ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2008. Вып. 38

УДК 531.38

©2008. **Е.К. Щетинина**

О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА В ОДНОМ СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНОГО ИНВАРИАНТНОГО СООТНОШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА

Исследовано движение гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в задаче, описываемой уравнениями Кирхгофа [1], в случае их интегрируемости, указанном в [2]. Общий случай движения охарактеризован посредством трех вращений. В случае, когда на гиростат действуют только центральные ньютоновские силы, показано, что движение гиростата является прецессией типа Брессана [3] в решении Гесса [4].

Введение. В динамике твердого тела с неподвижной точкой основным методом построения решений в замкнутом виде является метод инвариантных соотношений [5], подробно изложенный в монографии [6]. Актуальность построения частных решений объясняется не только возможностью кинематического истолкования движения тела в конкретном случае интегрируемости, но и исследованием движения тела в окрестности полученных решений.

Метод инвариантных соотношений нашел широкое применение и в обобщенных задачах динамики, в частности, в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [1]. Решения уравнений Кирхгофа, описываемые одним инвариантным соотношением, рассмотрены С.А. Чаплыгиным [7, 8] и П.В. Харламовым [9]. В работе [2] выделен класс частных решений уравнений Кирхгофа с одним линейным инвариантным соотношением, которые выражаются в эллиптических функциях времени.

Данная статья посвящена анализу свойств движения гиростата в решении, указанном в [2]. Выделен частный случай, который соответствует прецессии общего вида относительно горизонтальной оси [10], т.е. является аналогом прецессии Брессана в решении Гесса.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в постановке обобщенной задачи [11] с уравнениями, изоморфными уравнениям Кирхгофа [1]

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times a\mathbf{x} + a\mathbf{x} \times B\boldsymbol{\nu} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}, \tag{2}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор вертикали; $a = (a_{ij})$ – гирационный тензор, построенный в неподвижной точке O гиростата; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает относительную производную по времени.

Уравнения (1), (2) допускают первые интегралы

$$(\mathbf{x}\cdot a\mathbf{x}) - 2(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2E, \qquad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \tag{3}$$

$$(\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = k. \tag{4}$$

Здесь E и k – произвольные постоянные.

В работах [2, 7–9] изучены условия существования у уравнений (1), (2) с интегралами (3) линейного инвариантного соотношения

$$x_1 - (g_0 + g_1\nu_1 + g_2\nu_2 + g_3\nu_3) = 0. \tag{5}$$

При этом в работах С.А. Чаплыгина [7, 8] и П.В. Харламова [9] изучаются условия существования инвариантного соотношения (5) в задаче о движении тела в жидкости, т.е. для уравнений Кирхгофа. В работе [2] для уравнений (1), (2) при условиях

$$a_{12} = a_{23} = 0, \quad a_{13} \neq 0, \quad a_{33} = a_{22}, \quad s_2 = s_3 = 0, \tag{6}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \tag{7}$$

$$\begin{gathered} B_{12} = B_{23} = 0, \quad B_{11} = \frac{a_{22}(a_{11}-a_{22}) + a_0^2}{a_{22}^2 - a_{13}^2} B_{33}, \\ B_{22} = \frac{a_{13}^2 + a_{22}^2}{a_{22}^2 - a_{13}^2} B_{33}, \qquad B_{13} = \frac{2a_{13}a_{22}}{a_{22}^2 - a_{13}^2} B_{33}, \end{gathered} \tag{8}$$

$$C_{12} = C_{23} = 0, \tag{9}$$

$$C_{13} = \frac{a_{22}^2 a_0^2}{(a_{22}^2 - a_{13}^2)^2} B_{33}^2, \qquad C_{22} - C_{33} = \frac{a_{13}^2 a_{22} a_0^2}{(a_{22}^2 - a_{13}^2)^2} B_{33}^2, \tag{10}$$

$$k = \frac{a_0^2 + a_{22}^2}{2(a_{13}^2 - a_{22}^2)} B_{33}, \tag{11}$$

где $a_0^2 = a_{11}a_{22} - a_{13}^2$, получено решение

$$\begin{gathered} x_1 = \frac{a_{22}(a_{22}\cos\theta - a_{13}\sin\theta\sin\varphi)}{a_{13}^2 - a_{22}^2} B_{33}, \\ x_2 = \frac{a_0^2 \sin\theta\cos\varphi}{a_{13}^2 - a_{22}^2} B_{33} + \frac{\sin\varphi}{a_{22}} D(\theta), \\ x_3 = \frac{a_{22}(a_{11}\sin\theta\cos\varphi - a_{13}\cos\theta)}{a_{13}^2 - a_{22}^2} B_{33} - \frac{\cos\varphi}{a_{22}} D(\theta), \end{gathered} \tag{12}$$

$$\nu_1 = \cos\theta, \qquad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \nu_3 = \sin\theta\sin\varphi, \tag{13}$$

$$\dot{\theta} = D(\theta), \tag{14}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{a_{13}}{a_{22}} \dot{\theta} \cos\varphi, \tag{15}$$

где

$$D(\theta) = \sqrt{a_{22}(\beta_2 \cos^2\theta + \beta_1 \cos\theta + \beta_0)},$$

$$\beta_0 = 2E - C_{33} - \frac{a_{11} a_{22}^2 a_0^2}{(a_{22}^2 - a_{13}^2)^2} B_{33}^2, \qquad \beta_1 = 2s_1, \tag{16}$$

$$\beta_2 = C_{33} - C_{11} + \frac{a_{22}^2 (a_{11} - a_{22}) a_0^2}{(a_{22}^2 - a_{13}^2)^2} B_{33}^2. \tag{17}$$

Интегрируя уравнение (15), получаем

$$\varphi = \arcsin \operatorname{th} \frac{a_{13}(\theta - \theta_0)}{a_{22}} + \varphi_0, \tag{18}$$

а зависимость $\theta = \theta(t)$ определяется посредством эллиптического интеграла

$$\int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{D(\theta)} = t - t_0. \tag{19}$$

Решение (12)–(15) уравнений (1), (2) зависит от трех существенных произвольных постоянных θ_0, φ_0, E. Постоянная интеграла (4), как следует из (11), принимает фиксированное значение.

Из условий (6), (7) следует, что тело представляет собой гироскоп Гесса, т. е. его обобщенный центр масс лежит на перпендикуляре к круговому сечению гирационного эллипсоида.

Отметим, что соотношения (14), (15) получены из уравнений Пуассона (2) на основании соотношений (12), (13) и равенств

$$\omega_1 = a_{11} x_1 + a_{13} x_3, \qquad \omega_2 = a_{22} x_2, \qquad \omega_3 = a_{13} x_1 + a_{22} x_3. \tag{20}$$

В переменных ν_i $(i = \overline{1,3})$ уравнения Пуассона таковы

$$\dot{\nu}_1 = -\sqrt{\Delta}, \quad \dot{\nu}_2 = \frac{\nu_2(a_{22}\nu_1 - a_{13}\nu_3)}{a_{22}(\nu_2^2 + \nu_3^2)} \sqrt{\Delta}, \quad \dot{\nu}_3 = \frac{a_{13}\nu_2^2 + a_{22}\nu_1\nu_3}{a_{22}(\nu_2^2 + \nu_3^2)} \sqrt{\Delta}. \tag{21}$$

Здесь $\Delta = a_{22}(1 - \nu_1^2)(\beta_2 \nu_1^2 + \beta_1 \nu_1 + \beta_0)$.

Свойства движения гиростата в решении (12)–(15). Подставив (12), (13) в (20), найдем компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ гиростата

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \mu_0 \cos\theta - \frac{a_{13}}{a_{22}} D(\theta) \cos\varphi, \\ \omega_2 &= \mu_0 \sin\theta \cos\varphi + D(\theta) \sin\varphi, \\ \omega_3 &= \mu_0 \sin\theta \sin\varphi - D(\theta) \cos\varphi, \end{aligned} \tag{22}$$

где введен новый параметр

$$\mu_0 = \frac{a_{22}a_0^2}{a_{13}^2 - a_{22}^2}B_{33}. \tag{23}$$

Пусть $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$ и

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{e}\times\boldsymbol{\nu}}{|\mathbf{e}\times\boldsymbol{\nu}|} = (0, -\sin\varphi, \cos\varphi). \tag{24}$$

Тогда соотношения (22) в векторном виде можно записать так

$$\boldsymbol{\omega} = \mu_0\boldsymbol{\nu} - D(\theta)\Big(\boldsymbol{\gamma} + \frac{a_{13}}{a_{22}}\cos\varphi\,\mathbf{e}\Big). \tag{25}$$

Из формулы (25) вытекает, что движение гиростата можно представить в виде суперпозиции трех вращений относительно векторов $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{e}$: 1) вращение вокруг вектора вертикали происходит с постоянной скоростью μ_0, определяемой формулой (23); 2) скорость вращения вокруг вектора $\mathbf{e}$ зависит от углов θ и φ; 3) скорость вращения вокруг вектора $\boldsymbol{\gamma}$ зависит только от угла θ.

Для более наглядного представления о движении гиростата рассмотрим зависимость всех переменных задачи от времени в частном случае $\beta_2 = 0$, который вследствие (17) имеет вид

$$C_{11} - C_{33} = \frac{a_{22}^2 a_0^2(a_{11} - a_{22})}{(a_{13}^2 - a_{22}^2)^2}B_{33}^2. \tag{26}$$

Из уравнения (19), принимая обозначения

$$x_0 = \sqrt{a_{22}(\beta_0 + \beta_1)}, \quad \tau = \frac{x_0}{2}(t - t_0), \quad k_*^2 = \frac{2\beta_1}{\beta_0 + \beta_1} \tag{27}$$

и условия

$$\beta_0 + \beta_1 > 0, \qquad 0 < \frac{2\beta_1}{\beta_0 + \beta_1} < 1, \tag{28}$$

найдем

$$\theta = 2\mathrm{am}\tau, \tag{29}$$

где $\mathrm{am}\tau = u$ – эллиптическая функция времени, которая получается на основании (19), (27), (28) в результате обращения эллиптического интеграла

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - k_*^2\sin^2 u}} = \tau. \tag{30}$$

В формуле (30) значение модуля эллиптической функции k_* из системы (27) вследствие (28) обеспечивает монотонное возрастание угла нутации (29). Полагаем, что при $\tau = 0$ значение $\theta = 0$. На основании выше изложенного выражение (25) представим следующим образом

$$\boldsymbol{\omega} = \mu_0\boldsymbol{\nu} + x_0\mathrm{dn}\tau\Big(\boldsymbol{\gamma} - \frac{a_{13}}{a_{22}\mathrm{ch}^2\frac{a_{13}\mathrm{am}\tau}{a_{22}}}\mathbf{e}\Big), \tag{31}$$

где вследствие соотношений (13), (18), (24), (29)

$$\begin{aligned} &\sin\theta = 2\mathrm{sn}\tau\ \mathrm{cn}\tau, \qquad \cos\theta = \mathrm{cn}^2\tau - \mathrm{sn}^2\tau\,, \\ &\sin\varphi = \mathrm{th}\frac{2a_{13}\mathrm{am}\tau}{a_{22}}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\mathrm{ch}\dfrac{2a_{13}\mathrm{am}\tau}{a_{22}}}. \end{aligned} \tag{32}$$

На основании свойств эллиптических функций из соотношения (31) можно сделать заключение, что скорость вращения вокруг вектора $\boldsymbol{\gamma}$ носит периодический характер, а скорость вращения вокруг вектора $\mathbf{e}$ при $\tau \to \infty$ ($t \to \infty$) стремится к нулю. Скорость вращения относительно вектора $\boldsymbol{\nu}$ остается постоянной.

Случай $\mu_0 = 0$**.** Рассмотрим вариант, когда величина μ_0 принимает нулевое значение. При этом из формул (10), (23) следует, что $B_{33} = 0$, $C_{13} = 0$, $C_{33} = C_{22}$. Тогда из равенств (7), (8), (11) получим, что $B = 0$, $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ и $k = 0$. Уравнения (1), (2) принимают вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times a\mathbf{x} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}. \tag{33}$$

Таким образом, мы приходим к задаче о движении твердого тела в центральном ньютоновском поле сил. При этом интеграл (4) уравнений (33) принимает вид

$$\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0. \tag{34}$$

Решение (12), (13) для уравнений (33) в этом случае упрощается:

$$\begin{aligned} &x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\sin\varphi}{a_{22}}\sqrt{a_{22}(\beta_2\cos^2\theta + \beta_1\cos\theta + \beta_0)}\,, \\ &x_3 = -\frac{\cos\varphi}{a_{22}}\sqrt{a_{22}(\beta_2\cos^2\theta + \beta_1\cos\theta + \beta_0)}\,, \\ &\nu_1 = \cos\theta, \quad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi\,, \quad \nu_3 = \sin\theta\sin\varphi, \end{aligned} \tag{35}$$

где $\beta_2 = C_{33} - C_{11},\ \beta_1 = 2s_1, \beta_0 = 2E - C_{33}$.

Отметим, что вид формул (18), (19) не изменяется. Не изменяются, очевидно, и уравнения (21). Классический случай Гесса из (35) получим, положив $\beta_2 = 0,\ \beta_0 = 2E$. Как показано, ниже эти ограничения принципиально не влияют на характер движения гиростата.

Покажем, что в рассматриваемом случае решения (35) имеет место прецессионное движение гиростата относительно горизонтальной оси. Воспользуемся определениями и результатами работ [10, 12].

Запишем векторное равенство (25) с учетом соотношения $\mu_0 = 0$

$$\boldsymbol{\omega} = D(\theta)\Big(\boldsymbol{\gamma} - \frac{a_{13}}{a_{22}}\cos\varphi\,\mathbf{e}\Big). \tag{36}$$

Поскольку вектор $\boldsymbol{\gamma}$ определен соотношением (24), где φ находится по формуле (18), а вектор $\boldsymbol{\omega}$ имеет вид (36), то вектор $\boldsymbol{\gamma}$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{37}$$

Это значит, что вектор $\boldsymbol{\gamma}$ неподвижен в пространстве, вследствие (24) этот вектор горизонтален в пространстве (ортогонален вектору вертикали $\boldsymbol{\nu}$) и в течение всего времени движения вектор $\mathbf{e}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{\gamma}$. Таким образом, при движении гиростата вектор $\mathbf{e}$, неизменно связанный с гиростатом, находится в плоскости, ортогональной горизонтальному вектору $\boldsymbol{\gamma}$. Такое движение называют прецессионным [10]. Причем в данном случае выполняются условия

$$\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0, \qquad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \qquad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{38}$$

Это прецессионное движение введено А. Брессаном [3] и установлено в решении В. Гесса [4].

Пусть выполняются условия (28) и $C_{22} = C_{11}$. Запишем соотношение (31) в координатной форме при $\mu_0 = 0$

$$\omega_1 = -\frac{a_{13} x_0 \mathrm{dn}\tau}{a_{22} \mathrm{ch} \dfrac{2a_{13} \mathrm{am}\tau}{a_{22}}}, \quad \omega_2 = -x_0 \mathrm{dn}\tau \mathrm{th} \frac{2a_{13} \mathrm{am}\tau}{a_{22}}, \quad \omega_3 = \frac{x_0 \mathrm{dn}\tau}{\mathrm{ch} \dfrac{2a_{13} \mathrm{am}\tau}{a_{22}}}. \tag{39}$$

Если $\tau \to \infty$ ($t \to \infty$), то из формул (32) следует, что $\omega_1 \to 0$, $\omega_2 \approx \approx -x_0 \mathrm{dn}\tau$, $\omega_3 \to 0$.

Кинематическое истолкование движения гироскопа Гесса методом годографов дано А.М. Ковалевым [13]. В статье [13] показано, что только при одном условии $k = 0$ движение гироскопа Гесса можно представить достаточно просто, а именно, как прецессионное движение гироскопа относительно горизонтальной оси, при котором вектор центра масс находится в вертикальной плоскости. Аналогичное движение происходит и у гироскопа Гесса в задаче о движении тела в центральном ньютоновском поле сил, описываемой уравнениями (33). В обоих случаях для описания движения в переменных ν_i могут быть использованы уравнения (21).

Динамическая невозможность прецессионного движения в решении (12)–(15). Поскольку при $\mu_0 = 0$ показано, что движение гиростата является прецессионным относительно горизонтальной оси, поэтому представляет интерес изучение условий существования аналогичных свойств и при $\mu_0 \neq 0$. При этом естественно предполагать возможность сохранения свойства постоянства угла между барицентрической осью гиростата и некоторой неподвижной осью в пространстве (не обязательно горизонтальной). Как показано в данной статье исследование удобно вести с помощью уравнения Д. Гриоли [12]. Компоненты вектора угловой скорости $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ для данного решения имеют вид (22). Уравнение Д. Гриоли запишем в виде [12]

$$\omega_2 \dot{\omega}_3 - \omega_3 \dot{\omega}_2 + \omega_1 (\omega_2^2 + \omega_3^2) - \mathrm{ctg}\varepsilon_0 (\omega_2^2 + \omega_3^2)^{3/2} = 0, \tag{40}$$

где $\varepsilon \neq 0$ – постоянная, которая может в случае выполнения (40) характеризовать угол между барицентрической осью гиростата и неподвижной осью в пространстве.

При дифференцировании соотношений (22) учтем (14), (15). Уравнение (40) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\mu_0 a_{22}\Big[\frac{1}{2}\beta_1\cos^2\theta+(\beta_2+\beta_0)\cos\theta+\frac{1}{2}\beta_1\Big]+\\ +\Big[\mu_0\cos\theta-\sqrt{(a_{22}\beta_2-\mu_0^2)\cos^2\theta+a_{22}\beta_1\cos\theta+a_{22}\beta_2+\mu_0^2}\ \mathrm{ctg}\varepsilon_0\Big]\times\\ \times\Big[\big(a_{22}\beta_2-\mu_0^2\big)\cos^2\theta+a_{22}\beta_1\cos\theta+a_{22}\beta_2+\mu_0^2\Big]=0.\end{gathered}\tag{41}$$

Случай $\mathrm{ctg}\varepsilon_0 = 0$ динамически невозможен. Для случая $\mathrm{ctg}\varepsilon_0 \neq 0$ уравнение (41) представим в виде

$$2\mu_0 a_{22}\cos z(d_0\cos^2 z+2d_2\cos z+d_1)+\mu_0\frac{D_1}{4b_2}\sin^2 z\Big(\sqrt{\frac{D_1}{4b_2}}-\frac{b_1}{b_2}\cos z\Big)-$$

$$-\Big(\sqrt{\frac{D_1}{4b_2}}\Big)^3\mathrm{ctg}\varepsilon_0\sin^3 z=0,\tag{42}$$

где $D_1 = b_1^2 - b_0 b_2,\quad b_2 = a_{22}\beta_2 - \mu_0^2,\quad b_1 = a_{22}\beta_1/2,\quad b_0 = a_{22}\beta_0 + \mu_0^2,$

$$z=\arccos\frac{\sqrt{D_1}}{2(b_2\cos\theta+b_1)},\quad d_2=\frac{2b_2(\beta_0+\beta_2)-b_1\beta_1}{2b_2^2}\sqrt{D_1},\quad d_1=\frac{\beta_1 D_1}{4b_2^2},$$

$$d_0=\frac{(b_1^2+b_2^2)\beta_1-2b_1b_2(\beta_0+\beta_2)}{b_2^2}.$$

Применив формулы перехода к косинусу и синусу утроенного аргумента, получим коэффициент при $\sin 3z$: $\dfrac{1}{4}\Big(\sqrt{\dfrac{D_1}{4b_2^2}}\Big)^3\mathrm{ctg}\varepsilon_0$. Он обращается в нуль для рассматриваемого случая $\mathrm{ctg}\varepsilon_0 \neq 0$ только при $D_1 = 0$ или при выполнении равенства

$$a_{22}^2\beta_1^2=4(a_{22}\beta_2-\mu_0^2)(a_{22}\beta_0+\mu_0^2).\tag{43}$$

Если отказаться от условия (42), то уравнение (41) не может быть тождеством по θ на исследуемом решении (22), т.е. условие (43) является необходимым условием выполнения соотношения (41) для любых значений угла θ. Условие (43) позволяет записать подкоренное выражение в (41) в виде полного квадрата $\left(\sqrt{a_{22}\beta_2-\mu_0^2}\cos\theta+\sqrt{a_{22}\beta_0+\mu_0^2}\right)^2$. Таким образом, уравнение (41) может быть представлено в виде

$$\begin{gathered}\mu_0(1-\cos^2\theta)\big(a_{22}\beta_2\cos\theta+\sqrt{(a_{22}\beta_2-\mu_0^2)(a_{22}\beta_0+\mu_0^2)}\big)+\\ +2\mu_0\cos\theta\big(a_{22}\beta_2\cos^2\theta+2\sqrt{(a_{22}\beta_2-\mu_0^2)(a_{22}\beta_0+\mu_0^2)}\cos\theta+a_{22}\beta_2\big)+\\ +\mu_0^3(1-\cos^2\theta)\cos\theta-\mathrm{ctg}\varepsilon_0\big(\sqrt{a_{22}\beta_2-\mu_0^2}\cos\theta+\sqrt{a_{22}\beta_0+\mu_0^2}\big)^3=0.\end{gathered}\tag{44}$$

Потребуем, чтобы равенство (44) было тождеством по θ. Тогда получим следующие условия

$$\begin{aligned}
&a_{22}\beta_2\mu_0 - \mu_0^2 - \mathrm{ctg}\varepsilon_0 \cdot \sqrt{(a_{22}\beta_2 - \mu_0^2)^3} = 0,\\
&\sqrt{a_{22}\beta_2 + \mu_0^2}\big[\mu_0\sqrt{a_{22}\beta_2 - \mu_0^2} - \mathrm{ctg}\varepsilon_0 \cdot (a_{22}\beta_2 + \mu_0^2)\big] = 0,\\
&\sqrt{a_{22}\beta_2 - \mu_0^2}\big[\mu_0 - \mathrm{ctg}\varepsilon_0 \cdot \sqrt{a_{22}\beta_2 - \mu_0^2}\big) = 0,\\
&a_{22}\beta_2\mu_0 + 2a_{22}\beta_0\mu_0 + \mu_0^3 - 3\mathrm{ctg}\varepsilon_0 \cdot (a_{22}\beta_2 + \mu_0^2)\sqrt{a_{22}\beta_2 - \mu_0^2} = 0.
\end{aligned} \tag{45}$$

Система (45) имеет единственное решение $\mu_0 = 0,\ \varepsilon_0 = \dfrac{\pi}{2}$, что приводит к ранее рассмотренному случаю.

Таким образом, в решении (12)–(15) в случае $\mu_0 \neq 0$ прецессионные движения являются динамически невозможными.

1. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 3–17.
2. *Узбек Е.К* Новое решение уравнений Кирхгофа задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Докл. НАН Украины. – 2003. – № 9. – С. 45–50.
3. *Bressan A.* Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. – 1957. – **27**. – P. 276–283.
4. *Hess W.* Uber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und uber eine neue partikulare Losung des Problems der Bewegung eines starren schweren Korpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1890. – B. 37, H. 2. – P. 153–181.
5. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
6. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. – К.: Наук. думка, 1978. – 296 с.
7. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости (статья первая) // Собр. соч. - М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – Т. 1. – С. 136–193.
8. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости (статья вторая) // Собр. соч. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – Т. 1. – С. 194–311.
9. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Ж. прикл. механики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17–29.
10. *Горр Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // Прикл. математика и механика. – 2003. – Т. 67, вып. 4. – С. 573–587.
11. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – **5**, № 5. – P. 747–754.
12. *Гриоли Дж.* К общей теории асимметричных гироскопов / Проблемы гироскопии. – М.: Мир, 1967. – С. 34–39.
13. *Ковалев А.М.* О движении тела в случае Гесса // Механика твердого тела. – 1969. – Вып. 1. – С. 12–27.

Национальный ун-т экономики и торговли
им. М. Туган-Барановского, Донецк, Украина

Получено 07.11.08