ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2009. Вып. 39

УДК 531.35

©2009. **Б.И. Коносевич**

# О МОДИФИЦИРОВАННОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЙ ОСИ СИММЕТРИИ СНАРЯДА

Рассматривается движение осесимметричного артиллерийского снаряда в поле силы тяжести под действием принятой в баллистике системы аэродинамических сил и моментов. Найден порядок погрешности модифицированного асимптотического предствления угловых колебаний оси симметрии снаряда по отношению к малому параметру. Из полученных результатов следует, что в общем случае незатухающих колебаний оси симметрии снаряда основное и модифицированное представления имеют погрешности одинакового порядка.

**Введение.** В теории полета снаряда широко используется асимптотическое представление угловых колебаний его оси симметрии, полученное на основе метода ВКБ (см. [1]). Известно также модифицированное асимптотическое представление, в котором учтен следующий член разложения по параметру в частном решении уравнений угловых колебаний [1–3]. Оценки погрешности обоих типов представлений получены в [2] в виде громоздких неравенств, содержащих операции дифференцирования, интегрирования и нахождения максимума. Эти неравенства не позволяют судить о сравнительной точности рассматриваемых представлений.

В настоящей работе погрешности этих асимптотических представлений выражены через символы порядка, т. е. в виде $O(\varepsilon^n)$, где $\varepsilon$ — малый параметр. Показано, что в общем случае незатухающих колебаний оси симметрии снаряда основное и модифицированное представления имеют погрешности одинакового порядка. В случае затухания низкочастотных колебаний точность модифицированного представления повышается на порядок.

**1. Уравнения движения снаряда.** В данной работе используется система уравнений движения снаряда, которая линеаризована по переменным углового движения $q, r, \alpha, \beta$ и по углу $\psi$ между вектором скорости центра масс и вертикальной плоскостью. В [4] она названа $l$-системой. Эта система состоит из подсистемы уравнений поступательного движения и продольного вращения

$$\dot{x} = \varepsilon^3 v \cos\theta, \qquad \dot{y} = \varepsilon^3 v \sin\theta, \qquad \varepsilon^2 \dot{z} = \varepsilon^5 v\psi,$$

$$\dot{v} = \varepsilon^3 \frac{v^2}{m} R_1^{(0)}(y, v) - \varepsilon^4 g \sin\theta,$$

$$\begin{aligned}
&\dot{\theta} = -\varepsilon^4 \frac{g\cos\theta}{v} + \varepsilon^4 \frac{v}{m}[R_2^{(0)}(y,v)\alpha - R_3^{(0)}(y,v,p)\beta], \\
&\varepsilon^2\dot{\psi} = \varepsilon^6 \frac{g}{v}\psi\sin\theta + \varepsilon^4 \frac{v}{m}[R_3^{(0)}(y,v,p)\alpha + R_2^{(0)}(y,v)\beta], \\
&\dot{p} = \varepsilon^4 \frac{p}{I_1} v M_{1D}^{(0)}(y,v)
\end{aligned} \tag{1}$$

и подсистемы уравнений угловых колебаний оси симметрии снаряда

$$\dot{\Omega} = a(y,v,p,\varepsilon)\Omega + b(y,v,p,\varepsilon)\Delta, \quad \dot{\Delta} = -i\Omega - k(y,v,p,\varepsilon)\Delta + l(v,\theta,\psi,\varepsilon). \tag{2}$$

В подсистеме (2) используются комплексные переменные $\Omega = q + ir$, $\Delta = \alpha + i\beta$ и обозначения

$$\begin{aligned}
&a(\xi^{(3)},\varepsilon) = \frac{1}{I_2}[\varepsilon^2 v M_{2D}^{(0)} + iI_1 p], \quad b(\xi^{(3)},\varepsilon) = \frac{v^2}{I_2}[\varepsilon^2 M_2^{(0)} + iM_3^{(0)}], \\
&k(\xi^{(3)},\varepsilon) = \varepsilon^2 \frac{v}{m}[R_2^{(0)} + iR_3^{(0)}], \quad l(v,\theta,\psi,\varepsilon) = \varepsilon^2 \frac{g}{v}(\cos\theta - i\varepsilon^2\psi\sin\theta).
\end{aligned} \tag{3}$$

Для сокращения записи введены обозначения $\xi = (x, y, \varepsilon^2 z, v, \theta, \varepsilon^2\psi, p)$, $\xi^{(5)} = (y, v, \theta, \varepsilon^2\psi, p)$, $\xi^{(4)} = (y, v, \theta, p)$, $\xi^{(3)} = (y, v, p)$. Тогда подсистема (1) записывается в виде $\dot{\xi} = f(\xi,\varepsilon) + f_\alpha(\xi,\varepsilon)\alpha + f_\beta(\xi,\varepsilon)\beta$. Величины, входящие в формулы (1), (3), определены в [4].

Все переменные в уравнениях (1), (2) отнесены к верхним характерным числовым значениям их модулей. В частности, для поперечных компонент $q, r$ угловой скорости снаряда в полусвязанной системе координат в качестве масштаба выбрано значение 1 с$^{-1}$, а для направляющих косинусов $\alpha, \beta$ оси симметрии в полускоростной системе координат в качестве масштаба взято значение $0.1^2$. Малый параметр $\varepsilon$ введен вместо числа 0.1. Система уравнений (1), (2) рассматривается на отрезке времени $[t_0, t_1]$ от момента выстрела $t_0$ до момента $t_1$ падения снаряда на землю. Этот отрезок имеет максимальную длину $t_1 - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$ при больших углах стрельбы.

Символы $O(\varepsilon^n)$ $(O^*(\varepsilon^n))$ обозначают функции фазовых переменных, времени и параметра $\varepsilon$, которые в рассматриваемой области изменения фазовых переменных и времени имеют при $\varepsilon \to 0$ порядок не ниже $\varepsilon^n$ (равный $\varepsilon^n$); для положительных функций используются обозначения $O_+(\varepsilon^n)$ $(O_+^*(\varepsilon^n))$.

**2. Частотные характеристики и условия правильности полета.** В исходной нелинейной системе медленные переменные $x, y, z, v, \theta, \psi, p$ ограничены по модулю значениями порядка 1. Отметим, что $p = O^*(1)$, а квадрат скорости центра масс снаряда изменяется в диапазоне

$$O_+^*(\varepsilon) \le v^2 \le O_+^*(1). \tag{4}$$

Ограниченность модулей быстрых переменных $q, r, \alpha, \beta$ в нелинейной системе обеспечивается при выполнении условий, называемых условиями правильности полета. Чтобы сформулировать их, вводим обозначения

$$w = w(\xi^{(4)}, \varepsilon) = \frac{(a-k)^2}{4} - ib + ak - \frac{\dot{a} + \dot{k}}{2}, \tag{5}$$

$$\lambda_j = \lambda_j(\xi^{(4)}, \varepsilon) = \frac{a-k}{2} \pm \sqrt{w},\ \lambda_{j+} = \lambda_{j+}(\xi^{(4)}, \alpha, \beta, \varepsilon) = \lambda_j - \frac{\dot{w}}{4w} \quad (j = 1, 2). \tag{6}$$

Здесь $\dot{a}, \dot{k}(\xi^{(4)}, \varepsilon)$ — производные функций $a, k$ по $t$ в силу уравнений (1), $\sqrt{w} = i\sqrt{_+(-w)}$, $\sqrt{_+}$ — главное значение квадратного корня.

Подставив выражения (3) в (5), получаем формулу

$$\begin{aligned} w(\xi^{(4)}, \varepsilon) = -\frac{p^2 I_1^2}{4 I_2^2}\left(1 - \frac{4v^2 I_2 M_3^{(0)}}{p^2 I_1^2}\right) - \varepsilon^2 vp \frac{I_1 R_3^{(0)}}{2m I_2} + \\ + i\varepsilon^2 \left[ vp \frac{I_1}{2I_2}\left(\frac{M_{2D}^{(0)}}{I_2} + \frac{R_2^{(0)}}{m}\right) - v^2 \frac{M_2^{(0)}}{I_2}\right] + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \tag{7}$$

Предположим, что здесь выражение в первых круглых скобках положительно, и обозначим его через $\sigma^2$:

$$\sigma^2 = 1 - \frac{4v^2 I_2 M_3^{(0)}(y, v)}{p^2 I_1^2} > 0. \tag{8}$$

Неравенство (8) называется условием Маиевского. Снаряд и орудие конструируются таким образом, что в момент выстрела $t_0$ выполняется условие Маиевского, а величина $\sigma(t_0)$ лежит в пределах $0.6 < \sigma(t_0) < 0.7$. Согласно (4), квадрат скорости $v$ принимает свое максимальное значение порядка 1 в момент выстрела, а затем $v^2$ убывает до значений порядка $\varepsilon$. Угловая скорость $p$ на всей траектории полета сохраняет значение порядка 1. Тогда условие Маиевского выполняется на всей траектории, а коэффициент гироскопической устойчивости $\sigma$ заключен в пределах

$$\sigma(t_0) \le \sigma \le 1 - O_+^*(\varepsilon), \qquad \sigma(t_0) = O_+^*(1). \tag{9}$$

Полагая $\lambda_j = n_j + i\omega_j,\ j = 1, 2$, потребуем, чтобы выполнялись еще два неравенства

$$n_1,\, n_2 \le O_+^*(\varepsilon^4). \tag{10}$$

Сформулируем теперь условия правильности полета снаряда [5]. Пусть в нелинейной системе уравнений движения снаряда переменные $\Omega$, $\Delta$ имеют в момент выстрела $t_0$ порядок не ниже 1, т. е. $\Omega$, $\Delta(t_0, \varepsilon) = O(1)$. Если на траектории полета снаряда выполнены условия (8)–(10), то эти переменные имеют порядок не ниже 1 на всей траектории:

$$\Omega,\ \Delta(t,\varepsilon) = O(1), \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{11}$$

В [4] дана общая оценка погрешности решения $l$-системы (1), (2) по сравнению с решением исходной нелинейной системы при одинаковых начальных условиях в момент выстрела. В частности, для переменных $\xi$ погрешность имеет порядок $\varepsilon^3$. Отсюда следует, что и в $l$-системе медленные переменные $\xi$ ограничены по модулю значениями порядка 1. С учетом полученных в [4] оценок, из выполнения условий правильности полета для решений нелинейной системы уравнений движения снаряда следует выполнение этих условий и оценок (11) для решений $l$-системы.

В формулах (1), (3) и далее функции, обозначенные большими латинскими буквами, равны $O(1)$ при $x, y, z, v, \theta, \psi, p = O(1)$ вместе со своими частными производными по компонентам $\xi$. При этом функции $R_1^{(0)}, R_2^{(0)}, M_3^{(0)}$, характеризующие силу лобового сопротивления, подъемную силу и опрокидывающий момент, равны $O^*(1)$.

В области изменения фазовых переменных имеем

$$w(\xi^{(4)},\varepsilon) = O^*(1),\ \dot w(\xi^{(4)},\alpha,\beta,\varepsilon) = O(\varepsilon^3),\ \ddot w(\xi^{(5)},q,r,\alpha,\beta,\varepsilon) = O(\varepsilon^6). \tag{12}$$

С помощью формул (3), (6), (7) находим

$$\begin{aligned} \omega_j &= \frac{pI_1}{2I_2}(1\pm\sigma) + \varepsilon^2 v\frac{R_3^{(0)}}{2m}(-1\pm\frac{1}{\sigma}) + O(\varepsilon^4),\\ n_j &= \varepsilon^2 v\frac{M_{2D}^{(0)}}{2I_2}(1\pm\frac{1}{\sigma}) + \varepsilon^2 v\frac{R_2^{(0)}}{2m}(-1\pm\frac{1}{\sigma}) \mp \varepsilon^2 v^2\frac{M_2^{(0)}}{p\sigma I_1} + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \tag{13}$$

Отсюда с учетом (9) следует, что $\omega_1 = O_+^*(1)$, $O_+^*(\varepsilon) \le \omega_2 \le O_+^*(1)$. Частота $\omega_2$ равна $O_+^*(\varepsilon)$ на всей траектории, исключая ее начальный участок. Из (13) вытекают также представления

$$\lambda_1 = \Lambda_1,\ \lambda_2 = v^2\Lambda_2, \qquad \lambda_1 + k = L_1,\ \lambda_2 + k = v^2 L_2, \tag{14}$$

в которых $\Lambda_1, \Lambda_2 = O^*(1)$, $\quad L_1, L_2 = O^*(1)$.

**3. Приближенное решение уравнений угловых колебаний.** Пусть $\xi$, $\Omega$, $\Delta(t,\varepsilon)$ — точное решение $l$-системы (1), (2) при начальных условиях, заданных в момент выстрела. Рассматривая зависимость $\xi(t,\varepsilon)$ как известную, запишем подсистему (2) уравнений углового движения в виде

$$\dot\Omega = a(t,\varepsilon)\Omega + b(t,\varepsilon)\Delta, \qquad \dot\Delta = -i\Omega - k(t,\varepsilon)\Delta + l(t,\varepsilon), \tag{15}$$

где $a, b, k, l(t,\varepsilon) = a, b, k, l(\xi^{(5)}(t,\varepsilon),\varepsilon)$ — известные функции времени.

В соответствии с методом ВКБ [1], два линейно независимых решения соответствующей *однородной* системы приближенно выражаются формулами

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega}_{j+}(t,\varepsilon) &= i\,[\lambda_{j+}(t,\varepsilon)+k(t,\varepsilon)]\exp\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_{j+}(\tau,\varepsilon)\,d\tau, \\ \widetilde{\Delta}_{j+}(t,\varepsilon) &= \exp\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_{j+}(\tau,\varepsilon)\,d\tau, \quad j=1,2. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь величины $\lambda_{j+}$ определены выражениями (6), в которых производная $\dot{w}$ зависит от неизвестных $\alpha, \beta$. Поэтому функции (16) уместно назвать приближенными квазирешениями однородных уравнений угловых колебаний.

Приближенное частное решение *неоднородной* системы (15) выражается формулами

$$\Omega = e_1(t,\varepsilon) = e_1(\xi^{(5)}(t,\varepsilon),\varepsilon), \qquad \Delta = d_1(t,\varepsilon) = d_1(\xi^{(5)}(t,\varepsilon),\varepsilon), \tag{17}$$

где функции

$$e_1 = e_1(\xi^{(5)},\varepsilon) = \frac{bl}{ib-ak}, \qquad d_1 = d_1(\xi^{(5)},\varepsilon) = -\frac{al}{ib-ak} \tag{18}$$

определены из условия равенства нулю правой части этой системы.

Сложив линейную комбинацию функций (16) с приближенным частным решением (17), получим приближенное *квазирешение* линеаризованных уравнений углового движения (15)

$$\begin{aligned} \Omega_+^{[0]}(t,\varepsilon) &= i\,[\lambda_{1+}(t,\varepsilon)+k(t,\varepsilon)]\,\widetilde{u}_{1+}^{[0]}(t,\varepsilon)+i\,[\lambda_{2+}(t,\varepsilon)+k(t,\varepsilon)]\,\widetilde{u}_{2+}^{[0]}(t,\varepsilon)+e_1(t,\varepsilon), \\ \Delta_+^{[0]}(t,\varepsilon) &= \widetilde{u}_{1+}^{[0]}(t,\varepsilon)+\widetilde{u}_{2+}^{[0]}(t,\varepsilon)+d_1(t,\varepsilon). \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь функции $\widetilde{u}_{j+}^{[0]}$, $j=1,2$, заданы формулами

$$\widetilde{u}_{j+}^{[0]}(t,\varepsilon) = C_{j+}^{[0]}\exp\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_{j+}(\tau,\varepsilon)\,d\tau = C_{j+}^{[0]}\frac{w^{1/4}(t_0,\varepsilon)}{w^{1/4}(t,\varepsilon)}\exp\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_j(\tau,\varepsilon)\,d\tau, \tag{20}$$

а комплексные постоянные $C_{1+}^{[0]}, C_{2+}^{[0]}$ определяются начальными условиями. Квазирешение и связанные с ним величины отмечаются индексом $+$ (плюс).

В [4] получена следующая оценка погрешности квазирешения (19):

$$\Omega(t,\varepsilon)-\Omega_+^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad \Delta(t,\varepsilon)-\Delta_+^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad t\in[t_0,t_1]. \tag{21}$$

Она сохраняется при переходе к приближенному решению, которое получается из (19) путем замены функций $\lambda_{j+}$ функциями $\lambda_j,\ j=1,2$.

**4. Модифицированное приближенное решение уравнений угловых колебаний.** Чтобы получить более точное приближенное общее решение уравнений угловых колебаний, в [1, 2] используется уточненное частное решение этих уравнений. Оно находится как сумма двух первых членов разложения точного частного решения по обратным степеням большого параметра. Следуя такому правилу, будем искать уточненное приближенное частное решение уравнений (15) в виде суммы убывающих слагаемых $\Omega = e_1+e_2+e_3+...,\ \Delta = d_1+d_2+d_3+....$ Для $e_1, d_1$ уже найдены выражения (18). Для уточняющих поправок $e_2, d_2$ получаем выражения

$$e_2 = -\frac{\dot e_1 k + \dot d_1 b}{ib-ak}, \qquad d_2 = \frac{i\dot e_1 + \dot d_1 a}{ib-ak}. \tag{22}$$

Заметим, что в уравнения (1), определяющие $\dot\theta, \dot\psi$, входят члены с $\alpha, \beta$. А так как функции $e_1, d_1$ зависят от $\theta, \psi$, то в выражения $\dot e_1, \dot d_1$ через $\dot\theta, \dot\psi$ войдут неизвестные величины $\alpha, \beta$:

$$\begin{aligned} \dot e_1(\xi,\alpha,\beta,\varepsilon) &= \frac{\partial e_1(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi}[f(\xi,\varepsilon)+f_\alpha(\xi,\varepsilon)\alpha+f_\beta(\xi,\varepsilon)\beta],\\ \dot d_1(\xi,\alpha,\beta,\varepsilon) &= \frac{\partial d_1(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi}[f(\xi,\varepsilon)+f_\alpha(\xi,\varepsilon)\alpha+f_\beta(\xi,\varepsilon)\beta]. \end{aligned} \tag{23}$$

Поэтому формулы (22) неконструктивны. Чтобы получить конструктивное определение уточняющих поправок, продолжим начатую в (19) нумерацию вариантов приближенных решений и рассмотрим следующий вариант 1, когда вместо $\dot e_1, \dot d_1$ в формулах (22) используются производные от $e_1, d_1$ в силу уравнений модели снаряда как материальной точки. Такие производные выражаются формулами

$$\dot e_1^{[1]}(\xi,\varepsilon) = \frac{\partial e_1(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi}f(\xi,\varepsilon), \qquad \dot d_1^{[1]}(\xi,\varepsilon) = \frac{\partial d_1(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi}f(\xi,\varepsilon). \tag{24}$$

Вариант 1 рассмотрен в работе [2], где для него дана оценка погрешности в виде сложных неравенств, из которых не виден порядок погрешности. Поэтому основной целью настоящей работы является определение порядка погрешности для варианта 1 по отношению к малому параметру $\varepsilon$.

В соответствии с определением, модифицированнное приближенное квазирешение для варианта 1 представляется в виде

$$\begin{aligned} \Omega_+^{[1]}(t,\varepsilon) &= i\,[\lambda_{1+}(t,\varepsilon)+k(t,\varepsilon)]\,\widetilde u_{1+}^{[1]}(t,\varepsilon)+\\ &\quad +i\,[\lambda_{2+}(t,\varepsilon)+k(t,\varepsilon)]\,\widetilde u_{2+}^{[1]}(t,\varepsilon)+e_1(t,\varepsilon)+e_2^{[1]}(t,\varepsilon),\\ \Delta_+^{[1]}(t,\varepsilon) &= \widetilde u_{1+}^{[1]}(t,\varepsilon)+\widetilde u_{2+}^{[1]}(t,\varepsilon)+d_1(t,\varepsilon)+d_2^{[1]}(t,\varepsilon). \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь функции $\widetilde{u}_{j+}^{[1]}$ $(j = 1, 2)$ заданы формулами

$$\widetilde{u}_{j+}^{[1]}(t,\varepsilon) = C_{j+}^{[1]} \exp \int\limits_{t_0}^{t} \lambda_{j+}(\tau,\varepsilon)\, d\tau = C_{j+}^{[1]} \frac{w^{1/4}(t_0,\varepsilon)}{w^{1/4}(t,\varepsilon)} \exp \int\limits_{t_0}^{t} \lambda_j(\tau,\varepsilon)\, d\tau, \tag{26}$$

поправки выражается формулами $e_2^{[1]}, d_2^{[1]}(t,\varepsilon) = e_2^{[1]}, d_2^{[1]}(\xi^{(5)}(t,\varepsilon),\varepsilon)$, где

$$e_2^{[1]} = e_2^{[1]}(\xi^{(5)},\varepsilon) = -\frac{\dot{e}_1^{[1]} k + \dot{d}_1^{[1]} b}{ib - ak}, \qquad d_2^{[1]} = d_2^{[1]}(\xi^{(5)},\varepsilon) = \frac{i\dot{e}_1^{[1]} + \dot{d}_1^{[1]} a}{ib - ak}, \tag{27}$$

а функции $\dot{e}_1^{[1]}, \dot{d}_1^{[1]}$ определены в (24).

Чтобы найти погрешность приближенного квазирешения (25), (26), вводятся переменные $u_{1+}^{[1]}$, $u_{2+}^{[1]}$ (комплексные моды) по формулам

$$\begin{gathered} \Omega = i\left[\lambda_{1+}(t,\varepsilon) + k(t,\varepsilon)\right] u_{1+}^{[1]} + i\left[\lambda_{2+}(t,\varepsilon) + k(t,\varepsilon)\right] u_{2+}^{[1]} + e_1(t,\varepsilon) + e_2^{[1]}(t,\varepsilon), \\ \Delta = u_{1+}^{[1]} + u_{2+}^{[1]} + d_1(t,\varepsilon) + d_2^{[1]}(t,\varepsilon). \end{gathered} \tag{28}$$

Для переменных $u_{1+}^{[1]}$, $u_{2+}^{[1]}$ имеем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_{j+}^{[1]} = \lambda_{j+} u_{j+}^{[1]} \pm \rho(u_{1+}^{[1]} + u_{2+}^{[1]}) \pm \frac{1}{2w^{1/2}}[ih_e^{[1]} + (\lambda_{3-j,+} + k)h_d^{[1]}], \quad j = 1, 2, \tag{29}$$

где

$$h_e^{[1]} = \dot{e}_1 - \dot{e}_1^{[1]} + \dot{e}_2^{[1]}, \qquad h_d^{[1]} = \dot{d}_1 - \dot{d}_1^{[1]} + \dot{d}_2^{[1]}, \tag{30}$$

$$\rho = \frac{\ddot{w}}{8w^{3/2}} - \frac{5\dot{w}^2}{32w^{5/2}}, \tag{31}$$

верхний и нижний знаки соответствуют $j = 1$ и $j = 2$. С учетом начальных условий система (29) эквивалентна системе двух интегральных уравнений

$$u_{j+}^{[1]}(t,\varepsilon) - \widetilde{u}_{j+}^{[1]}(t,\varepsilon) = h_{1j}(t,\varepsilon) + h_{2j}(t,\varepsilon), \quad j = 1, 2, \tag{32}$$

где

$$\begin{aligned} h_{1j}(t,\varepsilon) &= \pm \int\limits_{t_0}^{t} \rho(u_{1+}^{[1]} + u_{2+}^{[1]})(\exp \int\limits_{\tau}^{t} \lambda_{j+}\, d\tau_1)\, d\tau, \\ h_{2j}(t,\varepsilon) &= \pm \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{2w^{1/2}}[ih_e^{[1]} + (\lambda_{3-j,+} + k)h_d^{[1]}](\exp \int\limits_{\tau}^{t} \lambda_{j+}\, d\tau_1)\, d\tau, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{33}$$

Поэтому для оценки погрешности комплексных мод $\widetilde{u}_{j+}^{[1]}$ в квазирешении (25), (26) достаточно определить порядки интегралов (33) по отношению к $\varepsilon$.

Модифицированное приближенное решение $\Omega^{[1]}, \Delta^{[1]}$ для варианта 1 определено формулами, которые отличаются от формул (25) только тем, что вместо величин $\lambda_{j+}$ в них используются величины $\lambda_j$, $j = 1, 2$. Комплексные постоянные в этом приближенном решении обозначим через $C_j^{[1]}$, комплексные моды — через $u_j^{[1]}$, а их приближения вида (26) — через $\widetilde{u}_j^{[1]}$, $j = 1, 2$.

Приближенное квазирешение и приближенное решение удовлетворяют в момент $t_0$ тем же начальным условиям, что и точное решение уравнений (15).

**5. Вспомогательные формулы.** Подставив выражения (3) в формулы (18), находим представления

$$\begin{aligned} e_1(\xi^{(5)}, \varepsilon) &= \varepsilon^2 v^{-1} E(\xi^{(3)}, \varepsilon)(\cos\theta - i\psi\sin\theta), \\ d_1(\xi^{(5)}, \varepsilon) &= \varepsilon^2 v^{-3} D(\xi^{(3)}, \varepsilon)(\cos\theta - i\psi\sin\theta), \end{aligned} \tag{34}$$

в которых $E, D(\xi^{(3)}, \varepsilon) = O^*(1)$, поскольку порядок единица имеют функции $R_1^{(0)}, R_2^{(0)}, M_3^{(0)}$, характеризующие силу лобового сопротивления, подъемную силу и опрокидывающий момент. Частные производные функций $E, D(\xi^{(3)}, \varepsilon)$ по компонентам вектора $\xi^{(3)}$ равны $O(1)$. Дифференцирование выражений (34) по $t$ в силу уравнений (2) приводит к формулам, содержащим $\alpha, \beta$. Выделяя в них переменную $\Delta = \alpha + i\beta$, получаем представления

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(\xi^{(5)}, \alpha, \beta, \varepsilon) &= \varepsilon^5 \dot{E}_{50}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \varepsilon^6 v^{-2} \dot{E}_{6,-2}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon^6 \Delta \dot{E}_{60}^{\Delta}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \varepsilon^8 \alpha\psi \dot{E}_{80}^{\alpha\psi}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \varepsilon^8 \beta\psi \dot{E}_{80}^{\beta\psi}(\xi^{(5)}, \varepsilon), \\ \dot{d}_1(\xi^{(5)}, \alpha, \beta, \varepsilon) &= \varepsilon^5 v^{-2} \dot{D}_{5,-2}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \varepsilon^6 v^{-4} \dot{D}_{6,-4}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon^6 v^{-2} \Delta \dot{D}_{6,-2}^{\Delta}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \varepsilon^8 v^{-2} \alpha\psi \dot{D}_{8,-2}^{\alpha\psi}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \varepsilon^8 v^{-2} \beta\psi \dot{D}_{8,-2}^{\beta\psi}(\xi^{(5)}, \varepsilon). \end{aligned} \tag{35}$$

Согласно (23), (24), функции $\dot{e}_1^{[1]}, \dot{d}_1^{[1]}$ равны функциям $\dot{e}_1, \dot{d}_1$ взятым при $\alpha = \beta = 0$. Поэтому, полагая $\alpha = \beta = 0$ в (35), имеем

$$\begin{aligned} \dot{e}_1^{[1]}(\xi^{(5)}, \varepsilon) &= \varepsilon^5 \dot{E}_{50}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \varepsilon^6 v^{-2} \dot{E}_{6,-2}(\xi^{(5)}, \varepsilon), \\ \dot{d}_1^{[1]}(\xi^{(5)}, \varepsilon) &= \varepsilon^5 v^{-2} \dot{D}_{5,-2}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \varepsilon^6 v^{-4} \dot{D}_{6,-4}(\xi^{(5)}, \varepsilon). \end{aligned} \tag{36}$$

Вычитая равенства (36) из (35), приходим к представлениям

$$\dot{e}_1 - \dot{e}_1^{[1]} = \dot{e}_1^{\Delta} \Delta + O(\varepsilon^8), \quad \dot{d}_1 - \dot{d}_1^{[1]} = \dot{d}_1^{\Delta} \Delta + O(\varepsilon^7), \tag{37}$$

где

$$\dot{e}_1^{\Delta}(\xi^{(5)}, \varepsilon) = \varepsilon^6 \dot{E}_{60}^{\Delta}, \quad \dot{d}_1^{\Delta}(\xi^{(5)}, \varepsilon) = \varepsilon^6 v^{-2} \dot{D}_{6,-2}^{\Delta}. \tag{38}$$

Чтобы найти представления функций $e_2^{[1]}, d_2^{[1]}$, подставляем в формулы (27) для этих функций выражения (3), а вместо функций $\dot e_1^{[1]}, \dot d_1^{[1]}$ подставляем выражения (36). Получаем

$$\begin{aligned} &e_2^{[1]}(\xi^{(5)},\varepsilon)=\varepsilon^5 v^{-2}F_{5,-2}(\xi^{(5)},\varepsilon)+\varepsilon^6 v^{-4}F_{6,-4}(\xi^{(5)},\varepsilon),\\ &d_2^{[1]}(\xi^{(5)},\varepsilon)=\varepsilon^5 v^{-4}G_{5,-4}(\xi^{(5)},\varepsilon)+\varepsilon^6 v^{-6}G_{6,-6}(\xi^{(5)},\varepsilon). \end{aligned} \tag{39}$$

Продифференцировав эти выражения по $t$ в силу подсистемы (1), имеем

$$\begin{aligned} \dot e_2^{[1]}(\xi^{(5)},\alpha,\beta,\varepsilon)&=\varepsilon^8 v^{-1}\dot F_{8,-1}+\varepsilon^9 v^{-3}\dot F_{9,-3}+\varepsilon^{10}v^{-5}\dot F_{10,-5}+\\ &+\varepsilon^9 v^{-1}(\alpha\dot F^{\alpha}_{9,-1}+\beta\dot F^{\beta}_{9,-1})+\varepsilon^{10}v^{-3}(\alpha\dot F^{\alpha}_{10,-3}+\beta\dot F^{\beta}_{10,-3}),\\ \dot d_2^{[1]}(\xi^{(5)},\alpha,\beta,\varepsilon)&=\varepsilon^8 v^{-3}\dot G_{8,-3}+\varepsilon^9 v^{-5}\dot G_{9,-5}+\varepsilon^{10}v^{-7}\dot G_{10,-7}+\\ &+\varepsilon^9 v^{-3}(\alpha\dot G^{\alpha}_{9,-3}+\beta\dot G^{\beta}_{9,-3})+\varepsilon^{10}v^{-5}(\alpha\dot G^{\alpha}_{10,-5}+\beta\dot G^{\beta}_{10,-5}). \end{aligned} \tag{40}$$

В соответствии с (4), $v^{-1}=O(\varepsilon^{-1/2})$. Поэтому из (34), (37)–(40), (30) следуют оценки

$$\begin{aligned} &e_1=O(\varepsilon^{3/2}),\quad d_1=O(\varepsilon^{1/2}),\qquad \dot e_1-\dot e_1^{[1]}=O(\varepsilon^6),\quad \dot d_1-\dot d_1^{[1]}=O(\varepsilon^5),\\ &e_2^{[1]}=O(\varepsilon^4),\quad d_2^{[1]}=O(\varepsilon^3),\qquad \dot e_2^{[1]}=O(\varepsilon^{15/2}),\qquad \dot d_2^{[1]}=O(\varepsilon^{13/2}),\\ &h_e^{[1]}=O(\varepsilon^6),\quad h_d^{[1]}=O(\varepsilon^5). \end{aligned} \tag{41}$$

**6. Оценка интегралов $h_{1j}$ ($j=1,2$).** В общем случае незатухающих колебаний оси симметрии снаряда, т. е. при выполнении неравенств (10), справедливы оценки

$$|\exp\int_{\tau}^{t}\lambda_{j+}(\tau_1,\varepsilon)\,d\tau_1|=\left|w^{1/4}(\tau,\varepsilon)w^{-1/4}(t,\varepsilon)\right|\exp\int_{\tau}^{t}n_j(\tau_1,\varepsilon)\,d\tau_1=O(1). \tag{42}$$

Для величины $\rho$ из (12), (31) следует оценка $\rho=O(\varepsilon^6)$. Кроме того, пользуясь второй формулой замены (28) в соответствии с (11), (41) имеем $u_{1+}^{[1]}+u_{2+}^{[1]}=$ $=\Delta-d_1-d_2^{[1]}=O(1)$. Таким образом, подынтегральные функции в формулах (33) для $h_{1j}$ равны $O(\varepsilon^6)$. Поэтому при $t_1-t_0=O(\varepsilon^{-3})$ в случае незатухающих колебаний имеем

$$h_{1j}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^3);\quad j=1,2;\quad t\in[t_0,t_1]. \tag{43}$$

**7. Оценка интегралов $h_{2j}$ ($j=1,2$).** Определение порядков интегралов $h_{2j}$ ($j=1,2$) проведем так, чтобы получить оценки, которые достигаются для некоторых типов снарядов на некоторых траекториях полета.

Воспользовавшись формулами (6) для $\lambda_{j+}$ и формулами (30) для $h_e, h_d$, запишем выражения (33) этих интегралов в виде сумм

$$h_{2j}(t,\varepsilon) = h_{2j}^{(1)}(t,\varepsilon) + h_{2j}^{(2)}(t,\varepsilon) + h_{2j}^{(3)}(t,\varepsilon), \quad j = 1,2, \tag{44}$$

где

$$h_{2j}^{(1)}(t,\varepsilon) = \pm\int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{2w^{1/2}}[i(\dot e_1 - \dot e_1^{[1]}) + (\lambda_{3-j}+k)(\dot d_1 - \dot d_1^{[1]})](\exp\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_{j+}\,d\tau_1)\,d\tau,$$

$$h_{2j}^{(2)}(t,\varepsilon) = \mp\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\dot w}{8w^{3/2}}h_d^{[1]}(\exp\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_{j+}\,d\tau_1)\,d\tau, \tag{45}$$

$$h_{2j}^{(3)}(t,\varepsilon) = \pm\int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{2w^{1/2}}[i\dot e_2^{[1]} + (\lambda_{3-j}+k)\dot d_2^{[1]}](\exp\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_{j+}\,d\tau_1)\,d\tau, \quad j=1,2.$$

**7.1. Оценка величин $\boldsymbol{h_{2j}^{(1)}}$ $\boldsymbol{(j = 1, 2)}$.** С помощью формул (19), (21) выделим в явном виде ведущие члены подынтегральных функций в выражениях (45) интегралов $h_{2j}^{(1)}$, $j = 1,2$. Принимая во внимание представления (14), (37), в общем случае незатухающих колебаний получаем

$$h_{2j}^{(1)}(t,\varepsilon) =$$
$$= \pm\frac{1}{2w^{1/4}(t,\varepsilon)}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{1}{w^{1/4}}[i\dot e_1^{\Delta} + (\lambda_{3-j}+k)\dot d_1^{\Delta}]\Delta_+^{[0]}(\exp\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_j\,d\tau_1)\,d\tau + O(\varepsilon^4), \ j=1,2.$$

Подставляем сюда явное выражение функции $\Delta_+^{[0]}(\tau,\varepsilon)$, вытекающее из (19), (20). Приходим к формулам

$$h_{2j}^{(1)}(t,\varepsilon) =$$
$$= \frac{1}{2w^{1/4}(t,\varepsilon)}\big[i_j^{(0)}(t,\varepsilon) + w^{1/4}(t_0,\varepsilon)\big(C_{j+}^{[0]}\,i_j^{(1)}(t,\varepsilon) + +C_{3-j,+}^{[0]}\,i_j^{(2)}(t,\varepsilon)\big)\big], \quad j=1,2, \tag{46}$$

в которых

$$i_j^{(0)}(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t}\frac{d_1}{w^{1/4}}[i\dot e_1^{\Delta} + (\lambda_{3-j}+k)\dot d_1^{\Delta}](\exp\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_j\,d\tau_1)\,d\tau,$$

$$i_j^{(1)}(t,\varepsilon) = (\exp\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_j\, d\tau) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{w^{1/2}}[i\dot{e}_1^{\Delta} + (\lambda_{3-j}+k)\dot{d}_1^{\Delta}]\, d\tau, \tag{47}$$

$$i_j^{(2)}(t,\varepsilon) = (\exp\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_j\, d\tau) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{w^{1/2}}[i\dot{e}_1^{\Delta} + (\lambda_{3-j}+k)\dot{d}_1^{\Delta}][\exp\int\limits_{\tau}^{t}(\mp(\lambda_1-\lambda_2))\, d\tau_1]\, d\tau.$$

**7.1.1. Оценка функций $\boldsymbol{i_j^{(0)}}$ $\boldsymbol{(j=1,2)}$.** Запишем первую формулу (47) в виде

$$i_j^{(0)}(t,\varepsilon) = -\int\limits_{t_0}^{t} v_j^{(0)}(\tau,\varepsilon)(\exp\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_j\, d\tau_1)\, d\tau, \quad j=1,2,$$

$$v_j^{(0)}(\tau,\varepsilon) = v_j^{(0)}(\xi^{(5)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)), \qquad v_j^{(0)}(\xi^{(5)},\varepsilon)) = \frac{d_1}{\lambda_j w^{1/4}}[i\dot{e}_1^{\Delta} + (\lambda_{3-j}+k)\dot{d}_1^{\Delta}]$$

и применим правило интегрирования по частям. С помощью соотношений (12), (14), (34), (38) для функций $w$, $\lambda_j+k$, $d_1$, $\dot{e}_1^{\Delta}$, $\dot{d}_1^{\Delta}$ находим представления

$$v_j^{(0)}(\xi^{(5)},\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^8 v^{-3} V_1^{(0)}(\xi^{(5)},\varepsilon), & j=1, \\ \varepsilon^8 v^{-7} V_2^{(0)}(\xi^{(5)},\varepsilon). & j=2. \end{cases}$$

Продифференцировав их в силу уравнений (1), с учетом вытекающего из (4) соотношения $v^{-1} = O(\varepsilon^{-1/2})$ получаем

$$v_1^{(0)} = O(\varepsilon^{13/2}), \qquad v_2^{(0)} = O(\varepsilon^{9/2}), \qquad \dot{v}_1^{(0)} = O(\varepsilon^{10}), \qquad \dot{v}_2^{(0)} = O(\varepsilon^{8}).$$

В результате в общем случае незатухающих колебаний имеем оценки

$$i_j^{(0)}(t,\varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon^{13/2}), & j=1, \\ O(\varepsilon^{9/2}), & j=2. \end{cases} \tag{48}$$

**7.1.2. Оценка функций $\boldsymbol{i_j^{(1)}}$ $\boldsymbol{(j=1,2)}$.** Для подынтегральных функций

$$g_j^{(1)} = w^{-1/2}[i\dot{e}_1^{\Delta} + (\lambda_{3-j}+k)\dot{d}_1^{\Delta}],\ j=1,2, \tag{49}$$

в формулах (47) для $i_j^{(1)}$ $(j=1,2)$ так же, как и в предыдущем подпункте, получаем представления

$$g_j^{(1)}(\xi^{(5)},\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^6 G_1^{(1)}(\xi^{(5)},\varepsilon), & j=1,2, \\ \varepsilon^6 v^{-2} G_2^{(1)}(\xi^{(5)},\varepsilon), & j=2, \end{cases} \tag{50}$$

из которых вытекают оценки

$$g_j^{(1)} = O(\varepsilon^{7-j}), \quad j = 1, 2. \tag{51}$$

После интегрирования по отрезку времени длины $t - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$ имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t} g_j^{(1)}(\tau, \varepsilon)\, d\tau = O(\varepsilon^{4-j}), \quad j = 1, 2. \tag{52}$$

Рассмотрим *общий случай*, когда выполнены соотношения (10), так что колебания оси симметрии снаряда могут быть как затухающими, так и незатухающими. Тогда, в соответствии с (42), экспоненциальные множители перед интегралами в формулах (47) для $i_j^{(1)}$ равны $O(1)$, и поэтому

$$i_j^{(1)}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{4-j}), \quad j = 1, 2. \tag{53}$$

Поскольку функции $g_j^{(1)}$ $(j = 1, 2)$ – медленно изменяющиеся, то оценки (52) являются точными по порядку в тех ситуациях, когда достигаются оценки (51) и время полета равно $t - t_0 = O^*(\varepsilon^{-3})$. В случае незатухающих колебаний оси симметрии точными по порядку являются также оценки (42). Поэтому оценки (53) могут достигаться для некоторых типов снарядов на некоторых траекториях их полета. Вторая из них определяет общую погрешность квазирешения (25), (26).

Из формул (13) следует, что функции $n_j$ $(j = 1, 2)$ по модулю равны $O_+(\varepsilon^2)$. Рассмотрим практически интересный случай, когда колебания оси симметрии с низкой частотой $\omega_2$ являются *затухающими*, так что выполняется соотношение $n_2 = -O_+^*(\varepsilon^2)$. Из него следует неравенство $n_2(t, \varepsilon) \le -\varepsilon^2 N_2$, где $N_2 > 0$ — постоянная порядка единицы. Для подынтегральной функции $g_2^{(1)}$ в формуле (47) для $i_2^{(1)}$ в соответствии с (51) справедливо сооотношение $g_2^{(1)} = O(\varepsilon^5)$. Из него вытекает неравенство $|g_2^{(1)}(t, \varepsilon)| \le \varepsilon^5 G_2$, где $G_2 > 0$ – постоянная порядка единицы. Тогда для функции $i_2^{(1)}$ имеем неравенство

$$|i_2^{(1)}(t, \varepsilon)| \le \varepsilon^5 G_2 (t - t_0) e^{-\varepsilon^2 N_2 (t - t_0)}, \quad \text{или} \quad |i_2^{(1)}(t, \varepsilon)| \le \varepsilon^3 \frac{G_2}{N_2} s e^{-s},$$

где $s = \varepsilon^2 N_2 (t - t_0) \ge 0$. Функция $s e^{-s}$ в точке $s = 1$ достигает своего максимума, равного $e^{-1}$. Поэтому $|i_2^{(1)}(t, \varepsilon)| \le \varepsilon^3 G_2/(e N_2)$. Таким образом, в случае затухания низкочастотных колебаний вместо второй оценки (53) имеем

$$i_2^{(1)}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3). \tag{54}$$

**7.1.3. Оценка функций $i_j^{(2)}$ ($j = 1, 2$).** Выражения (47) для $i_j^{(2)}$ ($j = 1, 2$) можно записать в виде

$$i_j^{(2)}(t,\varepsilon) = (\exp\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_j \, d\tau) \int\limits_{t_0}^{t} v_j^{(2)} [\frac{d}{d\tau} \exp \int\limits_{\tau}^{t} (\mp(\lambda_1 - \lambda_2))\, d\tau_1] \, d\tau, \quad j = 1, 2, \quad (55)$$

где

$$v_j^{(2)}(\tau,\varepsilon) = v_j^{(2)}(\xi^{(5)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon), \qquad v_j^{(2)}(\xi^{(5)},\varepsilon) = \frac{g_j^{(1)}(\xi^{(5)},\varepsilon)}{\pm[\lambda_1(\xi^{(5)},\varepsilon) - \lambda_2(\xi^{(5)},\varepsilon)]},$$

а функции $g_j^{(1)}$ определены формулами (49). Согласно определению (6) величин $\lambda_j$, с учетом оценки (12) для $w$ имеем $\lambda_1 - \lambda_2 = 2w^{1/2} = O^*(1)$. Поэтому из соотношений (50) следуют представления

$$v_j^{(2)}(\xi^{(5)},\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^6 V_1^{(1)}(\xi^{(5)},\varepsilon), & j = 1, \\ \varepsilon^6 v^{-2} V_2^{(1)}(\xi^{(5)},\varepsilon), & j = 2. \end{cases}$$

Продифференцировав их в силу уравнений (1), с учетом вытекающего из (4) соотношения $v^{-1} = O(\varepsilon^{-1/2})$ имеем

$$v_1^{(2)} = O(\varepsilon^6), \quad v_2^{(2)} = O(\varepsilon^5), \quad \dot v_1^{(2)} = O(\varepsilon^9), \quad \dot v_2^{(2)} = O(\varepsilon^{17/2}). \qquad (56)$$

Пользуясь интегрированием по частям, получаем из (55) формулы, содержащие под знаками интегралов произведения $\dot v_j^{(2)}$ ($j = 1, 2$) на экспоненты интегралов от $\mp(\lambda_1 - \lambda_2)$, порядки которых неизвестны. Поэтому после интегрирования по частям внесем экспоненты, стоящие перед интегралами в (55), под знаки интегралов с $\dot v_j^{(2)}$ ($j = 1, 2$). Получим формулы

$$i_j^{(2)}(t,\varepsilon) = v_j^{(2)}(t,\varepsilon) \exp\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_{3-j}\, d\tau - v_j^{(2)}(t_0,\varepsilon) \exp\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_j \, d\tau -$$
$$- \int\limits_{t_0}^{t} \dot v_j^{(2)} (\exp\int\limits_{t_0}^{\tau} \lambda_{3-j}\, d\tau_1)(\exp\int\limits_{\tau}^{t} \lambda_j\, d\tau_1)\, d\tau, \quad j = 1, 2,$$

в которых все экспоненциальные функции в общем случае равны $O(1)$. Поэтому порядки подынтегральных функций равны порядкам соответствущих функций $v_j^{(2)}$, указанным в (56). В результате при $t - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$ имеем

$$i_j^{(2)}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{7-j}), \quad j = 1, 2. \qquad (57)$$

**7.1.4. Итоговые оценки величин $h_{2j}^{(1)}$ $(j = 1, 2)$.** В случае незатухающих колебаний оси симметрии в соответствии с оценками (48), (53), (57) для $i_j^{(k)}$ $(k = 0, 1, 2;\ j = 1, 2)$ из равенства (46) вытекают оценки

$$h_{2j}^{(1)}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{4-j}), \quad j = 1, 2. \tag{58}$$

В случае затухания низкочастотных колебаний для $i_2^{(1)}$ установлена кубическая оценка (54). Следовательно, в этом случае имеем

$$h_{2j}^{(1)}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad j = 1, 2. \tag{59}$$

Порядок суммы (44) определяется наинизшим из порядков ее членов. Поэтому из (58), (59) следует, что при определении порядков оставшихся двух членов этой суммы, то есть $h_{2j}^{(2)}, h_{2j}^{(3)}$, нет необходимости получать оценки, имеющие порядок выше $\varepsilon^3$.

**7.2. Оценка величин $h_{2j}^{(2)}$ $(j = 1, 2)$.** В соответствии с оценками (12), (41) для $w, \dot{w}, h_d^{[1]}$ в случае незатухающих колебаний оси симметрии подынтегральные функции в формулах (45) для $h_{2j}^{(2)}$ $(j = 1, 2)$ равны $O(\varepsilon^8)$. В результате их интегрирования на отрезке времени длины $t - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$ получаем

$$h_{2j}^{(2)}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^5), \quad j = 1, 2. \tag{60}$$

**7.3. Оценка величин $h_{2j}^{(3)}$ $(j = 1, 2)$.** С учетом оценки (41) для $\dot{e}_2^{[1]}$ и представлений (14), (40) для $\lambda_j + k$, $\dot{d}_2^{[1]}$, в случае незатухающих колебаний подынтегральная функция в формуле (45) для $h_{2j}^{(3)}$ $(j = 1, 2)$ равна $O(\varepsilon^{15/2})$ при $j = 1$ и $O(\varepsilon^{13/2})$ при $j = 2$. Поэтому после интегрирования на отрезке времени длины $t - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$ получаем

$$h_{2j}^{(3)}(t, \varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon^{9/2}), & j = 1, \\ O(\varepsilon^{7/2}), & j = 2. \end{cases} \tag{61}$$

**7.4. Итоговые оценки интегралов $h_{2j}$ $(j = 1, 2)$.** В общем случае незатухающих колебаний оси симметрии для интегралов $h_{2j}^{(1)}, h_{2j}^{(2)}, h_{2j}^{(3)}$ $(j = 1, 2)$ найдены оценки (58), (60), (61). Пользуясь ими, по формуле (44) для этого случая получаем

$$h_{2j}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{4-j}), \quad j = 1, 2. \tag{62}$$

В случае затухания низкочастотных колебаний вместо оценки (58) имеем оценку (59), и поэтому

$$h_{2j}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad j = 1, 2. \tag{63}$$

**8. Оценка погрешности приближенного квазирешения $\boldsymbol{\Omega}_+^{[1]}, \boldsymbol{\Delta}_+^{[1]}$.** Из формул (32) с учетом соотношений (43), (62) вытекают следующие оценки погрешности комплексных мод для случая *незатухающих* колебаний оси симметрии снаряда

$$u_{j+}^{[1]}(t,\varepsilon) - \widetilde{u}_{j+}^{[1]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{4-j}), \quad j = 1, 2. \tag{64}$$

Вычитая равенства (25) из соответствующих равенств (28) и пользуясь соотношениями (64), приходим к следующей квадратичной оценке погрешности приближенного квазирешения $\Omega_+^{[1]}, \Delta_+^{[1]}$ в случае незатухающих колебаний

$$\Omega(t,\varepsilon) - \Omega_+^{[1]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad \Delta(t,\varepsilon) - \Delta_+^{[1]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{65}$$

В случае *затухания* низкочастотных колебаний в соответствии с (32), (43), (63) имеем для погрешности комплексных мод оценки

$$u_{j+}^{[1]}(t,\varepsilon) - \widetilde{u}_{j+}^{[1]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad j = 1, 2. \tag{66}$$

Из них следует кубическая оценка погрешности приближенного квазирешения $\Omega_+^{[1]}, \Delta_+^{[1]}$ для этого случая:

$$\Omega(t,\varepsilon) - \Omega_+^{[1]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad \Delta(t,\varepsilon) - \Delta_+^{[1]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Итак, если колебания оси симметрии снаряда не предполагаются затухающими, то погрешности приближенных квазирешений $\Omega_+^{[0]}, \Delta_+^{[0]}$ и $\Omega_+^{[1]}, \Delta_+^{[1]}$ выражаются формулами (21) и (65), т. е. являются величинами порядка $\varepsilon^2$ или более высокого порядка. Но для квазирешения $\Omega_+^{[1]}, \Delta_+^{[1]}$ оценка (65) является достижимой, поскольку при $j = 2$ достижимой является оценка (53), а вместе с ней и оценки (58), (62), (64). Следовательно, хотя бы для некоторых траекторий модифицированное приближенное квазирешение $\Omega_+^{[1]}, \Delta_+^{[1]}$ не является более точным, чем основное приближенное квазирешение $\Omega_+^{[0]}, \Delta_+^{[0]}$.

**9. Оценка погрешности приближенного решения $\boldsymbol{\Omega}^{[1]}, \boldsymbol{\Delta}^{[1]}$.** Разрешив формулы, определяющие переменные $u_{j+}^{[1]}, u_j^{[1]}$ и константы $C_{j+}^{[1]}, C_j^{[1]}$, относительно этих переменных и констант, приходим к соотношениям $u_j^{[1]} = u_{j+}^{[1]} + O(\varepsilon^3)$, $\widetilde{u}_j^{[1]} = \widetilde{u}_{j+}^{[1]} + O(\varepsilon^3)$ $(j = 1, 2)$, из которых следуют равенства $u_j^{[1]} - \widetilde{u}_j^{[1]} = u_{j+}^{[1]} - \widetilde{u}_{j+}^{[1]} + O(\varepsilon^3)$ $(j = 1, 2)$. Отсюда с учетом формулы (64) в случае *незатухающих* колебаний получаем

$$u_j^{[1]}(t,\varepsilon) - \widetilde{u}_j^{[1]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{4-j}), \quad j = 1, 2,$$

$$\Omega(t,\varepsilon)-\Omega^{[1]}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^2),\quad \Delta(t,\varepsilon)-\Delta^{[1]}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^2),\quad t\in[t_0,t_1],$$

В случае *затухания* низкочастотных колебаний в соответствии с (66) имеем

$$u_j^{[1]}(t,\varepsilon)-\widetilde{u}_j^{[1]}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^3),\quad j=1,2,$$

$$\Omega(t,\varepsilon)-\Omega^{[1]}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^3),\quad \Delta(t,\varepsilon)-\Delta^{[1]}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^3),\quad t\in[t_0,t_1].$$

Из рассуждений в конце п. 8 следует, что при незатухающих колебаниях хотя бы для некоторых траекторий модифицированное приближенное решение $\Omega^{[1]},\Delta^{[1]}$ не является более точным, чем приближенное решение $\Omega^{[0]},\Delta^{[0]}$.

Полученные оценки соответствуют результатам проведенных расчетов.


1. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1969. – 380 с.
2. *Пугачев В.С.* Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе // Тр. ВВИА им. Жуковского. – 1940. – Вып. 70. – 90 с.
3. *Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н., Богодистов С.С.* Внешняя баллистика. 3-е изд. – М.: Машиностроение, 1991. – 640 с.
4. *Коносевич Б.И.* Оценка погрешности линеаризованных уравнений движения осесимметричного снаряда // Прикл. математика и механика. – 2008. –**72**, вып. 6. – С. 930–941.
5. *Коносевич Б.И.* Исследование динамики полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 109–119.


*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк*
konos@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 20.09.09