УДК 62-50:519.7

©2009. **В.Ф. Щербак**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ПО ЕГО ПРОЕКЦИИ

Предлагается метод решения задачи наблюдения для дифференциальных уравнений, правые части которых являются линейными функциями относительно неизмеряемых компонент фазового вектора. Для таких систем приведена схема построения функциональных выражений, определяющих вдоль решений вспомогательной системы искомые неизвестные, как функции от известных величин. Метод основан на динамическом расширении исходной системы ее управляемым прототипом [1, 2] и на нелинейных методах синтеза управлений, стабилизирующих отклонения решений расширенной системы дифференциальных уравнений от заданных инвариантных многообразий. Решена задача определения вектора угловой скорости твердого тела по измерениям одной из его проекций на оси подвижной системы координат. С помощью невырожденной замены координат, динамические уравнения Эйлера приведены к форме, которая является линейной относительно неопределенных величин. Для полученной расширенной системы синтезированы алгебраические выражения, с использованием которых найдены асимптотические оценки компонент вектора угловой скорости.

1. Синтез дополнительных алгебраических соотношений в задаче наблюдения нелинейных динамических систем. Рассматривается задача наблюдения для нелинейных динамических систем

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$y = h(x), \quad y \in R^k. \tag{2}$$

Здесь $x(t)$ – решение системы (1), которое следует определить по информации о выходе системы – функции $y(t)$, значения которой известны для любого момента времени $t > 0$. Предполагается, что функции $f(x), h(x)$ являются дифференцируемыми функциями своих аргументов.

Представим фазовый вектор x в виде двух подвекторов $x = (x_1, x_2)^T$, где $x_1 = (x^1, x^2, \dots, x^k)^T$, $\quad x_2 = (x^{k+1}, x^{k+2}, \dots, x^n)^T$. Будем считать, что система (1), (2) с помощью невырожденной замены переменных приведена к виду, при котором измеряются первые k координат, $y(t) = x_1(t)$. Кроме того, ограничим класс рассматриваемых объектов системами, правые части уравнений которых линейны относительно неизмеряемых переменных $x_2(t)$

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2, \\ \dot{x_2} = f_2(x_1) + g_2(x_1)x_2, \\ \ y = x_1. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $g_1(x_1), g_2(x_1)$ – матрицы размерностей $k \times (n-k)$ и $(n-k) \times (n-k)$ соответственно.

Наряду с системой (3) рассмотрим ее управляемый аналог. Для этого перепишем систему (3), вводя в правые части n вспомогательных функций $u_1(x_1, p_1, p_2) \in R^k$, $u_2(x_1, p_1, p_2) \in R^{n-k}$:

$$\begin{cases} \dot{p_1} = f_1(p_1) + g_1(p_1)p_2 + u_1, \\ \dot{p_2} = f_2(p_1) + g_2(p_1)p_2 + u_2. \end{cases} \tag{4}$$

Далее будем рассматривать (4) как некоторое динамическое расширение системы дифференциальных уравнений (3), с помощью которого необходимо определить неизвестные компоненты фазового вектора $x_2(t)$. В частности [4], если управления u_1, u_2 можно подобрать такими, чтобы решения системы (4) с любыми начальными условиями асимптотически стремились к наблюдаемому решению системы (3), то система (4) будет наблюдателем для системы (3).

Целью данной работы не является непосредственное построение нелинейного наблюдателя для системы (3). Предлагается более общая конструкция, состоящая в синтезе алгебраических выражений, которые вдоль любых решений расширенной системы (3), (4) выражают неизвестные величины $x_2(t)$ через известные: наблюдаемый выход $x_1(t)$ и функции $p_1(t), p_2(t)$ – решения вспомогательной системы (4). Иными словами, требуется подобрать управления $u_1(.), u_2(.)$ таким образом, чтобы существовала некоторая функция $\Psi(x_1, p_1, p_2)$ – новый выход для расширенной системы (3), (4), значения которой вдоль решений системы (3), (4) определяли бы асимптотическую оценку вектора $x_2(t)$.

Опишем основные этапы предлагаемой схемы решения задачи наблюдения.

1) Рассматривая совместно уравнения (3), (4), получаем систему $2n$ дифференциальных уравнений, содержащую n управлений $u_1(.), u_2(.)$.

Будем решать задачу синтеза управлений, считая выполненными

Предположение I_1) Управления $u_1(.), u_2(.)$ могут зависеть лишь от известных величин $x_1(t)$ и фазового вектора системы (4) – координат $p_1(t), p_2(t)$;

Предположение I_2) Для замкнутой системы (3), (4), полученной в результате подстановки выбранных функций $u_1(x_1, p_1, p_2), u_2(x_1, p_1, p_2)$ в правые части (4), выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши $\forall p(0) \in R^n, t > 0$.

Любые функции $u_1(.), u_2(.)$, удовлетворяющие предположениям I_1, I_2, будем называть допустимыми управлениями. С учетом этих соглашений далее можем полагать, что решения системы (4), при выбранном допустимом управлении существуют, и для любых заданных начальных условий являются известными функциями времени.

2) Обозначим через $e_i = p_i - x_i, \quad i = 1, 2,$ – рассогласования решений систем (3), (4). Вычитая из уравнений (4) уравнения (3), получим систему дифференциальных уравнений в отклонениях

$$\begin{cases} \dot{e_1} = G_1(x_1, p_1) + g_1(x_1)e_2 + u_1, \\ \dot{e_2} = G_2(x_1, p_1) + g_2(x_1)e_2 + u_2, \end{cases} \tag{5}$$

где слагаемые $G_i(x_1, p_1) = [g_i(p_1) - g_i(x_1)]p_2 + f_i(p_1) - f_i(x_1), \quad i = 1, 2$, зависят только лишь от известных величин x_1, p_1, p_2. Поэтому, не нарушая условие I_1, введем новые управления v_1, v_2 по формулам $v_i = G_i(x_1, p_1) + u_i, \quad i = 1, 2$. При этом функции $v_1(.), v_2(.)$ могут зависеть лишь от переменных x_1, p_1, p_2 или, что то же самое, от x_1, e_1, p_2. Система (5) для отклонений имеет вид

$$\begin{cases} \dot{e_1} = g_1(x_1)e_2 + v_1(x_1, e_1, p_2), \\ \dot{e_2} = g_2(x_1)e_2 + v_2(x_1, e_1, p_2). \end{cases} \tag{6}$$

3) Основная идея излагаемого подхода – выразить неизвестные величины x_2 как некоторые функции от известных x_1, e_1, p_2 может быть переформулирована следующим образом. Будем подбирать управления $v_1(.), v_2(.)$ такими, чтобы траектории системы (3), (6) допускали (пока неопределенное) инвариантное многообразие в пространстве переменных x, e, задаваемое системой $n - k$ равенств

$$e_2 - \Phi(x_1, e_1) = 0. \tag{7}$$

Тогда, если начальные условия выбраны такими, что траектория, на которой производятся измерения, принадлежит этому многообразию и функция $\Phi(x_1, e_1)$ известна, то по формуле (7) можно вычислить значения $e_2(t)$ или, что то же самое, $x_2(t)$. В общем случае это не так, но если многообразие (7) будет обладать свойством глобального асимптотического притяжения для всех траекторий расширенной системы (3), (6), то в силу непрерывности функции $\Phi(x_1, e_1)$ с ее помощью можно определить асимптотическую оценку $e_2(t)$.

2. Синтез управлений. Рассмотрим вначале задачу о синтезе управлений, при которых многообразие, определяемое формулами (7), будет инвариантным многообразием для некоторых траекторий расширенной системы (3), (6).

Теорема 1. *Для всякой дифференцируемой вектор-функции $\Phi(x_1, e_1)$ существует допустимое управление $v_2(x_1, e_1, p_2)$ такое, что многообразие, описываемое равенствами (7), является инвариантным многообразием системы дифференциальных уравнений (3), (6).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделаем замену переменных e_2 по формуле $\eta = e_2 - \Phi(x_1, e_1)$, где вектор η характеризует отклонение траекторий системы (3), (6) от многообразия (7), а $\Phi(x_1, e_1)$ – произвольная, непрерывно дифференцируемая по своим аргументам функция. В новых переменных уравнения в отклонениях (6) таковы

$$\begin{gathered} \dot{e_1} = g_1(x_1)(\Phi + \eta) + v_1, \\ \dot{\eta} = [g_2(x_1) + (\Phi_{x_1} - \Phi_{e_1})g_1(x_1)](\Phi + \eta) - \Phi_{x_1}[f_1(x_1) + g_1(x_1)p_2] - \Phi_{e_1}v_1 + v_2, \end{gathered} \tag{8}$$

где через Φ_{x_1}, Φ_{e_1} обозначены якобиевы матрицы

$$\Phi_{x_1} = \frac{\partial \Phi(x_1, e_1)}{\partial x_1}, \qquad \Phi_{e_1} = \frac{\partial \Phi(x_1, e_1)}{\partial e_1}.$$

Пусть функция v_1 является допустимой согласно предположению I_1, например, $v_1 \equiv 0$. В качестве управления v_2 выберем функцию

$$v_2 = -[g_2(x_1) + (\Phi_{x_1} - \Phi_{e_1})g_1(x_1)]\Phi + \Phi_{x_1}[f_1(x_1) + g_1(x_1)p_2] + \Phi_{e_1}v_1.$$

Отметим, что v_2 является функцией только лишь аргументов x_1, p_1, p_2, а значит, такое управление удовлетворяет условию I_1.

При таком v_2 система (8) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{e_1} = g_1(x_1)(\Phi + \eta) + v_1, \\ \dot{\eta} = [g_2(x_1) + (\Phi_{x_1} - \Phi_{e_1})g_1(x_1)]\eta, \end{cases} \tag{9}$$

откуда следует, что функция $\eta(t) \equiv 0$ удовлетворяет системе (9).

Таким образом, установлено, что если в некоторый момент времени равенство (7) выполнено, то оно будет выполнено тождественно для всех t. Теорема доказана. □

Для того, чтобы обеспечить свойство глобального притяжения для инвариантного многообразия (7) в нашем распоряжении остается выбор вида функции $\Phi(x_1, e_1)$ и управления $v_1(x_1, e_1, p_2)$.

Пусть, например, функция $\Phi(x_1, e_1)$ является частным решением следующей системы уравнений в частных производных первого порядка:

$$g_2(x_1) + (\Phi_{x_1} - \Phi_{e_1})g_1(x_1) = -(\lambda, \dots, \lambda)^T, \qquad \Phi(x_1, 0) = 0,$$

где $\lambda > 0$. Тогда, если соответствующее этому решению управление $v_2(x_1, e_1)$ удовлетворяет ограничению I_2, то многообразие, определяемое формулами (7), обладает свойством глобального притяжения, а сами эти формулы определяют асимптотическую оценку для переменных $x_2(t)$.

Положим $v_1 = -g_1(x_1)\Phi(x_1, e_1) - \Lambda e_1$, где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$. В результате система (9) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{e_1} = g_1(x_1)\eta - \Lambda e_1, \\ \dot{\eta} = -\Lambda\eta. \end{cases} \tag{10}$$

Пусть $V(t) = \dfrac{1}{2}(e_1^T e_1 + \eta^T \eta)$ – функция Ляпунова для системы (10). Ее производная в силу системы (10) равна

$$\dot{V}(t) = -e_1^T \Lambda e_1 + e_1^T g_1(x_1)\eta - \eta^T \Lambda \eta.$$

Будем считать, что наблюдаемая траектория $x(t)$ является ограниченной функцией времени. В силу ограниченности значений $g_1(x_1)$ из последнего равенства следует, что значение λ могут быть выбраны таким образом, что производная функции Ляпунова $\dot{V}(t)$ становится определенно отрицательной функцией времени. Таким образом, в результате предложенной схемы синтеза управлений получаем, что

1) траектории системы (3), (6) стремятся к многообразию, которое описывается равенствами $e_2 - \Phi(x_1, e_1) = 0$;

2) $\lim\limits_{t\to\infty} e_1(t) = 0$;

3) из граничного условия $\Phi(x_1, 0) = 0$ для дифференцируемой функции $\Phi(x_1, e_1)$ следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} e_2(t) = 0$.

3. Определение угловой скорости твердого тела. Сведение уравнений Эйлера к системе, линейной относительно неизмеряемых компонент. Рассмотрим уравнения, описывающие вращение по инерции твердого тела вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром тяжести тела. Обозначив $a_1 = \dfrac{A_2 - A_3}{A_1}$, $a_2 = \dfrac{A_3 - A_1}{A_2}$, $a_3 = \dfrac{A_1 - A_2}{A_3}$, где A_1, A_2, A_3 моменты инерции тела относительно главных осей. Запишем динамические уравнения Эйлера

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = a_1\omega_2\omega_3, \\ \dot{\omega}_2 = a_2\omega_1\omega_3, \\ \dot{\omega}_3 = a_3\omega_1\omega_2. \end{cases} \tag{11}$$

Предположим, что выходом системы (11), известным в любой момент времени, является первая компонента $\omega_1(t)$ вектора угловой скорости $\omega(t)$. Нашей задачей является определение по этой информации значений $\omega_2(t), \omega_3(t)$.

Вначале приведем систему (11) к форме (3), к которой применима описанная выше схема решения задачи наблюдения. Для этого выполним замену переменных по формулам

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1, \\ x_2 = a_1\omega_2\omega_3, \\ x_3 = a_1(a_2\omega_3^2 + a_3\omega_2^2). \end{cases} \tag{12}$$

Определитель якобиевой матрицы преобразования (12)

$$\det\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\omega_1, \omega_2, \omega_3)} = 2a_1^2({a_2\omega_3}^2 - {a_3\omega_2}^2).$$

Чтобы преобразование координат было невырожденным, будем рассматривать только такие траектории системы (11), для которых выполнено

Предположение I_3) Наблюдаемый объект не является осесимметричным $A_2 \neq A_3$, т.е. $a_1 \neq 0$, и в течение всего процесса наблюдения выражение ${a_2\omega_3}^2 - {a_3\omega_2}^2 \neq 0$.

В частности, для несимметричных тел, распределение масс которых удовлетворяет неравенствам $A_1 < A_2,\ A_1 < A_3$ либо $A_1 > A_2,\ A_1 > A_3$, знаки a_2, a_3 различны и указанное предположение выполнено при $\omega_2^2 + \omega_3^2 \neq 0$, т.е. когда выход $\omega_1(t)$ не равен тождественно константе.

В случае, когда $a_1 = 0$, выход $\omega_1(t)$ постоянен, и система (11), очевидно, ненаблюдаема. Отметим также, что для симметричных тел, когда $a_2 = 0$ или

$a_3 = 0$, уравнения (11) становятся линейными и решение задачи наблюдения может быть найдено путем построения наблюдателя Луенбергера [5].

В новых переменных система (11) приобретает вид, линейный относительно неизвестных переменных x_2, x_3,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 = a x_1 x_2, \end{cases} \tag{13}$$

где $a = 4a_2a_3$. При этом $x_1(t) \equiv \omega_1(t)$, т.е. выход системы (13) совпадает с выходом системы (11), а значит является известной функцией времени. Таким образом, задача определения значений компонент $\omega_2(t), \omega_3(t)$ фазового вектора системы (11) сводится к нахождению переменных $x_2(t), x_3(t)$ системы (13) и последующему решению алгебраических уравнений (12).

4. Оценка неизвестных компонент с помощью дополнительных алгебраических соотношений. Для определения $x_2(t), x_3(t)$ составим вспомогательную систему, содержащую две свободные функции $u_i(x_1, p),\ i = 2, 3$,

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = p_2, \\ \dot{p}_2 = x_1 p_3 + u_2(x_1, p), \\ \dot{p}_3 = a x_1 p_2 + u_3(x_1, p). \end{cases} \tag{14}$$

Для любых допустимых управлений и начальных условий $p(0) = p_0$ значения $p(t)$ могут быть найдены в результате решения задачи Коши. Поэтому, далее они будут считаться известными функциями времени.

Составим уравнения ошибок, обозначив соответствующие отклонения траекторий через $e_i(t) = p_i(t) - x_i(t),\ \ i = 1, 2, 3$. Вычитая (13) из (14), получаем уравнения в отклонениях:

$$\begin{cases} \dot{e_1} = e_2, \\ \dot{e_2} = x_1 e_3 + u_2(x_1, p), \\ \dot{e_3} = a x_1 e_2 + u_3(x_1, p). \end{cases} \tag{15}$$

Пусть $f_2(e_1, x_1), f_3(e_1, x_1)$ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции. Будем искать такие управления u_2 и u_3, чтобы выражения

$$\begin{cases} e_2 = f_2(e_1, x_1), \\ e_3 = f_3(e_1, x_1) \end{cases} \tag{16}$$

были инвариантными соотношениями [3] для системы (13), (15). Иными словами, если равенства (16) выполнены в какой-то момент времени для некоторых решений системы (13), (15), то они будут выполнены для любых моментов времени. На этих решениях неизвестные $e_2(t), e_3(t)$, а, следовательно, $x_2(t), x_3(t)$ выражаются по формулам (16) через известные функции времени $e_1(t), x_1(t)$.

Покажем, что такие управления существуют. Действительно, выполним в системе (15) замену переменных e_2, e_3 по формулам

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = e_2 - f_2(e_1, x_1), \\ \varepsilon_3 = e_3 - f_3(e_1, x_1). \end{cases} \tag{17}$$

В новых переменных последние два уравнения системы (15) принимают вид

$$\begin{cases} \dot\varepsilon_2 = (\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_2}{\partial e_1})\varepsilon_2 + x_1\varepsilon_3 + x_1 f_3 - \dfrac{\partial f_2}{\partial e_1} f_2 - \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(p_2 - f_2) + u_2, \\ \dot\varepsilon_3 = (ax_1 + \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_3}{\partial e_1})\varepsilon_2 + ax_1 f_2 - \dfrac{\partial f_3}{\partial e_1} f_2 - \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(p_2 - f_2) + u_3. \end{cases} \tag{18}$$

В качестве управлений u_2 и u_3 выберем функции

$$\begin{cases} u_2 = -x_1 f_3 + \dfrac{\partial f_2}{\partial e_1} f_2 + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(p_2 - f_2), \\ u_3 = -ax_1 f_2 + \dfrac{\partial f_3}{\partial e_1} f_2 + \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(p_2 - f_2). \end{cases} \tag{19}$$

Отметим, что управления (19) удовлетворяют условию I_1. В результате подстановки (19) в уравнения (18) последние становятся однородными относительно переменных $\varepsilon_2, \varepsilon_3$.

$$\begin{cases} \dot\varepsilon_2 = (\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_2}{\partial e_1})\varepsilon_2 + x_1\varepsilon_3, \\ \dot\varepsilon_3 = (ax_1 + \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_3}{\partial e_1})\varepsilon_2. \end{cases} \tag{20}$$

Следовательно, $\varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = 0$ являются решением системы (20). Это означает, что для любых дифференцируемых функций $f_2(e_1, x_1), f_3(e_1, x_1)$ существует указанное многообразие, состоящее из решений системы (13), (15), начальные условия которых удовлетворяет (16).

В общем случае произвольные траектории расширенной системы (13), (15) не принадлежат указанному многообразию, однако, если последнее обладает свойствами глобального притяжения, то в силу непрерывности $f_2(e_1, x_1)$ и $f_3(e_1, x_1)$ формулы (16) позволяют находить асимптотические оценки переменных $e_2(t), e_3(t)$, а, значит, и $x_2(t), x_3(t)$.

5. Стабилизация отклонений от инвариантного многообразия. Для обеспечения условий притяжения всех траекторий системы (13), (15) к многообразию, описываемому соотношениями (16), достаточно наличия свойства глобальной асимптотической устойчивости для тривиального решения системы (20). Так как вид управлений уже зафиксирован формулами (19), то для обеспечения свойства глобального притяжения в нашем распоряжении остается выбор функций $f_2(e_1, x_1), f_3(e_1, x_1)$. Введем обозначения:

$$\begin{cases} V_2(x_1, e_1) = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_2}{\partial e_1}, \\ V_3(x_1, e_1) = ax_1 + \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_3}{\partial e_1}, \end{cases} \tag{21}$$

с учетом которых система (20) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_2 = V_2(x_1, e_1)\varepsilon_2 + x_1\varepsilon_3, \\ \dot{\varepsilon}_3 = V_3(x_1, e_1)\varepsilon_2. \end{cases} \tag{22}$$

В силу имеющего произвола выбора функций $f_2(e_1, x_1), f_3(e_1, x_1)$ можем рассматривать функции V_2, V_3 как управления. Выберем эти управления такими, чтобы нулевое решение системы (22) стало глобально асимптотически устойчивым.

Теорема 2. *Пусть значения выхода $x_1(t)$ системы (13) в течение процесса измерений принадлежат отрезку $[x_1^{min}; x_1^{max}]$, не содержащему точку 0. Тогда существуют дифференцируемые функции $f_2(e_1, x_1), f_3(e_1, x_1)$ такие, что система (13), (15) имеет инвариантное многообразие (16), обладающее свойством глобального притяжения для всех траекторий системы.*

Доказательство. Доказательство проведем в два этапа. На первом, в соответствии с предложенной в предыдущих разделах методикой, найдем семейство управлений V_2, V_3, при которых переменные $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ связаны однородным инвариантным соотношением. На втором этапе, устремив одну из переменных ε_i, $i = 2, 3$, к нулю, автоматически обеспечим стремление к нулю другой координаты.

Потребуем вначале, чтобы система (22) имела линейное инвариантное многообразие $\varepsilon_3 = k\varepsilon_2$, где k – константа, $\text{sign}\ k = \text{sign}\ x_1$ (по условию $x_1(t)$ не меняет знака). Введем переменную η – отклонение траекторий (22) от этого многообразия: $\varepsilon_3 = k\varepsilon_2 + \eta$. Уравнение для η имеет вид

$$\dot{\eta} = -kx_1\eta + (V_3 - kV_2 - k^2x_1)\varepsilon_2. \tag{23}$$

Чтобы уравнение стало однородным относительно η, накладываем ограничение на управление V_3, полагая $V_3 = kV_2 + k^2x_1$. Обозначим $W = V_2 + kx_1$, рассматривая ее как функцию, на которую пока еще не наложено никаких условий. Перепишем (22) в виде

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_2 = W\varepsilon_2 + x_1\eta, \\ \dot{\eta} = -kx_1\eta. \end{cases} \tag{24}$$

Не ограничивая общности, предположим для определенности, что $x_1 > 0$. Рассмотрим функцию Ляпунова $V = \dfrac{\varepsilon_2^2 + \eta^2}{2}$ и вычислим ее производную в силу системы (24)

$$\dot{V} = \varepsilon_2(W\varepsilon_2 + x_1\eta) + \eta(-k\eta x_1) = \varepsilon_2^2 W + \varepsilon_2\eta x_1 - k\eta^2 x_1 \leq$$

$$\leq \varepsilon_2^2 W + \frac{\varepsilon_2^2 + \eta^2}{2} x_1 - k\eta^2 x_1 = (W + \frac{x_1}{2})\varepsilon_2^2 + (\frac{x_1}{2} - kx_1)\eta^2 < -\varepsilon_2^2 - \eta^2$$

при условии, что $W + \frac{x_1}{2} < -1$ и $k < \frac{1}{x_1^{\min}} + \frac{1}{2}$.

Таким образом, показано, что выбором функции W и константы k, можно обеспечить выполнение последних неравенств. Следовательно, переменные ε_2, η асимптотически стремятся к нулю. Так как при этом выполнено равенство $\varepsilon_3 = k\varepsilon_2 + \eta$, то переменная ε_3 также стремится к нулю. А это и означает, что инвариантное многообразие (16) является притягивающим.

В заключение укажем окончательный вид искомых инвариантных соотношений (16), выбирая их из семейства функций, удовлетворяющих всем приведенным ограничениям. Чтобы производная от функции Ляпунова стала отрицательной выберем k достаточно большим положительным числом и положим $W = -2 - \frac{x_1}{2} < -1 - \frac{x_1}{2}$. Тогда $V_2 = -2 - (k + \frac{1}{2})x_1$ и $V_3 = -2k - k\frac{x_1}{2}$. В соответствии с (21) для определения вида инвариантных соотношений имеем уравнения

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial e_1} = -2 - (k + \frac{1}{2})x_1, \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_3}{\partial e_1} = -2k - (a + \frac{k}{2})x_1. \tag{25}$$

Общее решение этих уравнений в частных производных первого порядка имеет вид

$$f_2 = -2x_1 - \frac{1}{2}(k + \frac{1}{2})x_1^2 + F_2, \qquad f_3 = -2kx_1 - \frac{1}{2}(a + \frac{k}{2})x_1^2 + F_3, \tag{26}$$

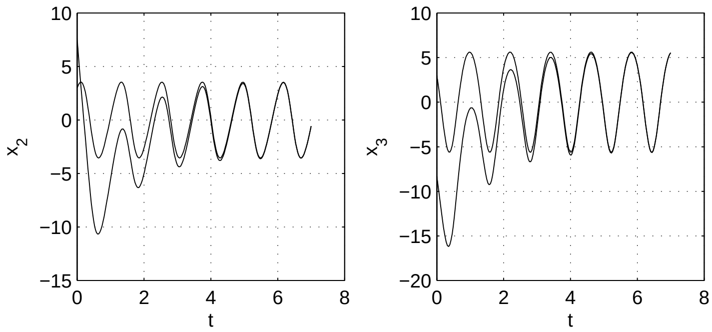
где $F_2(x_1 + e_1)$ и $F_3(x_1 + e_1)$ – произвольные дифференцируемые функции аргумента $x_1 + e_1$. Пусть $F_2(x_1 + e_1) = 2(x_1 + e_1)$, $\;F_3(x_1 + e_1) = 2k(x_1 + e_1)$, тогда

$$f_2(x_1, e_1) = -\frac{1}{2}(k + \frac{1}{2})x_1^2 + 2e_1, \quad f_3(x_1, e_1) = -\frac{1}{2}(a + \frac{k}{2})x_1^2 + 2ke_1. \tag{27}$$

С учетом (17), оценки неизвестных компонент фазового вектора системы (13) находим по формулам

$$\begin{cases} x_2 = p_2 + \frac{1}{2}(k + \frac{1}{2})x_1^2 - 2(p_1 - x_1) - \varepsilon_2, \\ x_3 = p_3 + \frac{1}{2}(a + \frac{k}{2})x_1^2 - 2k(p_1 - x_1) - \varepsilon_3, \end{cases} \tag{28}$$

где переменные $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ стремятся к нулю. Теорема доказана. □



Графики решений исходной системы и их аппроксимация.

6. Численное моделирование. Предложенная в работе схема была промоделирована путем численного интегрирования. Рассматривалась задача наблюдения системы (13), решение которой сводит задачу наблюдения фазового вектора динамических уравнений Эйлера (10) к решению алгебраических уравнений (11). Результаты одного из вариантов счета приведены на рисунке. В качестве исходного выхода системы (13) взята координата $x_1(t) = \omega_1(t)$ – численного решения системы (13) с начальными условиями $x_1(0) = 3; \quad x_2(0) = 3; \quad x_3(0) = 3$. Для решений вспомогательной системы начальные условия равны $p_1(0) = 10; \quad p_2(0) = 10; \quad p_3(0) = 10$. Центральные моменты инерции рассматриваемой модели удовлетворяют условию I_3: $A_1 = 3;\ A_2 = 15;\ A_3 = 14$. На рисунке координаты $x_2(t), x_3(t)$ (периодические колебания) сопоставлены с их оценками (изображены графики функций, находящихся в правых частях формул (28)). Результаты численного моделирования показывают работоспособность предложенного метода решения задачи наблюдения для нелинейных систем.

1. *Щербак В.Ф.* Задача отслеживания состояния нелинейной системы при неполной информации о движении// Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 127–132.
2. *Ковалев А. М., Щербак В. Ф.* Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993. – 285 с.
3. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-ие НГУ, 1965. – 221 с.
4. *Krener A., Respondek W.* Nonlinear observers with linearizable error dynamics // SIAM J. Control Optim. – 1985. – **23**, № 2. – P. 197–216.
5. *Luenberger D.* Introduction to observers // IEEE Trans. Aut. Contr. – 1977. – **3**. – P. 47–52.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
shvf@iamm.ac.donetsk.ua
Получено 10.07.09