ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2009. Вып. 39

УДК 531

©2009. **В.П. Ольшанский, К.В. Аврамов, С.В. Ольшанский**

ЗАМКНУТЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МЕЩЕРСКОГО ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗАКОНАХ УМЕНЬШЕНИЯ РАДИУСА ЛЕТЯЩЕГО ШАРА

Преобразуя дифференциальное уравнение падения шара переменных размеров, при различных законах уменьшения радиуса во времени, удалось свести его к уравнению типа Бесселя и найти замкнутые аналитические решения.

Введение. Движение шара переменной массы и размеров рассматривают при изучении полета горящих частиц топлив, мелкодисперсных химически активных отходов (выбросов) производств, падающих, сгорающих метеоритов и пр. Поэтому исследование особенностей баллистики тел, у которых меняются размеры во времени, относится к актуальным научно-техническим задачам. Математическое моделирование полета шаровидных капель с учетом их испарения в высокотемпературной газовой среде проводилось в работах [1, 2] без учета реактивной силы. Имеются работы [3, 4], где использовались уравнения движения сферической капли с учетом реактивной силы при линейном уменьшении радиуса частицы во времени. Однако в них не построено точных аналитических решений этих уравнений. В этой области механики приходится решать нелинейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, которые относятся к классу Риккати [5]. Только в отдельных случаях найдены их точные аналитические решения. Ниже, в дополнение к этим случаям, при довольно общих предположениях, касающихся силы сопротивления и реактивной силы, найдены аналитические решения уравнений вертикального движения тела выражаемые с помощью цилиндрических функций.

1. Линейный закон уменьшения радиуса тела.

1.1. Решение уравнения движения с использованием гипотезы К.Э. Циолковского. При постановке задачи баллистики используем гипотезу К.Э. Циолковского [6], согласно которой относительная скорость отделения частиц от шара является постоянной величиной. Кроме того предполагаем, что сила сопротивления воздуха пропорциональна площади поперечного сечения шара и квадрату скорости его падения. Как и в работе [1], убывание радиуса тела подчиняем линейному закону:

$$r = r(t) = r_0 - \gamma t. \qquad (1)$$

Здесь $r_0 = r(0)$ – начальное значение радиуса в момент истечения (старта) частицы; $\gamma > 0$ – коэффициент, характеризующий скорость уменьшения радиуса.

В рамках указанных предположений скорость падения шара $\upsilon = \upsilon(t)$, как функция времени, является решением нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{d\upsilon}{dt} - \frac{3\gamma}{r}\upsilon_r + \frac{\alpha}{r}\upsilon^2 = g \qquad (2)$$

при начальном условии

$$\upsilon(0) = \upsilon_0, \qquad (3)$$

где $\upsilon_r \equiv \mathrm{const}$ – относительная скорость отделения частиц от шара; α – коэффициент аэродинамического сопротивления воздуха; g – ускорение свободного падения; υ_0 – начальное значение скорости.

В дальнейшем направления скоростей υ_r и $\upsilon(t)$ считаем противоположными, т.е. рассматриваем случай, когда реактивная сила ускоряет движение.

Учитывая (1), перейдем от переменной t к переменной r. В результате перехода дифференциальное уравнение движения (2) принимает вид

$$\frac{d\upsilon}{dr} + \frac{3}{r}\upsilon_r - \frac{\alpha_0}{r}\upsilon^2 = -g_0. \qquad (4)$$

Здесь $\alpha_0 = \dfrac{\alpha}{\gamma}$; $\quad g_0 = \dfrac{g}{\gamma}$.

Чтобы построить аналитическое решение уравнения (4) при начальном условии

$$\upsilon(r_0) = \upsilon_0, \qquad (5)$$

выразим $\upsilon(r)$ через вспомогательную функцию $w(r)$ по формуле [1]

$$\upsilon = -\frac{r}{\alpha_0}\frac{\frac{dw}{dr}}{w}. \qquad (6)$$

Подставив (6) в (4), приходим к линейному уравнению типа Бесселя

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} - \frac{\alpha_0}{r}\left(g_0 + \frac{3\upsilon_r}{r}\right)w = 0. \qquad (7)$$

Его общим решением является

$$w(\tau) = c_1 I_\nu(\tau) + c_2 K_\nu(\tau). \qquad (8)$$

Здесь $\nu = 2\sqrt{3\alpha_0\upsilon_r}$; $\quad \tau = 2\sqrt{\alpha_0 g_0 r}$; c_1, c_2 – произвольные постоянные; $I_\nu(\tau), K_\nu(\tau)$ – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда индекса ν.

Подставив (8) в (6), получаем выражение скорости падения шара с точностью до постоянной $c = c_2 c_1^{-1}$

$$\upsilon(\tau) = \frac{1}{2\alpha_0}\left(\frac{\tau\left[cK_{\nu+1}(\tau) - I_{\nu+1}(\tau)\right]}{cK_\nu(\tau) + I_\nu(\tau)} - \nu\right). \tag{9}$$

Решение (9) удовлетворяет начальному условию (5), когда

$$c = \frac{\upsilon_1 I_\nu(\tau_0) + I_{\nu+1}(\tau_0)}{K_{\nu+1}(\tau_0) - \upsilon_1 K_\nu(\tau_0)}, \tag{10}$$

где $\upsilon_1 = \dfrac{1}{\tau_0}(2\alpha_0\upsilon_0 + \nu)$; $\tau_0 = 2\sqrt{\alpha_0 g_0 r_0}$.

1.2. Решение уравнения движения с использованием зависимости $\boldsymbol{\upsilon_r = \upsilon(t)}$ для расчета реактивной силы. Эта постановка задачи отличается от предыдущей постановки тем, что вместо гипотезы К.Э. Циолковского принимаем зависимость $\upsilon_r = \upsilon(t)$, т.е. абсолютную скорость движения частиц, отделившихся от шара, считаем равной нулю. Так поступали в работах [2, 4]. С учетом указанного допущения дифференциальное уравнение вертикального падения шара относится к типу уравнения Леви–Чивита и имеет вид

$$\frac{d\upsilon}{dr} + \frac{3}{r}\upsilon - \frac{\alpha_0}{r}\upsilon^2 = -g_0. \tag{11}$$

Подстановкой (6) его преобразуем в линейное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{4}{r}\frac{dw}{dr} - \frac{\alpha_0 g_0}{r} w = 0,$$

решение которого с точностью до произвольных постоянных c_1 и c_2 представляется суммой

$$w(\tau) = \tau^{-3}[c_1 I_3(\tau) + c_2 K_3(\tau)].$$

Применив операцию дифференцирования к выше указанному решению, в соответствии с (6), получаем

$$\upsilon(\tau) = \frac{\tau}{2\alpha_0}\frac{K_4(\tau) - cI_4(\tau)}{K_3(\tau) + cI_3(\tau)}. \tag{12}$$

Начальное условие (5) выполняется, когда

$$c = c_1 c_2^{-1} = \frac{\tau_0 K_4(\tau_0) - 2\alpha_0\upsilon_0 K_3(\tau_0)}{\tau_0 I_4(\tau_0) + 2\alpha_0\upsilon_0 I_3(\tau_0)}. \tag{13}$$

Таким образом, выражения (9), (10), (12), (13) позволяют находить скорость движения частицы при линейном уменьшения ее радиуса во времени.

2. Показательный закон уменьшения радиуса тела.

2.1. Решение уравнения движения с использованием гипотезы К.Э. Циолковского. При постановке задачи, в отличие от рассмотренной в п. 1.1, убывание радиуса подчиняем показательному закону:

$$r(t) = r_0 \exp(-\lambda t), \tag{14}$$

в котором $r_0 = r(0)$, $\lambda > 0$ – коэффициент, характеризующий скорость уменьшения r.

Заметим, что движение шара, масса которого изменялась по показательному закону, рассматривалось в работах [6, 7] и др. В отличие от указанных публикаций, будем учитывать изменение не только массы, но и размеров движущегося тела.

Согласно принятым допущениям, определение скорости падения шара, как функции времени $\upsilon = \upsilon(t)$, сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{d\upsilon}{dt} + \frac{3}{r}\frac{dr}{dt} \mid \upsilon_r \mid + \frac{\alpha}{r}\upsilon^2 = g \tag{15}$$

при начальном условии (3).

Далее перейдем от t к новой переменной ξ по формулам

$$\xi = \exp(\lambda t); \quad \frac{d\xi}{dt} = \lambda\xi; \quad \frac{d\upsilon}{dt} = \lambda\xi\frac{d\upsilon}{d\xi}; \quad r = \frac{r_0}{\xi}.$$

Вместо выражений (15) и (3) получаем соответственно

$$\frac{d\upsilon}{d\xi} + \beta\upsilon^2 = \frac{g_1}{\xi}; \tag{16}$$

$$\upsilon(1) = \upsilon_0. \tag{17}$$

Здесь $\beta = \dfrac{\alpha}{\lambda r_0}$, $\quad g_1 = \dfrac{g}{\lambda} + 3 \mid \upsilon_r \mid$.

Чтобы избавиться от υ^2 в уравнении (16), выразим скорость через вспомогательную функцию $w = w(\xi)$ и ее производную по формуле

$$\upsilon = \frac{1}{\beta}\frac{dw}{d\xi}w^{-1}. \tag{18}$$

Подставив (18) в (16), приходим к линейному уравнению типа Бесселя

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} - \frac{\beta g_1}{\xi}w = 0$$

с общим решением

$$w(\eta) = \eta(c_1 I_1(\eta) + c_2 K_1(\eta)), \tag{19}$$

в котором $\eta = 2\sqrt{\beta g_1 \xi}$; c_1, c_2 – произвольные постоянные; $I_1(\eta), K_1(\eta)$ – соответственно модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда индекса единица.

Продифференцировав решение (19) в соответствии с (18), получаем выражение скорости падения шара

$$\upsilon(\eta) = \frac{2g_1}{\eta}\frac{cI_0(\eta) - K_0(\eta)}{cI_1(\eta) + K_1(\eta)}. \tag{20}$$

В нем $c = c_1 c_2^{-1}$ – произвольная постоянная; $I_0(\eta), K_0(\eta)$ – соответственно модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевого индекса.

Аналитическое решение (20) удовлетворяет начальному условию (17), когда

$$c = \frac{2g_1 K_0(\eta_0) + \upsilon_0\eta_0 K_1(\eta_0)}{2g_1 I_0(\eta_0) - \upsilon_0\eta_0 I_1(\eta_0)}, \qquad \eta_0 = 2\sqrt{\beta g_1}. \tag{21}$$

Таким образом, расчет скорости падения шара можно проводить с помощью таблиц цилиндрических функций [8, 9].

2.2. Решение уравнения движения, когда реактивная сила пропорциональна скорости полета. В отличие от пункта 1.2 здесь изменение радиуса шара описываем выражением (14). При такой постановке задачи дифференциальное уравнение падения шара имеет вид

$$\frac{d\upsilon}{d\xi} - \frac{3}{\xi}\upsilon + \beta\upsilon^2 = \frac{g}{\lambda\xi}.$$

Подставив в него выражение (18), приходим к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \frac{3}{\xi}\frac{dw}{d\xi} - \frac{\beta g}{\lambda\xi}w = 0. \tag{22}$$

Общее решение уравнения (22) с точностью до постоянных c_1 и c_2 выражается через цилиндрические функции

$$w = \eta^4[c_1 I_4(\eta) + c_2 K_4(\eta)]. \tag{23}$$

Здесь $\eta = 2\sqrt{\dfrac{\beta g}{\lambda}\xi}$; $I_4(\eta)$, $K_4(\eta)$ – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда индекса четыре.

Продифференцировав решение (23) в соответствии с (18), приходим к формуле скорости падения шара

$$\upsilon(\eta) = \frac{2g}{\lambda\eta}\frac{AI_3(\eta) - K_3(\eta)}{AI_4(\eta) + K_4(\eta)}, \qquad (24)$$

в которой $A = c_1 c_2^{-1}$ – произвольная постоянная; $I_3(\eta), K_3(\eta)$ – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда индекса три.

Константу A определяем с помощью начального условия (16). Она принимает значение

$$A = \frac{2gK_3(\eta_0) + \lambda\eta_0\upsilon_0 K_4(\eta_0)}{2gI_3(\eta_0) - \lambda\eta_0\upsilon_0 I_4(\eta_0)}, \qquad (25)$$

где $\eta_0 = 2\sqrt{\dfrac{\beta g}{\lambda}}$.

Используя рекуррентные соотношения и таблицы цилиндрических функций [8, 9] по формулам (24) и (25) несложно рассчитать зависимость $\upsilon(t)$.

3. Движение шара с убывающим радиусом по закону В. Срезневского. Этот закон удовлетворительно описывает испарение капель, диффузионное сгорание твердых частиц и пр. Поэтому его используют при решении многих инженерных задач.

Согласно Срезневскому, площадь поверхности шара пропорциональна времени его полета, т.е. имеет место соотношение [10]

$$r(t) = r_0\sqrt{1 - \epsilon t},$$

в котором $r_0 = r(0)$; $\epsilon > 0$ – параметр, определяющий скорость уменьшения радиуса частицы.

Полное исчезновение частицы происходит за время $t = \epsilon^{-1}$. Поэтому процесс движения рассматриваем на конечном промежутке времени $t \in [0; \epsilon^{-1}]$, приняв, как и ранее, квадратичный закон аэродинамического сопротивления.

Скорость падения шара является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\upsilon}{dt} - \frac{3}{2}\mu\epsilon\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\upsilon + \frac{3k}{4\rho r}\upsilon^2 = g, \qquad (26)$$

где $0 \le \mu \le 1$ – коэффициент реактивности, учитывающий, что отделение не всей массы от шара происходит в сторону, противоположную направлению движения.

Перейдем от переменной t к переменной $\xi = \sqrt{1 - \epsilon t}$. Поскольку

$$r = r_0\xi; \qquad \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\epsilon}{2\xi}\frac{d\upsilon}{d\xi},$$

то (26) принимает вид

$$\frac{d\upsilon}{d\xi} + \frac{3\mu}{\xi}\upsilon - \alpha_2\upsilon^2 = -q\xi, \qquad (27)$$

где $\alpha_2 = \dfrac{3k}{2\rho r_0 \epsilon}$; $q = \dfrac{2g}{\epsilon}$.

Уравнение (27) решаем при начальном условии (17). С помощью представления

$$\upsilon(\xi) = \upsilon_1(\xi) + \frac{3\mu}{2\alpha_2 \xi} \tag{28}$$

из (27) получаем

$$\frac{d\upsilon_1}{d\xi} - \alpha_2 \upsilon_1^2 = -q\xi + \frac{3\mu}{2\alpha_2 \xi^2}\left(1 - \frac{3\mu}{2}\right). \tag{29}$$

Выразим неизвестную функцию $\upsilon_1(\xi)$ через вспомогательную функцию $w(\xi)$ по формуле

$$\upsilon_1(\xi) = -\frac{1}{\alpha_2} w^{-1} \frac{dw}{d\xi}. \tag{30}$$

Подставив (30) в (29), приходим к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \left[q\alpha_2 \xi - \frac{3\mu}{2}\left(1 - \frac{3\mu}{2}\right)\frac{1}{\xi^2}\right] w = 0. \tag{31}$$

Решение уравнения (31) имеет вид

$$w(\xi) = \eta^{1/3}\left[c_1 I_\nu(\eta) + c_2 K_\nu(\eta)\right]. \tag{32}$$

Здесь $\eta = \beta\xi^{3/2}$; $\beta = \dfrac{2}{3}\sqrt{\mid q \mid \alpha_2}$; $\nu = \dfrac{1}{3} \mid 3\mu - 1 \mid$; c_1, c_2 – произвольные постоянные; $I_\nu(\eta)$, $K_\nu(\eta)$ – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда индекса ν, который зависит от коэффициента реактивности μ.

Продифференцировав решение (32) в соответствии с (30), при учете (28) получаем формулу скорости падения шара

$$\upsilon(\eta) = \frac{3\beta^{2/3}\eta^{1/3}}{2\alpha_2}\left[\frac{K_{\nu+1}(\eta) - cI_{\nu+1}(\eta)}{K_\nu(\eta) + cI_\nu(\eta)} - \frac{3(\nu - \mu) + 1}{3\eta}\right]. \tag{33}$$

В ней $c = c_1 c_2^{-1}$ – произвольная постоянная; индекс цилиндрических функций в числителе на единицу больше, чем в знаменателе.

Используя (33) и (17), находим значение постоянной c

$$c = \frac{K_{\nu+1}(\beta) - \upsilon^* K_\nu(\beta)}{I_{\nu+1}(\beta) + \upsilon^* I_\nu(\beta)}. \tag{34}$$

Здесь $\upsilon^* = \dfrac{2\alpha_2 \upsilon_0}{3\beta} + \dfrac{3(\nu - \mu) + 1}{3\beta}$.

Без учета реактивной силы $\mu = 0$, $\nu = 1/3$. Цилиндрические функции такого индекса можно выразить через функции Эйри, протабулированные в работе [11]. Именно с помощью функций Эйри представлены решения задач баллистики в работах [1, 12], когда радиус частицы уменьшался по закону Срезневского.

Выводы. Нелинейное уравнение Мещерского, которое описывает движение сферического тела переменного радиуса, имеет аналитическое решение в цилиндрических функциях как для линейного, так и для показательного законов испарения, а также закона В. Срезневского. Все решения, независимо от закона испарения, выражаются в модифицированных функциях Бесселя.

1. *Кучеренко С.І., Ольшанський В.П., Ольшанський С.В., Тіщенко Л.М.* Балістика крапель, які випаровуються при польоті. – Харків: ХНТУСГ, 2007. – 304 с.
2. *Новоселов В.С.* Аналитическая механика систем с переменными массами. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1969. – 240 с.
3. *Севриков В.В., Карпенко В.А., Севриков И.В.* Автоматические быстродействующие системы пожарной защиты. – Севастополь: Сев ГТУ, 1996. – 260 с.
4. *Абрамов Ю.А., Росоха В.Е., Шаповалова Е.А.* Моделирование процессов в пожарных стволах. – Харьков: Фолио, 2001. – 195 с.
5. *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 276 с.
6. *Циолковский К.Э.* Собрание сочинений. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – Т. II. – 453 с.
7. *Космодемьянский А.А.* Курс теоретической механики. Ч. 2, [3-е изд.]. – М.: Просвещение, 1966. – 398 с.
8. *Абрамовиц А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с.
9. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
10. *Фукс Н.А.* Испарение и рост капель в газообразной среде. – М.: Из-во АН СССР, 1958. – 92 с.
11. *Смирнов А.Д.* Таблицы функций Эйри и специальных вырожденных гипергеометрических функций для асимптотических решений дифференциальных уравнений второго порядка. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 260 с.
12. *Ol'shanskii V.P., Ol'shanskii S.V.* Lower estimate of the flight range of a fire–extinguishing liquid drop // J. of Engineering Physics and Thermophysics. – 2007. – **80**, № 4. – P. 697–701.

Национальный техн. ун-т
"Харьковский политехнический институт"
stasolsh@mail.ru

Получено 23.03.09