ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2009. Вып. 39

УДК 532.546

©2009. **Г.М. Аббасов**

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

В работе изучается процесс вытеснения двух жидкостей, который в общем случае описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных. В качестве локальной аппроксимации процесса, предложена линейная модель и разработан алгоритм решения задачи моделирования динамики течения многокомпонентной смеси, основанный на использовании конечно-разностного метода в сеточной области W_h^τ. При этом предполагается, что решение $u(x,t)$ является гладким и правая часть системы уравнений зависит от векторных функций векторных аргументов u, u_x, u_{xx}.

При определенных режимах разработки нефтяных и нефтегазоконденсатных месторождений в пласте возникает многофазное течение многокомпонентной смеси, при котором между движущимися различными фазами (F_b, F_h) осуществляется интенсивный массообмен. Переход отдельных компонент из одной фазы к другой влечет за собой изменение составов и физических свойств фильтрующихся фаз. Такие процессы происходят, например, при разработке месторождений сложного компонентного состава, когда газированная нефть вытесняется водой или газом. Основой для расчета таких процессов служит теория многофазной многокомпонентной фильтрации, интенсивно развивающейся в последние годы.

Одна из основных технологий добычи нефти при разработке месторождений основана на вытеснении нефти или газа водой. В частности, этот процесс является основным при вторичных методах добычи нефти и газа в напорном режиме.

Если капиллярное давление между фазами невелико и им, как и влиянием силы тяжести, можно пренебречь, то процесс вытеснения допускает простое математическое описание, впервые предложенное американскими исследователями С. Бакли и М. Леверетта [1]. При фильтрации флюидов в пористой среде, в том числе при вытеснении одной жидкости другой, наблюдается значительное сопротивление движения флюидов, определяемое как особенностью самой среды, так и свойствами фильтрующих флюидов. От этих особенностей среды и флюидов зависит полнота и качество вытеснения.

Считается, что изменение коэффициента извлечения нефти происходит под влиянием трех основных геофизических факторов: вязкости жидкостей, поверхностных сил натяжения, параметров макро и микро неоднородности пласта. Модель процесса вытеснения основана на введении понятий насыщенности водой пласта, относительных фазовых проницаемостей и использовании обобщенного закона Дарси [2]. Анализ одномерных течений позволяет выявить основные эффекты и характерные особенности совместной фильтрации двух жидкостей и сопоставлять с результатами лабораторных экспериментов.

В представленной работе предлагается локальная аппроксимация уравнения фильтрации в сеточной области W_h^τ [3].

Как известно, процесс фильтрации жидкости с разрывами давлений и скоростей в нефтеносном пласте описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных составного типа, которая имеет вид

$$C\,[u(x,t)]_t = B(x,t)[u(x,t)]_x + E_\varepsilon(x,t)[u(x,t)]_{xx}, \tag{1}$$

где $C = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi_2 \end{vmatrix}$ – постоянная матрица размером 4x4, характеризующая параметры жидкости и пористой среды: α – коэффициент малой сжимаемости жидкости; χ – коэффициент пористости среды; χ_1, χ_2 – коэффициенты пористости на подвижных водонефтяных границах; ε – искусственная малая вязкость жидкости;

$$B = \begin{Vmatrix} f_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi(\rho)p_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(\rho)p_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad E_\varepsilon = \begin{Vmatrix} f(\rho) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

здесь $f(\rho)$ – коэффициент подвижности фаз, зависящий от насыщенности пласта.

Через $u(x,t)$ обозначено искомое решение

$$u(x,t) = \begin{bmatrix} p(x,t) \\ \rho(x,t) \\ F_1(x,t) \\ F_2(x,t) \end{bmatrix},$$

где $p(x,t), \rho(x,t)$ обозначают соответственно давление и водонасыщенность пласта; $F_1(x,t), F_2(x,t)$ – водонефтяные границы;

$$\big[u(x,t)\big]_t = \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} p(x,t) \\ \rho(x,t) \\ F_1(x,t) \\ F_2(x,t) \end{bmatrix}, \qquad \big[u(x,t)\big]_x = \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} p(x,t) \\ \rho(x,t) \\ F_1(x,t) \\ F_2(x,t) \end{bmatrix},$$

$$\big[u(x,t)\big]_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{bmatrix} p(x,t) \\ \rho(x,t) \\ F_1(x,t) \\ F_2(x,t) \end{bmatrix};$$

$[\cdot]_t$, $[\cdot]_x$, $[\cdot]_{xx}$ – соответственно производные первого порядка по времени t, первого и второго порядка по x.

Начальные и граничные условия для давления пласта $p(x,t)$ сформируем из условий непрерывности потока (скорости) жидкости:

$$p(x,t)\big|_{t=0}= \varphi_0(x), \quad x \in D_x,$$

$$p(x,t)\big|_{x=0}= \varphi_1(t), \quad t \in D_t,$$

$$p(x,t)\big|_{x=1}= \varphi_2(t), \quad t \in D_t,$$

$$\big[f(\rho)\frac{\partial p_i}{\partial x}\big]_{x=x_i(t)-0} = \big[f(\rho)\frac{\partial p_i}{\partial x}\big]_{x=x_i(t)+0} \ \ (i=1,2).$$

Для показателя насыщенности пласта водой $\rho(x,t)$ начальные и граничные условия имеют вид

$$\rho(x,t)\big|_{t=0} = \rho_0(x), \quad x \in D_x,$$

$$\rho(x,t)\big|_{x=0} = \rho_i(t), \quad t \in D_t,$$

$$\rho(x,t)\big|_{x=1} = \rho_2(t), \quad t \in D_t.$$

Зная начальное расположение фаз, можно сформулировать для подвижных границ задачу Коши:

$$F_i(x,t)\big|_{t=0} = F_i^0(x), \quad x \in D_x, \quad i=1,2.$$

Уравнение фильтрации (1) перепишем в операторном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(u) \equiv \Phi(u, u_x, u_{xx}), \tag{2}$$

где Φ – некоторая заданная вектор-функция от векторных аргументов $u,\ u_x$, u_{xx}.

Оператор D аппроксимируем линейным выражением

$$\overline{D}(u) = \Phi_m^n+(\Phi_u)_m^n\big[u-(u)_m^n\big]+(\Phi_{u_x})_m^n\big[u_x-(u_x)_m^n\big]+(\Phi_{u_{xx}})_m^n\big[u_{xx}-(u_{xx})_m^n\big]. \tag{3}$$

Здесь $(u)_m^n = u(x_m,t_n),\ (u_x)_m^n = u_x(x_m,t_n),\ (u_{xx})_m^n = u_{xx}(x_m,t_n)$, где (x_m,t_n) – узловая точка сеточной области W_n^τ.

Считая решение $u(x,t)$ гладким, а значит разности $u-(u)_m^n,\ u_x-(u_x)_m^n$, $u_{xx}-(u_{xx})_m^n$ малыми, рассмотрим вместо (2) систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \widehat{D}u + C. \tag{4}$$

Здесь $\widehat{D}u$ – линейный дифференциальный оператор, определяемый однородной частью (3), а C – матрица-константа, объединяющая остальные части (3):

$$\widehat{D}u = (\Phi_u)_m^n u + (\Phi_{u_x})_m^n u_x + (\Phi_{u_{xx}})_m^n u_{xx},$$

$$C = \Phi_m^n - (\Phi_u)_m^n (u)_m^n - (\Phi_{u_x})_m^n (u_x)_m^n - (\Phi_{u_{xx}})_m^n (u_{xx})_m^n.$$

Из теории дифференциальных уравнений в частных производных известно, что решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (4) можно выразить формулой [4]

$$u(x,t) = Qu(x,0) + Ct, \tag{5}$$

где Q – линейный интегральный оператор

$$Qu(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\eta,t) u(x+\eta,0) d\eta, \tag{6}$$

а q – соответствующая данной системе линейных дифференциальных уравнений (4) матрица функций.

Формула (5) позволяет выразить решение в момент времени $t = t_{n+1} = t_n + \tau$ через значения функции $u(x_m,t_n) = (u)_m^n$ в момент времени t_n. Чтобы использовать формулу (5), построим интерполяционную функцию $Pu^n(x)$ в узловых точках (x_m,t_n) сеточной области W_n^τ

$$Pu^n(x) = \sum_k u_{m+k}^n P_k(x), \tag{7}$$

где $P_k(x)$ – соответствующие полиномы. Отметим, что интерполяционная функция (7) может быть использована для определения значений $(u_x)_m^n$, входящих в выражение (3), а следовательно, в коэффициенты $\widehat{D}$ и C правой части (4). В соответствии с (5) получаем

$$u_{n+1}^m = \sum_{m=k} \alpha_k u_{m+k}^n + C\tau, \tag{8}$$

где $\alpha_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} q(\eta,\tau) P_k(x_m+\eta) d\eta.$

Формула (8) и является искомой расчетной формулой для (5) и (6). В результате, для нахождения численного решения задачи получено семейство разностных схем, которые отличаются лишь способом локальной аппроксимации (3) и видом интерполяции (7).

1. *Чарный И.А.* Подземная гидрогазодинамика. – М.: Гостоптехиздат, 1963. – 396 с.
2. *Басниев К.С., Власов А.М., Кочина И.Н., Максимов В.М.* Подъемная гидравлика. – М.: Недра, 1986. – 303 с.
3. Численные решения многомерных задач газовой динамики / Под редакцией С.К. Годунова. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
4. *Дьяченко В.Ф.* Основные понятия вычислительной математики. – М.: Наука, 1972. – 120 с.

Ин-т прикл. математики БГУ, Баку, Азербайджан
Получено 18.08.09