющих условиям теоремы Барбашина–Красовского // Проблемы управления и информатики. – 2008. – №6. – С. 5–15.
11. *Levi-Civita T., Amaldi U.* Lezioni di Meccanica Razionale. – Bolonga: Zanichelli, 1952. – **2**. – 671 p.
12. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела.– Киев: Наук. думка. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.

A.M. Kovalev

Invariance and instability

In the paper, the problem of stability of the zero solution of an autonomous system of differential equations is considered. The problem of maximal improvement of a function with the derivative of constant sign is solved which the additional functions method can permit. The theorem on the construction of a function with definite derivative or with the derivative of constant sign is obtained for which the set of derivative's zeros is invariant. The theorem of instability is proved for the case of the existance of a derivative of constant sign. Illustrative examples are considered.

Keywords: *additional functions method, derivative of constant sign, instability, autonomous system of differential equations.*

О.М. Ковальов

Інваріантність і нестійкість

У роботі розглядається задача стійкості нульового розв'язку автономної системи диференціальних рівнянь. Розв'язано задачу максимального поліпшення функції зі знакосталою похідною, яке може дозволити метод додаткових функцій. Отримано теорему про побудову функції зі знаковизначеною похідною або зі знакопостійною похідною, множина обернення якої в нуль є інваріантною. Доведено теорему про нестійкість у випадку існування знакопостійної похідної. Розглянуто ілюстративні приклади.

Ключові слова: *метод додаткових функцій, знакостала похідна, нестійкість, автономна система диференціальних рівнянь.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
kovalev@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 26.05.10