ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2008. Вып. 38

УДК 531.38

©2008. **О.С. Волкова**

РАВНОМЕРНЫЕ ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ НАКЛОННОЙ ОСИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, НЕСУЩЕГО МАХОВИК

Рассматривается вращение твердого тела с неподвижной точкой в поле силы тяжести. К телу прикреплен маховик, по оси вращения которого направлен управляющий момент. В работе получено полное описание допустимых равномерных вращений тела-носителя вокруг неподвижной наклонной оси. Отдельно выделены случаи, когда система "тело-маховик" представляет собой гиростат, а в случае переменного (периодического) гиростатического момента показано, что оси равномерных вращений принадлежат конусу Штауде.

Введение. Уравнения движения вокруг неподвижной точки твердого тела с маховиком впервые были получены В. Вольтерра [1]. Детальное их обсуждение можно найти в монографиях А.И. Лурье [2, § 9.7], К. Магнуса, Й. Виттенбурга и других. В случае, когда тело движется в поле силы тяжести, уравнения имеют вид

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \times \boldsymbol{\omega} + \Gamma\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu} - u\boldsymbol{\alpha}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\lambda} = u, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – тензор инерции системы в главных осях; $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела-носителя в подвижном базисе; $\boldsymbol{\nu}$ – орт вертикали; $\boldsymbol{e}$ – единичный вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс системы; $\boldsymbol{\alpha}$ – орт оси вращения маховика; Γ – произведение веса системы на расстояние от центра масс до неподвижной точки; λ – модуль кинетического момента маховика, u – управление. Уравнения (1) допускают первые интегралы

$$G = (J\boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathrm{const}, \qquad |\boldsymbol{\nu}|^2 = 1. \tag{2}$$

Цель работы – определить все равномерные вращения, удовлетворяющие системе (1). Для твердого тела с неподвижной точкой условия существования и устойчивости равномерных вращений изучались О. Штауде [3] и Б.К. Млодзеевским. В задаче Н.Е. Жуковского [4] о движении гиростата по инерции анализ равномерных вращений и исследование их устойчивости провел В. Вольтерра [1]. П.В. Харламов [5] указал множество осей равномерных вращений тяжелого гиростата. Эти исследования были продолжены А.М. Ковалевым [6, 7], А. Анчевым и другими. Отказавшись от условия постоянства гиростатического момента, можно получить более общий класс допустимых вращений. В работах [8] и [9] исследовались условия существования равномерных вращений вокруг наклонной (невертикальной) оси для твердого тела с маховиками.

В этой работе дано полное описание допустимых равномерных вращений тела-носителя вокруг наклонной оси, указана явная зависимость от времени кинетического момента маховика.

1. Равномерные вращения. При заданной постоянной угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $|\boldsymbol{\omega}| = \omega \neq 0$, функции $\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$, $\nu_3(t)$ находятся из уравнения $\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}$. В случае, когда никакие две компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ одновременно не равны нулю, $\nu_i(t)$ выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= c_1\,\omega_1 + \Big(c_3\,\omega_2 - \frac{c_2\,\omega_1\,\omega_3}{\omega}\Big)\cos\omega t - \Big(c_2\,\omega_2 + \frac{c_3\,\omega_3\,\omega_1}{\omega}\Big)\sin\omega t,\\
\nu_2 &= c_1\,\omega_2 - \Big(c_3\,\omega_1 + \frac{c_2\,\omega_2\,\omega_3}{\omega}\Big)\cos\omega t + \Big(c_2\omega_1 - \frac{c_3\,\omega_3\,\omega_2}{\omega}\Big)\sin\omega t, \qquad (3)\\
\nu_3 &= c_1\,\omega_3 + \frac{\big(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2\big)\,[\,c_2\,\cos\omega t + c_3\,\sin\omega t\,]}{\omega},
\end{aligned}$$

где постоянные c_1, c_2, c_3 удовлетворяют условию единичности вектора $\boldsymbol{\nu}$

$$c_1^2\omega^2 + (c_2^2 + c_3^2)(\omega_1^2 + \omega_2^2) = 1.$$

Если, например, $\omega_1{=}\omega_2{=}0$, то функции $\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$, $\nu_3(t)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= \ c_2\,\cos\omega t + c_3\,\sin\omega t,\\
\nu_2 &= (c_3\,\cos\omega t - c_2\,\sin\omega t)\ \mathrm{sign}\ \omega_3, \qquad (4)\\
\nu_3 &= c_1\omega_3, \qquad c_1^2\omega^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1.
\end{aligned}$$

Итак, тело-носитель вращается вокруг неподвижной оси, сонаправленой вектору $\boldsymbol{\omega}$, а компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ в подвижном базисе выражаются формулами (3) или (4). Поскольку $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} \equiv c_1\omega^2$, угол θ между осью вращения и вертикалью определяется равенством $\cos\theta = c_1\omega$, где $\theta \in (0,\pi)$. Очевидно, что при $c_2 = c_3 = 0$ ось вращения вертикальна, а при $c_1 = 0$ – горизонтальна.

Пример 1. Рассмотрим гиростат, движущийся по инерции ($\Gamma = 0$, т.е. тело закреплено в центре масс). Предполагая, что система (1) допускает равномерное вращение, получим уравнение

$$(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega})\lambda + \boldsymbol{J\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 0. \qquad (5)$$

Условие $\boldsymbol{\alpha} \perp (J\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega})$ эквивалентно условию разрешимости векторного уравнения (5) относительно λ. Следовательно, геометрическим местом осей равномерных вращений будет конус 2-го порядка $(J\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{\alpha} = 0$. Очевидно, что вращения вокруг главных осей допустимы независимо от направления оси маховика.

Пример 2. Рассмотрим гиростат в поле силы тяжести. Ось вращения в этом случае может быть только вертикальной ($\boldsymbol{\nu} \parallel \boldsymbol{\omega}$). Для модуля гиростатического момента получаем векторное уравнение

$$(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega})\lambda + (\boldsymbol{J\omega} + \frac{\Gamma}{\omega}\,\boldsymbol{e}) \times \boldsymbol{\omega} = 0. \qquad (6)$$

В отличие от предыдущего примера, здесь оси равномерных вращений принадлежат более сложной поверхности, которая определяется соотношением

$$[(\boldsymbol{J\omega} + \frac{\Gamma}{\omega}\,\boldsymbol{e}) \times \boldsymbol{\omega}] \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0. \tag{7}$$

Пример 3. Рассмотрим вырожденный случай $|\boldsymbol{\omega}| = 0$. Предположим, что система (1) имеет положение равновесия $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\boldsymbol{\nu} = \mathrm{const}$. Из первого уравнения этой системы выразим производную гиростатического момента

$$\dot{\lambda}\boldsymbol{\alpha} = \Gamma(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}). \tag{8}$$

Очевидно, она постоянна. Уравнение (8) разрешимо относительно $\dot{\lambda}$ только при условии

$$(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\alpha} = 0. \tag{9}$$

Из (9) следует либо $\boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{\nu}$, либо $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\nu}$. Таким образом, если ось, содержащая центр масс и неподвижную точку, вертикальна, то $\lambda\boldsymbol{\alpha}$ – произвольный постоянный вектор; если же $\boldsymbol{e} \nparallel \boldsymbol{\nu}$, то ось вращения маховика должна лежать в горизонтальной плоскости и быть направленной ортогонально вектору $\boldsymbol{e}$. В этом случае $\lambda = \Gamma((\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\alpha})\,t + \mathrm{const}$, т.е. модуль гиростатического момента – линейная функция времени.

2. Переменный гиростатический момент. Выясним, какие новые классы равномерных вращений будет допускать система (1), если кинетический момент маховика $\lambda\boldsymbol{\alpha}$ зависит от времени. При выполнении соотношений $\Gamma = 0$ либо $\boldsymbol{\nu} \parallel \boldsymbol{\omega}$ равномерные вращения допустимы только тогда, когда гиростатический момент системы "тело-маховик" постоянен. Поэтому везде далее предполагаем, что $\Gamma > 0$, $\boldsymbol{e} \neq 0$ и $\boldsymbol{\nu} \nparallel \boldsymbol{\omega}$. Исследуем на совместность систему дифференциальных уравнений переменной λ:

$$\dot{\lambda}\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{J\omega} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \times \boldsymbol{\omega} + \Gamma\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}. \tag{10}$$

Теорема. *Заданное равномерное вращение* $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$ *твердого тела с маховиком вокруг неподвижной наклонной оси допустимо только тогда, когда одновременно выполняются условия* $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{e}$ *и* $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\omega}$. *При этом* $\boldsymbol{\nu}$ *определяется формулами* (3) *или* (4), *а оси равномерных вращений принадлежат конусу Штауде.*

Доказательство. Умножая (10) скалярно на $\boldsymbol{\alpha}$, находим выражение для $\dot{\lambda}$

$$\dot{\lambda} = (J\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\alpha} + \Gamma(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\alpha}. \tag{11}$$

Отсюда с учетом (3), (4) заключаем, что $\lambda(t)$ есть сумма периодической и линейной по времени функций. Теперь домножим (10) на вектор $\boldsymbol{e}$:

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{e})\ \dot{\lambda} = \lambda\ (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{e} + (J\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{e}. \tag{12}$$

В соответствии с (11), $\lambda(t)$ не содержит слагаемых вида $c_0 e^{\gamma t}$, где $\gamma \neq 0$. Поэтому (12) является тождеством, т.е. справедливы равенства

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{e} = 0, \quad (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{e} = 0, \quad (J\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{e} = 0. \tag{13}$$

Последнее из них определяет в подвижном базисе поверхность 2-го порядка, известную как конус Штауде [3].

Компланарность векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{\omega}$ и $J\boldsymbol{\omega}$ влечет выполнение по крайней мере одного из условий $(J\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0$ или $\boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{e}$. Предположим, что $\boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{e}$. Тогда из (13) следует $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\omega}$, т.е. векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}$ ненулевые. Домножив (10) на произвольный вектор $\boldsymbol{r}$, не ортогональный $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}$, получим скалярное уравнение

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{r})\ \dot{\lambda} = \lambda\ (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{r} + (\Gamma \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu} + J\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{r}, \tag{14}$$

решение которого содержит экспоненту в ненулевой степени. Полученное противоречие доказывает, что $\boldsymbol{\omega} \nparallel \boldsymbol{e}$. Следовательно, выполняются условия

$$(J\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0, \qquad \dot{\lambda} = \Gamma(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\alpha}. \tag{15}$$

Предположим, что $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega} \neq 0$. Векторное уравнение (10) домножим на $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}$ и продифференцируем:

$$|\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}|^2\, \dot{\lambda} = \Gamma(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{e})\,(\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega})). \tag{16}$$

Из (15) и (16) с учетом равенства $(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\omega})$ получаем

$$|\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}|^2 (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{\nu} + [(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\nu}]\,[(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega})] = 0. \tag{17}$$

Скалярное произведение нулевого вектора $(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}) \times [(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}) \times (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\omega})]$ на $\boldsymbol{\nu}$ преобразуем к виду

$$|\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}|^2 (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{\nu} - [(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\nu}]\,[(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega})] = 0. \tag{18}$$

Из (17) и (18) следует, что одновременно выполняются равенства

$$|\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}|\,(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{и} \quad (\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\omega})\,(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\omega})\,[\boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\alpha})] = 0.$$

Как уже было показано, $\boldsymbol{\omega} \nparallel \boldsymbol{e}$. Переменный по предположению вектор $\boldsymbol{\nu}$ составляет с $\boldsymbol{\omega}$ постоянный угол. Следовательно, условие компланарности $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ тождественно выполняться не может. Значит, $(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}) = 0$. Из первого равенства (13) с учетом $\boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{\alpha}$ получаем $\boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{\omega}$. $\square$

Замечание 1. В работе [9] приведены необходимые и достаточные условия существования равномерных вращений вокруг наклонной оси в случаях $a)$ $\boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{\alpha}$ и $b)$ $\boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{e}$. Для случая $c)$, когда $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ компланарны, но среди них нет коллинеарных, приведены только необходимые условия. Так как в случаях $a)$ и $c)$ условие доказанной выше теоремы не выполняется, то вектор $\lambda\boldsymbol{\alpha}$ будет постоянным. Следовательно, равномерные вращения возможны только вокруг вертикали [5].

Замечание 2. Из (15) и формул (3), (4) следует, что $\dot{\lambda}(t)$ есть линейная комбинация $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$. Значит, $\lambda(t)$ – *периодическая функция времени.* Ясно, что если равномерное вращение допустимо для тела с одним маховиком, направленным вдоль $\boldsymbol{\omega}$, то оно будет допустимым и для тела с тремя маховиками, направленными по главным осям. Но в этом случае аналогичная (10) система уравнений имеет неограниченные решения, т.е. появляются новые классы “теоретически допустимых” вращений с неограниченным гиростатическим моментом [10].

Итак, если система (10) совместна, то λ определяется интегрированием равенства $\dot\lambda = \Gamma(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{\alpha}$ с точностью до постоянной. Так как $\boldsymbol{\alpha} = \pm\dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$, то

$$\dot\lambda = \pm\frac{\Gamma}{\omega}\,(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{e} = \pm\frac{\Gamma}{\omega}\;\dot{\boldsymbol{\nu}}\cdot\boldsymbol{e},$$

$$\lambda = \pm\frac{\Gamma}{\omega}\;\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{e} + \lambda_0, \quad \lambda_0 = \mathrm{const}. \tag{19}$$

Пусть компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ имеют вид (3). Тогда скалярное произведение

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{e} = [c_2\omega e_3 - c_3(\omega_1 e_2 - \omega_2 e_1)]\cos\omega t + [c_2(\omega_1 e_2 - \omega_2 e_1) + c_3\omega e_3]\sin\omega t.$$

Вводим вспомогательный аргумент φ, $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sin\theta}[c_2\omega e_3 - c_3(\omega_1 e_2 - \omega_2 e_1)]$:

$$\lambda(t) = \pm\frac{\Gamma\sin\theta}{\omega}\,\sin(\omega t + \varphi) + \lambda_0. \tag{20}$$

Пусть теперь $\boldsymbol{\nu}(t)$ определяется формулами (4). Аналогично предыдущему, находим

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{e} = [c_2 e_1 + c_3 e_2\ \mathrm{sign}\ \omega_3]\cos\omega t + [c_3 e_1 - c_2 e_2\ \mathrm{sign}\ \omega_3]\sin\omega t;$$

$\lambda(t)$ снова имеет вид (20), только теперь $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sin\theta}\,[c_2 e_1 + c_3 e_2\ \mathrm{sign}\ \omega_3]$.

3. Описание допустимых вращений. С учетом условий $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{e}$ система (10) сводится к уравнению, не содержащему λ в правой части:

$$\dot\lambda\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{J\omega}\times\boldsymbol{\omega} + \Gamma\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\nu}. \tag{21}$$

Система скалярных составляющих векторного дифференциального уравнения (21), определяющих одну неизвестную λ, должна быть совместной. Если среди компонент вектора $\boldsymbol{\alpha}$ есть нули, то соответствующие уравнения должны обращаться в тождества. Так, система (21) может содержать:

1) *уравнение и два тождества* ($\boldsymbol{\alpha}$ направлен по i-й главной оси, $i = \overline{1,3}$);
2) *два уравнения и тождество* (только одна из компонент $\boldsymbol{\alpha}$ нулевая);
3) *три пропорциональных уравнения* (все компоненты $\boldsymbol{\alpha}$ не равны нулю).

Для каждого случая выпишем условия, обеспечивающие разрешимость (21).

1) Предположим, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \pm1$. Поскольку $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\omega}$, допустимы только вращения вокруг третьей главной оси, т.е. $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3)$, а компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ определяются соотношениями (4). Тождества $e_2\nu_3 - e_3\nu_2 = 0$ и $e_3\nu_1 - e_1\nu_3 = 0$ выполняются только при

$$e_3 = 0,\ c_1 = 0\,. \tag{22}$$

Таким образом, в формуле (4) постоянная c_1 всегда равна 0, т.е. ось вращения горизонтальна. Этот класс вращений был получен и частично исследован на устойчивость В.Е. Пузыревым и А.Е. Поздняковичем.

2) Предположим, что $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_3 = 0$. Здесь вращения вокруг главных осей допустимыми не являются, так как $\omega_1\omega_2 \neq 0$, $\omega_3 = 0$. Компоненты $\boldsymbol{\nu}$ при этом задаются формулами (3). Из пропорциональности первых двух уравнений (21) и равенства

$$(J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 + \Gamma(e_1\nu_2 - e_2\nu_1) \equiv 0$$

получаем, что система разрешима, если параметры удовлетворяют условиям

$$\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{e}, \qquad e_3 = 0, \quad c_1 = \frac{(J_2 - J_1)\omega_1\omega_2^2}{\Gamma e_1 \omega^2}. \tag{23}$$

Отметим, что при $c_1 = 0$, $J_1 = J_2$ система (10) разрешима и без дополнительного требования $e_3 = 0$, но в этом случае первая и вторая главные оси не определены однозначно. Если в качестве одной из них принять направление вектора $\boldsymbol{\omega}$, то получим решение вида (22).

3) Пусть $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq 0$, тогда аналогичное неравенство верно и для компонент $\boldsymbol{\omega}$, а компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ определяются формулами (3). Предположим, что $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e})_1 \neq 0$. Тогда из $J_2 = J_3$ следует $J_1 = J_2 = J_3$. Выбором главных осей этот случай сводится к предыдущим, поэтому в дальнейшем полагаем $J_2 \neq J_3$. Пропорциональность всех трех уравнений (21) эквивалентна следующим условиям на параметры:

$$\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{e}, \qquad c_1 = \frac{(J_2 - J_3)\omega_2\omega_3}{\Gamma(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e})_1}; \quad \frac{(J_3 - J_1)}{(J_2 - J_3)} = \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e})_2\ \omega_2}{(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e})_1\ \omega_1}. \tag{24}$$

Условия разрешимости (23) и (24) содержат моменты инерции J_1, J_2, J_3, значения которых должны удовлетворять неравенствам треугольника. Покажем, что существуют такие наборы параметров, при которых система (1) допускает равномерные вращения вокруг наклонной оси.

Условия (23) приводят к следующей системе неравенств:

$$\frac{\Gamma \mid \cos\theta \mid}{\mid \omega_1\omega_2 \mid}\operatorname{sign}(e_1\omega_1\cos\theta) > J_3 - 2J_1, \qquad \frac{\Gamma \mid \cos\theta \mid}{\mid \omega_1\omega_2 \mid} < J_3. \tag{25}$$

Если $J_2 > J_1$, то при условии $\operatorname{sign}(\cos\theta) = \operatorname{sign}(e_1\omega_1)$ неравенства (25) разрешимы относительно θ, ω_1, ω_2.

Из условий (24) выразим моменты инерции J_2 и J_3:

$$J_2 = J_3 + \frac{\Gamma c_1(\omega_2 e_3 - \omega_3 e_2)}{\omega_2\omega_3}, \quad J_3 = J_1 + \frac{\Gamma c_1(\omega_3 e_1 - \omega_1 e_3)}{\omega_1\omega_3}. \tag{26}$$

Записав неравенства треугольника для (26), получим систему

$$\Gamma\frac{\cos\theta}{\omega}\left(\frac{e_1}{\omega_1} - 2\frac{e_3}{\omega_3} + \frac{e_2}{\omega_2}\right) < J_3, \qquad \Gamma\frac{\mid\cos\theta\mid}{\omega}\left|\frac{e_1}{\omega_1} - \frac{e_2}{\omega_2}\right| < J_3. \tag{27}$$

Выполнение первого неравенства можно обеспечить за счет выбора знака $\cos\theta$. Фиксируя ω, ω_1, ω_2 и устремляя $\theta \to \dfrac{\pi}{2} \pm 0$, второе неравенство в (27) также можно сделать верным. При этом $J_1, J_2 \to J_3$, т.е. остаются положительными. Следовательно, и в этом случае допустимые вращения существуют.

Замечание 3. При выполнении условий (23) компоненты вектора вертикали можно записать с помощью *корабельных углов* [2, с. 51]:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= -\cos\chi \sin\vartheta + \sin\chi \cos\vartheta \sin(\omega t + \varphi) \\ \nu_2 &= \quad \sin\chi \sin\vartheta + \cos\chi \cos\vartheta \sin(\omega t + \varphi) \\ \nu_3 &= \quad \cos\vartheta \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

где ϑ – угол между осью равномерного вращения $\boldsymbol{\omega}$ и горизонтальной плоскостью, $\sin\vartheta = \dfrac{(J_1 - J_2)\omega_1\omega_2^2}{\Gamma e_1 \omega}$, $\vartheta \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$; χ – угол между $\boldsymbol{\omega}$ и первой главной осью, $\cos\chi = \dfrac{\omega_1}{\omega}$, $\sin\chi = -\dfrac{\omega_2}{\omega}$; $\sin(\omega t + \varphi) = \dfrac{\cos(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{e}})}{\cos\vartheta}$ – отношение проекций вектора $\boldsymbol{e}$ на вертикаль и единичного вектора оси вращения на горизонтальную плоскость. Следовательно, когда тело-носитель равномерно вращается вокруг наклонной оси, два из трех корабельных углов остаются постоянными.

1. *Volterra V.* Sur la théorie des variations des latitudes // Acta math.– 1899. – **22**.– P. 201-358.
2. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
3. *Staude O.* Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // J. reine und angew. Math. – 1894. – **113**, H.4. – S. 318-334.
4. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч.– М.; Л.: ОГИЗ, 1949. – Т. 2. – С. 152-309.
5. *Харламов П.В.* О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 2. – С. 373-375.
6. *Ковалев А.М.* О стационарных решениях дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Мат. физика. – 1968. – Вып. 5. – С. 87-102.
7. *Ковалев А.М., Киселев А.М.* О конусе осей равномерного вращения гиростата // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 36-45.
8. *Kovaleva L.M.* Investigation of permanent rotations of the rigid body with fixed point, carrying one– and two–degree gyros // XXII Yugoslav congress of theoretical and applied mechanics. – Vrnjacka Banja, 1997. – P. 61-64.
9. *Ковалева Л.М., Позднякович А.Е.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100-105.
10. *Волкова О.С.* О стабилизации равномерных вращений вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховики // Тр. ИПММ НАНУ. – 2007. – **14**. – С. 41-51.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк Получено 04.03.08