

УДК 531.38

©2009. И.А. Болграбская, А.Я. Савченко, Н.Н. Щепин

## НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ЗАМКНУТОЙ “КРУГОВОЙ” СИСТЕМЫ

Рассмотрена конечномерная модель замкнутого упругого стержня, с круговой конфигурацией его упругой оси. Стержень моделировался с помощью системы  $n$  одинаковых гироскопов Лагранжа, связанных упругими сферическими шарнирами. Полагалось, что упругие шарниры допускают повороты на углы, принимающие произвольное значение, однако их разность мала. Изучена возможность существования у такой системы режима равновесия во вращающейся системе координат. Получены необходимые условия устойчивости найденного режима относительного равновесия. Детально изучен случай, когда система состоит из четырех цилиндров.

В работах [1–4] были найдены равновесные конфигурации систем  $n$  симметричных твердых тел, связанных упругими сферическими шарнирами. Во всех рассмотренных случаях предполагалось, что системы замкнуты, при этом начальная точка  $O_1$  оси симметрии тела  $S_1$  и конечная точка  $O_{n+1}$  оси симметрии тела  $S_n$  совпадают. Кроме того, полагалось, что шарниры допускают повороты на углы, принимающие произвольное значение, однако их разность мала. Такие системы используются в качестве конечноразностной аппроксимации упругих стержневых систем и позволяют учесть их геометрическую нелинейность.

В работе [5] для систем, связанных упругими цилиндрическими шарнирами (плоский случай), были найдены достаточные условия устойчивости их положения равновесия в случае “круговой” конфигурации и конфигурации “восьмерка”.

В настоящей работе рассмотрена система тел, связанных упругими сферическими шарнирами (пространственный случай), образующая “круговую” конфигурацию. Полагалось, что система, как целое, вращается со скоростью  $\Omega$  вокруг неподвижной оси. Найдены условия существования и необходимые условия устойчивости положения равновесия изучаемой системы во вращающейся системе координат.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему  $n$  одинаковых гироскопов Лагранжа, связанных упругими сферическими шарнирами, расположенными в точках  $O_k$  пересечения осей симметрии тел  $S_k$  и  $S_{k-1}$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Полагаем, что на систему не действуют внешние силы и моменты, т.е. ее центр масс  $C$  неподвижен. Для замкнутых систем концевые точки тел  $S_1$  и  $S_n$  совпадают ( $O_1 = O_{n+1}$ ). Тогда, как и в [1], имеем

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{o}_k \mathbf{o}_{k+1} = 0. \quad (1)$$

Свяжем с каждым телом  $S_k$  систему координат  $C_k X_k Y_k Z_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ), где  $C_k$  – центр масс тела  $S_k$ , а ось  $C_k Z_k$  направлена вдоль его оси симметрии. Кроме того, введем неподвижную систему координат  $CXYZ$  и осевую систему координат  $CX'Y'Z'$ , которая вращается вокруг неподвижной оси  $CY$  со скоростью  $\Omega$ . В случае, когда все оси симметрии тел  $O_k O_{k+1}$  лежат в одной плоскости  $CXZ$ , ось  $CY$  направлена перпендикулярно этой плоскости.

Определим положение связанной системы координат  $C_k X_k Y_k Z_k$  по отношению к осевой углами Крылова  $\psi_k, \theta_k, \varphi_k$ . Тогда, учитывая, что для одинаковых тел имеем  $O_k O_{k+1} = \text{const} = h$ , из (1) получаем

$$f_1 = \sum_{k=1}^n \sin \psi_k \cos \theta_k = 0, \quad f_2 = \sum_{k=1}^n \sin \theta_k = 0, \quad f_3 = \sum_{k=1}^n \cos \psi_k \cos \theta_k = 0. \quad (2)$$

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [m \dot{r}_{kc}^2 + A(p_k^2 + q_k^2) + B r_k^2], \quad (3)$$

где  $m$  – масса тела  $S_k$ ,  $A, B$  – соответственно его экваториальный и осевой моменты инерции,  $r_{kc}$  – расстояние от центра масс тела  $S_k$  до неподвижной точки  $C$ , а  $p_k, q_k, r_k$  – компоненты вектора абсолютной угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_k$  тела  $S_k$  в связанной системе координат, которая может быть представлена как  $\boldsymbol{\omega}_k = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_k^r$ , где  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_y$  – угловая скорость осевой системы координат ( $\mathbf{e}_y$  – орт оси  $CY$ ), а  $\boldsymbol{\omega}_k^r$  – угловая скорость связанной системы координат относительно осевой.

Компоненты абсолютной угловой скорости тела  $S_k$ , как функции углов Крылова и скорости вращения  $\Omega$ , выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} p_k &= (\dot{\psi}_k + \Omega) \cos \theta_k \sin \varphi_k + \dot{\theta}_k \cos \varphi_k, \\ q_k &= (\dot{\psi}_k + \Omega) \cos \theta_k \cos \varphi_k - \dot{\theta}_k \sin \varphi_k, \\ r_k &= \dot{\varphi}_k - (\dot{\psi}_k + \Omega) \sin \theta_k. \end{aligned} \quad (4)$$

Если положить, что центр масс тела  $S_k$  – центр оси симметрии тела, и учесть неподвижность общего центра масс  $C$ , то, аналогично [1], получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{kc} &= \frac{h}{2} \{ -(\boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{e}_k^3) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (2i-1)(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{e}_i^3) - \\ & - \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n [2(n-i)+1](\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{e}_i^3) \}, \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mathbf{e}_k^3$  – орт оси симметрии тела  $S_k$ . В случае, когда нижний индекс второй суммы равен  $n+1$ , считаем ее равной нулю.

Подстановка (4), (5) в (3) дает

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left\{ A' [(\dot{\psi}_j + \Omega)^2 \cos^2 \theta_j + \dot{\theta}_j^2] + B [\dot{\varphi}_j - (\dot{\psi}_j + \Omega) \sin \theta_j]^2 + m c^2 \left( \sum_{i=1}^j b_{ij} A_{ij} + \sum_{i=j+1}^n c_{ij} A_{ij} \right) \right\}. \quad (6)$$

Здесь

$$A' = A + m c^2;$$

$$A_{ij} = \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos \theta_i \cos \theta_j + [\dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \sin \theta_i \sin \theta_j + (\dot{\psi}_i + \Omega)(\dot{\psi}_j + \Omega) \cos \theta_i \cos \theta_j] \cos(\psi_j - \psi_i) + [\dot{\theta}_i(\dot{\psi}_j + \Omega) \sin \theta_i \cos \theta_j - \dot{\theta}_j(\dot{\psi}_i + \Omega) \cos \theta_i \sin \theta_j] \sin(\psi_j - \psi_i);$$

$$b_{ij} = 4(i-1) + \frac{1}{n} [2j-1 - 2i(2i-1)] + \frac{1}{n^2} (2j-1)(2i-1)(i-j);$$

$$c_{ij} = 4j + \frac{1}{n} (4j^2 + 2j + 2i - 8ij - 1) + \frac{1}{n^2} (i-j)(2i-1)(2j-1).$$

Потенциальную энергию системы, как и в [1], считаем равной

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{ k_1 [(\psi_k - \psi_{k-1})^2 \cos^2 \theta_k + (\theta_k - \theta_{k-1})^2] + k_2 [\varphi_k - \varphi_{k-1} - (\psi_k - \psi_{k-1}) \sin \theta_k]^2 \}. \quad (7)$$

Здесь  $k_1, k_2$  – соответственно жесткости изгиба и кручения. Кроме того, для замкнутых систем ( $O_{n+1} = O_1$ ) полагалось

$$\psi_0 = \psi_n - 2\pi; \quad \theta_0 = \theta_n - 2\pi; \quad \varphi_0 = \varphi_n - 2\pi.$$

**2. Уравнения движения системы.** Как известно [6], уравнения движения системы в случае, когда ее обобщенные координаты удовлетворяют дополнительным связям (2), могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} = 0, \quad (8)$$

где  $\lambda_k$  – неопределенные множители Лагранжа, характеризующие реакции дополнительных связей. В нашем случае  $m = 3$ , а обобщенными координатами являются  $\psi_i, \theta_i, \varphi_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

Подставляя в (8) выражения для кинетической и потенциальной энергии (6), (7) и учитывая (2), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 & (A' \cos^2 \theta_k + B \sin^2 \theta_k) \ddot{\psi}_k - B \ddot{\varphi}_k \sin \theta_k + (\dot{\psi}_k + \Omega) \dot{\theta}_k (B - A') \sin 2\theta_k - \\
 & - B \dot{\varphi}_k \dot{\theta}_k \cos \theta_k + \mu \cos \theta_k \left\{ (2k-1) \sum_{j=k+1}^n (2n-2j+1) F_{kj} + (2n-2k+ \right. \\
 & + 1) \sum_{j=1}^k (2j-1) F_{kj} \left. \right\} + k_1 [(\psi_k - \psi_{k-1}) \cos^2 \theta_k - (\psi_{k+1} - \psi_k) \cos^2 \theta_{k+1}] - \\
 & - k_2 \{ \sin \theta_k [\varphi_k - \varphi_{k-1} - (\psi_k - \psi_{k-1}) \sin \theta_k] - \sin \theta_{k+1} [\varphi_{k+1} - \varphi_k - \\
 & - (\psi_{k+1} - \psi_k) \sin \theta_{k+1}] \} + \lambda_1 \cos \psi_k \cos \theta_k - \lambda_3 \sin \psi_k \cos \theta_k = 0; \\
 & A' [\ddot{\theta}_k + (\dot{\psi}_k + \Omega)^2 \cos \theta_k \sin \theta_k] + B \cos \theta_k (\dot{\psi}_k + \Omega) (\dot{\varphi}_k - \\
 & - (\dot{\psi}_k + \Omega) \sin \theta_k) + \mu \left\{ (2k-1) \sum_{j=k+1}^n (2n-2j+1) G_{kj} + \right. \\
 & + (2n-2k+1) \sum_{j=1}^k (2j-1) G_{kj} \left. \right\} - k_1 [\sin 2\theta_k (\psi_k - \psi_{k-1})^2 / 2 + \theta_{k+1} - 2\theta_k + \theta_{k-1}] - \\
 & - k_2 \cos \theta_k [\varphi_k - \varphi_{k-1} - (\psi_k - \psi_{k-1}) \sin \theta_k] (\psi_k - \psi_{k-1}) - \\
 & - \lambda_1 \sin \psi_k \sin \theta_k + \lambda_2 \cos \theta_k - \lambda_3 \cos \psi_k \sin \theta_k = 0; \\
 & B [\ddot{\varphi}_k - \ddot{\psi}_k \sin \theta_k - (\dot{\psi}_k + \Omega) \dot{\theta}_k \cos \theta_k] - k_2 [\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1} + \\
 & + (\psi_k - \psi_{k-1}) \sin \theta_k - (\psi_{k+1} - \psi_k) \sin \theta_{k+1}] = 0 \quad (k = \overline{1, n}).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь  $\mu = mc^2/n$ ,  $\psi_{n+1} = \psi_1 + 2\pi$ ,  $\theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi$ ,  $\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi$ ;

$$\begin{aligned}
 F_{kj} &= \ddot{\psi}_j \cos \theta_j \cos(\psi_k - \psi_j) + \ddot{\theta}_j \sin \theta_j \sin(\psi_k - \psi_j) - \\
 & - 2(\dot{\psi}_j + \Omega) \dot{\theta}_j \sin \theta_j \cos(\psi_k - \psi_j) + [\dot{\theta}_j^2 + (\dot{\psi}_j + \Omega)^2] \cos \theta_j \sin(\psi_k - \psi_j); \\
 G_{kj} &= \ddot{\theta}_j [\cos \theta_j \cos \theta_k + \sin \theta_j \sin \theta_k \cos(\psi_k - \psi_j)] - \ddot{\psi}_j \cos \theta_j \sin \theta_k \sin(\psi_k - \psi_j) + \\
 & + \dot{\theta}_j^2 [\cos \theta_j \sin \theta_k \cos(\psi_k - \psi_j) - \sin \theta_j \cos \theta_k] + 2(\dot{\psi}_j + \Omega) \dot{\theta}_j \sin \theta_j \sin \theta_k \sin(\psi_k - \psi_j) + \\
 & + (\dot{\psi}_j + \Omega)^2 \cos \theta_j \sin \theta_k \cos(\psi_k - \psi_j).
 \end{aligned}$$

**3. Положение относительного равновесия системы.** Рассмотрим случай, когда оси симметрии системы образуют плоскую кривую, которая

равномерно вращается, как целое, со скоростью  $\Omega$  вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости. Во вращающейся системе координат этот режим описывает положение равновесия изучаемой системы. Нас интересуют условия, при которых существует такое относительное равновесие. Полагая в (9) скорости и ускорения обобщенных координат равными нулю, а

$$\psi_k = \psi_k^0, \quad \theta_k = 0, \quad \varphi_k = \varphi_k^0 \quad (k = \overline{1, n}); \quad \lambda_i = \lambda_i^0 \quad (i = \overline{1, 3}),$$

получаем

$$\mu\Omega^2 \left\{ (2k-1) \sum_{j=k+1}^n (2n-2j+1) \sin(\psi_k^0 - \psi_j^0) + (2n-2k+1) \sum_{j=1}^k (2j-1) \sin(\psi_k^0 - \psi_j^0) \right\} - k_1(\psi_{k+1}^0 - 2\psi_k^0 + \psi_{k-1}^0) + \lambda_1^0 \cos \psi_k^0 - \lambda_3^0 \sin \psi_k^0 = 0, \quad (10)$$

$$k_2(\varphi_k^0 - \varphi_{k-1}^0)(\psi_k^0 - \psi_{k-1}^0) = \lambda_2^0, \quad (11)$$

$$\varphi_{k+1}^0 - 2\varphi_k^0 + \varphi_{k-1}^0 = 0. \quad (12)$$

Кроме того, должны удовлетворяться и уравнения (2), из которых следует

$$\sum_{k=1}^n \sin \psi_k^0 = 0, \quad \sum_{k=1}^n \cos \psi_k^0 = 0. \quad (13)$$

Из уравнения (12) получаем  $\varphi_k^0 - \varphi_{k-1}^0 = \text{const} = a$ . Это равенство возможно либо при  $a = 0$  (тогда  $\varphi_k^0 = \varphi_{k-1}^0 = \text{const} = b$  и, не ограничивая общности, можно считать  $b = 0$ ), либо при  $a = 2\pi/n$  (тогда  $\varphi_k^0 = 2\pi k/n$ ). Из (11) находим  $\lambda_2^0 = k_2 a (\psi_k^0 - \psi_{k-1}^0)$ , а из уравнений (10), (13) – значения множителей Лагранжа  $\lambda_1^0, \lambda_3^0$  и углы  $\psi_k^0$  ( $k = \overline{1, n}$ ), определяющие форму замкнутой конфигурации.

Очевидно, что если эта замкнутая фигура симметрична относительно оси  $SU$ , а это возможно в случае, когда система содержит четное количество тел, то как целое она представляет собой симметричное твердое тело с осью симметрии  $SU$ , для которого существует режим равномерного вращения вокруг оси  $SU$ .

В системе, которая изучалась в [1],  $\psi_k^0$  равны

$$\psi_k^0 = 2\pi k/n + \alpha_1, \quad k = \overline{1, n}, \quad (14)$$

где  $\alpha_1$  – произвольная постоянная.

Нетрудно видеть, что это решение удовлетворяет системе уравнений (13), а подстановка его в (10) дает возможность определить  $\lambda_1^0 = \lambda_1^0(\Omega)$ ,  $\lambda_3^0 = \lambda_3^0(\Omega)$  в виде

$$\lambda_1^0 = -n\mu\Omega^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, \quad \lambda_3^0 = -n\mu\Omega^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n}. \quad (15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что в случае  $\Omega = 0$  из уравнений (10) следует, что  $\lambda_1^0 = \lambda_3^0 = 0$ , что соответствует результатам, полученным в [1] при изучении положения равновесия круговой замкнутой системы.

Итак, установлено, что при условии четного числа тел в системе, ее уравнения движения имеют решение, описывающее относительное положение равновесия системы, в котором все оси симметрии тел лежат в одной плоскости и при этом углы  $\psi_k^0$  определяются из (14). Найдем необходимые условия устойчивости найденного положения равновесия в случае, когда число тел в системе равно четырем.

**4. Уравнения возмущенного движения.** Пусть  $n = 4$ . Тогда уравнения движения системы (9) допускают решение

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_k^0 = \dot{\theta}_k^0 = \dot{\varphi}_k^0 = \dot{\theta}_k^0 = 0, \quad \varphi_k^0 = \psi_k^0 = \frac{\pi k}{2}, \quad k = \overline{1, 4}, \\ \lambda_1^0 = \lambda_3^0 = -4\mu\Omega^2, \quad \lambda_2^0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Полагая

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_k = \dot{\psi}_k^1, \quad \dot{\theta}_k = \dot{\theta}_k^1, \quad \dot{\varphi}_k = \dot{\varphi}_k^1, \quad \dot{\theta}_k = \dot{\theta}_k^1, \quad \psi_k = \psi_k^0 + \psi_k^1, \\ \varphi_k = \varphi_k^0 + \varphi_k^1, \quad \lambda_1 = \lambda_1^0 + \lambda_1^1, \quad \lambda_2 = \lambda_2^0 + \lambda_2^1, \quad \lambda_3 = \lambda_3^0 + \lambda_3^1, \end{aligned}$$

запишем систему уравнений возмущенного движения. Имеем

$$\begin{aligned} A' \ddot{\psi}_k^1 + \mu \{ (2k-1) \sum_{j=k+1}^n (2n-2j+1) [C_{kj}^0 \ddot{\psi}_j^1 + 2\Omega S_{kj}^0 \dot{\psi}_j^1 + \Omega^2 C_{kj}^0 (\psi_k^1 - \psi_j^1)] + \\ + (2n-2k+1) \sum_{j=1}^k (2j-1) [C_{kj}^0 \ddot{\psi}_j^1 + 2\Omega S_{kj}^0 \dot{\psi}_j^1 + \Omega^2 C_{kj}^0 (\psi_k^1 - \psi_j^1)] \} + \\ + k_1 (-\psi_{k-1}^1 + 2\psi_k^1 - \psi_{k+1}^1) - k_2 \Gamma (\theta_k^1 - \theta_{k+1}^1) - \lambda_1^0 \psi_k^1 \sin \psi_k^0 - \\ - \lambda_3^0 \cos \psi_k^0 \psi_k^1 + \lambda_1^1 \cos \psi_k^0 - \lambda_3^1 \sin \psi_k^0 = 0; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} A' (\ddot{\theta}_k^1 + \Omega^2 \theta_k^1) + B \Omega (\dot{\varphi}_k^1 - \Omega \theta_k^1) + \mu [(2k-1) \sum_{j=k+1}^n (2n-2j+1) (\ddot{\theta}_j^1 + \Omega^2 C_{kj}^0 \theta_k^1) + \\ + (2n-2k+1) \sum_{j=1}^k (2j-1) (\ddot{\theta}_j^1 + \Omega^2 C_{kj}^0 \theta_k^1)] - k_1 (\Gamma^2 \theta_k^1 + \theta_{k+1}^1 - 2\theta_k^1 + \theta_{k-1}^1) - \\ - k_2 \Gamma (\psi_k^1 - \psi_{k-1}^1 + \varphi_k^1 - \varphi_{k-1}^1 - \Gamma \theta_k^1) - \lambda_1^0 \sin \psi_k^0 \theta_k^1 - \lambda_3^0 \theta_k^1 \cos \psi_k^0 + \lambda_2^1 = 0; \\ B (\ddot{\varphi}_k^1 - \Omega \dot{\theta}_k^1) - k_2 [\varphi_{k+1}^1 - 2\varphi_k^1 + \varphi_{k-1}^1 + \Gamma (\theta_k^1 - \theta_{k+1}^1)] = 0, \\ k = \overline{1, 4}. \end{aligned}$$

Здесь  $\Gamma = \pi/2$ ,  $C_{kj}^0 = \cos(\psi_k^0 - \psi_j^0)$ ,  $S_{kj}^0 = \sin(\psi_k^0 - \psi_j^0)$ .

Уравнения (2), линеаризованные в окрестности решения (16), имеют вид

$$\sum_{k=1}^4 \psi_k^1 \sin \psi_k^0 = 0, \quad \sum_{k=1}^n \theta_k^1 = 0, \quad \sum_{k=1}^n \psi_k^1 \cos \psi_k^0 = 0.$$

Подставляя в них значения  $\psi_k^0$  из (16), находим, что переменные  $\psi_k^1$  и  $\theta_k^1$ ,  $k = \overline{1,4}$ , связаны соотношениями

$$\psi_3^1 = \psi_1^1, \quad \psi_4^1 = \psi_2^1, \quad \theta_4^1 = -\theta_1^1 - \theta_2^1 - \theta_3^1. \quad (18)$$

Систему уравнений (17) с учетом (18) и исключением реакций связи  $\lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_3^1$  приводим к следующему виду:

$$\ddot{y}_1 = 0; \quad \ddot{x}_s = 0, \quad (19)$$

$$a\ddot{y}_0 + 4k_1y_0 - 2k_2\Gamma z_1 = 0,$$

$$(A' + a)\ddot{z}_1 + 2(D + 2k_1)z_1 + B\Omega\dot{x} - 2k_2\Gamma(2y_0 + x) = 0,$$

$$B\ddot{x} - 2B\Omega\dot{z}_1 + 4k_2(x - \Gamma z_1) = 0,$$

$$a\ddot{z}_0 + Dz_0 + B\Omega\left(\frac{\dot{x} - \dot{x}_0}{2} - \dot{x}_2\right) - k_2\Gamma x_0 = 0, \quad (20)$$

$$a\ddot{\theta} + D\theta + B\Omega\left(\frac{\dot{x} + \dot{x}_0}{2} + \dot{x}_2\right) - k_2\Gamma(x + 2x_2) = 0,$$

$$B\ddot{x}_0 - B\Omega(\dot{\theta} + \dot{z}_0) + 2k_2(x_0 - \Gamma z_0) = 0,$$

$$B\ddot{x}_2 + \frac{B\Omega}{2}(2\dot{z}_1 + \dot{z}_0 - \dot{\theta}) - k_2(x - 2x_2) + k_2\Gamma(2z_1 - \theta) = 0.$$

В (19) и (20) введены новые переменные

$$y_1 = \psi_1^1 + \psi_2^1, \quad x_s = \varphi_1^1 + \varphi_2^1 + \varphi_3^1 + \varphi_4^1,$$

$$y_0 = \psi_1^1 - \psi_2^1, \quad z_0 = \theta_1^1 - \theta_3^1, \quad z_1 = \theta_1^1 + \theta_3^1, \quad \theta = 2\theta_2^1 + z_1,$$

$$x_k = \varphi_k^1 - \varphi_{k-1}^1 \quad k = \overline{1,4} \quad (\varphi_0^1 = \varphi_4^1),$$

$$x = x_1 - x_3, \quad x_0 = x_1 - x_3.$$

Кроме того, в (20) введены обозначения

$$a = A' + 8\mu, \quad A' = A + mc^2, \quad \mu = \frac{mc^2}{4}, \quad D = \Omega^2(a - B) - k_1(\Gamma^2 - 2) + k_2\Gamma^2.$$

**5. Необходимые условия устойчивости решения (16).** Систему уравнений (20) можно представить в виде

$$A_{ij}\ddot{X}_i + B_{ij}\dot{X}_i + C_{ij}X_i, \quad i, j = \overline{1, 7}. \quad (21)$$

Здесь  $X_i = (y_0, z_1, z_0, \theta, x, x_0, x_2)^T$  – вектор неизвестных. Тогда, разыскивая решение системы (21) в виде  $X_i = D_i e^{\lambda t}$ , получаем характеристическое уравнение

$$\Delta = \Delta_3 \Delta_4 = \sum_{i=0}^3 (a_i \lambda^{2i}) \sum_{j=0}^4 (b_j \lambda^{2j}) = 0, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_3 = & \alpha \varepsilon (\alpha + 1) \nu^3 + 2\{\alpha^2 \varepsilon \omega^2 + 2\alpha \varkappa (\alpha + 1) + \varepsilon [2 + \alpha(4 - \gamma) + \\ & + \alpha \varkappa (\gamma + 2)]\} \nu^2 + 8\{\alpha [\alpha \varkappa + \varepsilon(1 - \varkappa)] \omega^2 + \varkappa(2 + 4\alpha - \alpha \gamma) + \\ & + \varepsilon [2 - \gamma + \varkappa(\gamma + 2) - \varkappa^2(\gamma + 2)]\} \nu + 32\varkappa [\omega^2(\alpha - \varepsilon) + 2 - \gamma - \varkappa^2(\gamma + 2)] = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Delta_4 = & \alpha^2 \varepsilon^2 \nu^4 + 2\alpha \varepsilon \{\alpha \varepsilon \omega^2 + 2\alpha \varkappa + \varepsilon [-\gamma + \varkappa(\gamma + 2)]\} \nu^3 + \\ & + \{\varepsilon^2 \alpha^2 \omega^4 + 2\varepsilon [\varepsilon \alpha \gamma (\varkappa - 1) + 4\varkappa \alpha^2] \omega^2 + 4\alpha^2 \varkappa^2 + 4\alpha \varepsilon \varkappa [-2\gamma + \varkappa(\gamma + 2)] + \\ & + \varepsilon^2 [\gamma - \varkappa(\gamma + 2)]^2\} \nu^2 + 4\varkappa \{\alpha \varepsilon (\alpha - \varepsilon) \omega^4 + [2\alpha^2 \varkappa + \\ & + \varepsilon \alpha \gamma (\varkappa - 2) + \varepsilon^2 \gamma] \omega^2 - 2\alpha \gamma \varkappa + \varepsilon \gamma [\gamma - \varkappa(\gamma + 2)]\} \nu + \\ & + 4\varkappa^2 [\omega^2(\alpha - \varepsilon) - \gamma]^2 = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь введены безразмерные параметры

$$\nu = \frac{A}{k_1} \lambda^2, \quad \varkappa = \frac{k_2}{k_1}, \quad \omega^2 = \frac{A \Omega^2}{k_1}, \quad \varepsilon = \frac{B}{A}, \quad \alpha = \frac{a}{A} \quad (25)$$

и обозначение  $\gamma = \Gamma^2 - 2 = (\pi/2)^2 - 2 > 0$ . Таким образом, коэффициенты характеристического уравнения (22) зависят от четырех безразмерных параметров  $\omega, \varepsilon, \alpha, \varkappa$ . Следует отметить, что представляет интерес случай, когда  $A \gg B$ , так как система является моделью упругого стержня. Поэтому  $\varepsilon$  можно считать малым параметром.

**6. Частный случай.** Рассмотрим частный случай, когда тела представляют собой одинаковые круговые цилиндры. Для цилиндров имеют место соотношения

$$A = \frac{1}{12} m (3R^2 + h^2), \quad B = \frac{1}{2} m R^2, \quad c = \frac{h}{2},$$

где  $R$  – радиус цилиндра,  $h$  – его высота. Вводя малый параметр  $\varepsilon_0 = R/h$ , получаем

$$\varepsilon = \frac{6\varepsilon_0^2}{1 + 3\varepsilon_0^2}, \quad \alpha = 10 - \frac{9}{2}\varepsilon. \quad (26)$$

Итак, в изучаемом частном случае остается три безразмерных параметра:  $\omega, \varepsilon, \varkappa$ , причем  $\varepsilon$  – малый параметр.

Необходимые условия устойчивости решения (16) будут выполнены в случае, когда характеристическое уравнение (22) не имеет положительных корней. Это условие эквивалентно тому, что уравнения (23), (24) должны иметь действительные отрицательные корни. Учитывая сказанное, условия устойчивости могут быть представлены так:

$$a_i > 0 \quad (i = \overline{1,3}), \quad b_j > 0 \quad (j = \overline{1,4}) \quad (27)$$

– (коэффициенты уравнений (23), (24) положительны);

$$a_3(4a_3^2 - 18a_3a_2a_1 + 27a_4a_0^2) + a_3^2(4a_3b_0 - a_1) < 0 \quad (28)$$

– (дискриминант уравнения (23) отрицателен [7]);

$$F_1 > 0, \quad 12F_1^2 - a_4^2F_2 > 0, \quad F_2^3 - 27(F_3 - M_5F_1) > 0 \quad (29)$$

– (критерий Покровского [8] действительности корней уравнения четвертой степени).

В (29) введены следующие обозначения:

$$F_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{8}b_3^2 - \frac{1}{3}b_2b_4 \right), \quad F_2 = b_4a_0 - \frac{1}{6}b_2b_3 + \frac{1}{12}b_2^3,$$

$$F_3 = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{6}b_1b_2b_3 - \frac{1}{2}b_1^2b_4 - \frac{1}{12}b_2^3 \right).$$

Найдем области выполнения неравенств (27)–(29) при учете малости параметра  $\varepsilon$ . Начнем с анализа неравенства (27). Из вида коэффициентов уравнений (23), (24) следует, что  $a_3, a_2, b_4, b_0$  всегда больше нуля.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Отметим, что параметр  $\varkappa$ , входящий в (25), для прикладных исследований не является произвольной величиной. Этот параметр не равен нулю (жесткость кручения отлична от нуля) и ограничен (величины жесткостей изгиба и кручения имеют один порядок). В частности, в работах [9, 10], в которых с помощью упругих стержневых систем описывают конфигурацию молекулы ДНК, этот параметр определен на интервале (0.5; 2.5). В данной статье области выполнения неравенств (27)–(29) определялись для тех же значений  $\varkappa$ .

При учете малости  $\varepsilon$  и  $\varkappa \in (0.5; 2.5)$  из (23), (24) заключаем, что коэффициенты  $a_1, b_3, b_2$  положительны. Осталось определить области, в которых  $a_0 > 0$  и  $b_1 > 0$ . Имеем из (23)

$$a_0 = 32\varkappa[\omega^2(\alpha - \varepsilon) + 2 - \gamma - \varkappa^2(\gamma + 2)] > 0.$$

Это неравенство выполняется при условии

$$\omega^2 > \omega_1 = \frac{\varkappa^2(\gamma + 2) + \gamma - 2}{\alpha - \varepsilon}. \quad (30)$$

Разлагая  $\omega_1$  в ряд по  $\varepsilon$  и учитывая (26), получаем  $\omega_1 = \omega_{10} + \varepsilon\omega_{11}$ , где

$$\omega_{10} = \frac{\varkappa^2(\gamma + 2) + \gamma - 2}{10}, \quad \omega_{11} = \omega_{11}(\varkappa). \quad (31)$$

Область положительности коэффициента  $b_1$  такова

$$\alpha\varepsilon(\alpha - \varepsilon)\omega^4 + [2\alpha^2\varkappa + \varepsilon\alpha\gamma(\varkappa - 2) + \varepsilon^2\gamma]\omega^2 - 2\alpha\gamma\varkappa + \varepsilon\gamma[\gamma - \varkappa(\gamma + 2)] > 0. \quad (32)$$

Неравенство (32) выполнено, если  $\omega^2 > \omega_2 = \omega_{20} + \varepsilon\omega_{21}$ , где

$$\omega_{20} = \frac{\gamma}{10}, \quad \omega_{21} = \omega_{21}(\varkappa). \quad (33)$$

Учитывая (31), (33), окончательно получаем, что неравенства (27) выполняются при условии

$$\omega^2 > \omega_1 \text{ при } \varkappa^2 > \frac{2}{2 + \gamma}; \quad \omega^2 > \omega_2 \text{ при } \varkappa^2 \leq \frac{2}{2 + \gamma} \quad (34)$$

(напомним, что  $\gamma = (\pi/2)^2 - 2 > 0$ ).

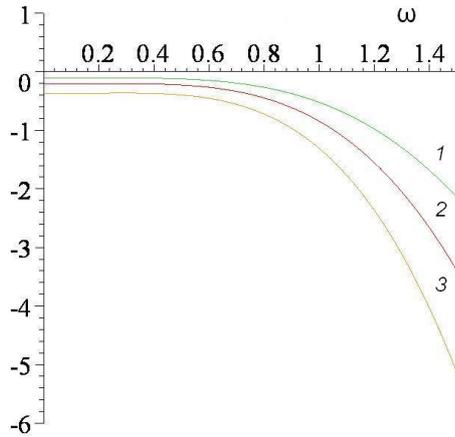


Рис. 1.

Дискриминант уравнения (23) может быть представлен так

$$F(\omega^2) = \sum_{i=1}^4 d_{3i}(\varepsilon, \varkappa)\omega^{2i}.$$

Проведенный анализ показал, что при малых  $\varepsilon$  этот дискриминант всегда отрицателен.

График функции  $F(\omega^2)$  при  $\varepsilon = 0.1$  и различных значениях  $0.5 < \varkappa < 1.5$  приведен на рис. 1.

Здесь первая кривая по-

лучена для  $\varkappa = 0.9$ , вторая – для  $\varkappa = 1$ , а третья – для  $\varkappa = 1.1$ .

Перейдем к изучению неравенств (29). Первое неравенство после подстановки в него  $b_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , из (25) может быть представлено так

$$F_1 = \varepsilon^2\omega^4\alpha^2 + 2\{\alpha[-\gamma + \varkappa(\gamma + 6)]\varepsilon^2 - 2\alpha^2\varkappa\varepsilon\}\omega^2 + \{\varepsilon[\varkappa(\gamma + 2) - \gamma] + \alpha\varkappa\}^2 + 8\alpha\varkappa\varepsilon > 0.$$

Дискриминант уравнения  $F_1 = 0$  равен

$$\Delta = 2\varepsilon^3\alpha^2\varkappa\{-\alpha\varkappa(\gamma + 4) + \varepsilon[\varkappa(\gamma + 4) - \gamma]\}.$$

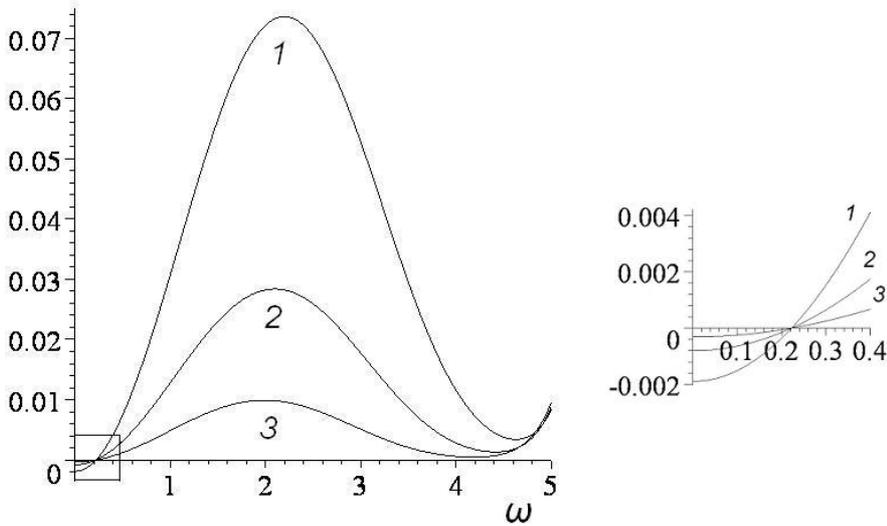


Рис. 2.

Очевидно, что при малых  $\varepsilon$  имеем  $\Delta < 0$  и, следовательно,  $F_1 > 0$ . Второе неравенство (29) удовлетворено, если

$$\alpha\omega^2 + [\varkappa(\gamma + 2) - \gamma]\varepsilon + 2\alpha\varkappa > 0.$$

Это условие выполнено при  $\varkappa \in (0.5; 2.5)$  и малых  $\varepsilon$ . Последнее неравенство (29) имеет вид

$$f(\omega^2) = \sum_{i=1}^7 d_{4i}(\varepsilon, \varkappa)\omega^{2i} > 0.$$

Установлено, что уравнение  $f(\omega^2) = 0$  имеет только один положительный корень  $\omega_3 = \omega_{30} + \varepsilon\omega_{31}(\varkappa)$ , причем  $\omega_{30} = \omega_{20} = \gamma/10$ .

График кривых  $f(\omega^2)$  при различных значениях  $\varkappa$  и  $\varepsilon = 0.1$  приведен на рис. 2. На нем, как и на рис. 1, изображены три кривые, на которых соответственно  $\varkappa$  равно 0.9; 1 и 1.1. При этом изображен общий вид кривой  $f(\omega^2)$  на интервале  $(0; 5)$ , на котором функция имеет точки экстремума, а также отдельно выделен интервал, на котором находится корень уравнения  $f(\omega^2) = 0$ , равный  $\omega_3$ . При значениях  $\omega > 5$  функция  $f(\omega^2)$  монотонно возрастает.

Итак, неравенства (27)–(29), а, следовательно, и необходимые условия устойчивости решения (16) выполнены на интервалах

$$\omega^2 > \omega_1 \quad \text{при} \quad \varkappa^2 > \frac{2}{2 + \gamma} \quad \text{и} \quad \omega^2 > \max(\omega_2, \omega_3) \quad \text{при} \quad \varkappa^2 \leq \frac{2}{2 + \gamma}$$

и замкнутая система, состоящая из четырех тел, неустойчива в случае  $\Omega = 0$ .

1. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Конечномерная модель замкнутого упругого стержня // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 33–39.
2. Болграбская И.А., Савченко А.Я., Щепин Н.Н. Замкнутые системы связанных твердых тел // Там же. – 2006. – Вып. 36. – С. 94–103.
3. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Положение равновесия замкнутых систем с самопересечением // Там же. – 2007. – Вып. 37. – С. 145–151.
4. Bolgrabskaya I.A., Shchepin N.N. Finite dimensional model of closed elastic systems // Proc. of the 9th conf. of dynamical systems – theory and applications (December 17–20, 2007, Lodz, Poland). – 2007. – 2. – P. 135–143.
5. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Устойчивость положения равновесия замкнутой системы тел конфигурации “восьмерка” // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 151–160.
6. Ланцош К. Вариационные принципы механики. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
7. Савченко А.Я. Устойчивость стационарных движений механических систем. – Киев: Наук. думка, 1977. – 160 с.
8. Покровский П.М. Об алгебраических уравнениях в связи с аналитическими функциями Вейерштрасса // Тр. отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1983. – 6, вып. 1. – С. 26–42.
9. Бенксэм Дэв. Механика и равновесные состояния сверхспирализованной ДНК // В кн.: Математические методы для анализа последовательностей ДНК. – М.: Мир, 1999. – С. 308–338.
10. Hoffman K.A. Methods for determining stability in continuum elastic-rod models of DNA // Phil. Trans. R. Lond. A. – 2004. – 362. – P. 1301–1315.