

УДК 532

©2007. Г.Т. Алдошин

К ИСТОРИИ ГИДРОУПРУГОСТИ ОТ ЭЙЛЕРА ДО НАШИХ ДНЕЙ

Рассматривается история развития гидроупругости, одного из разделов механики. Ее зарождение связано с именами И. Ньютона, указавшего на взаимосвязь деформации упругой стенки сосуда и движения содержащейся в нем жидкости, и Л. Эйлера, предложившего первую математическую постановку задачи гидроупругости. Важнейшими этапами дальнейшего развития явились установленные Д. Кортвегом формулы для скорости звука в упругой трубе и разработанная Н.Е. Жуковским теория гидравлического удара.

К истории гидроупругости. Научное наследие Л. Эйлера, насчитывающее более 900 сочинений, поражает воображение современного читателя не только своим объемом, но и необычайной широтой научных интересов и богатством содержащихся в нем идей. Особенно велик вклад Л. Эйлера в становление и развитие механики и ее основных разделов: общей механики, механики твердого тела, баллистики, гидро-аэромеханики, теории упругости и других. Особняком среди его сочинений стоит работа: “Principia pro motu sanguines per arterias determinado” (Основы движения крови по артериям) [1], в которой была представлена задача о движении жидкости в упругой трубе. Надо заметить, что задачи о течении жидкости в каналах и о взаимодействии жидкости и погруженного в нее тела возникли еще в древности. Достаточно упомянуть Архимеда (287–212 г.г. до н. э.) и его знаменитый закон. Впервые на необходимость учета деформации поверхности тела под действием давления жидкости обратил внимание И. Ньютон [2].

В пятом отделе своих знаменитых “Начал” Ньютон замечает: “..если эта жидкость заключена в сосуд не твердый и не везде испытывает одно и то же давление, то она, по определению текучести, уступает более сильному давлению” и далее (следствие из случая 7): “...движение частей жидкости друг относительно друга не может быть изменено приложением давления к внешней ее поверхности, если только сама эта поверхность где-либо не изменится”. Отсюда следует, что при движении жидкости в упругой трубе деформация стенок трубы, вызванная давлением жидкости, оказывает, в свою очередь, воздействие на параметры течения так, что обе задачи: расчет течения жидкости и расчет напряженно-деформированного состояния стенок трубы должны решаться совместно. Постановка и решение проблем механики деформируемого твердого тела и механики жидкости в такой сопряженной форме составляют предмет гидроупругости.

Первой математической постановкой задачи гидроупругости явилась упомянутая выше работа Л. Эйлера, судьба которой по-своему драматична. Это сочинение было опубликовано уже посмертно в 1862 году, хотя было написано, вероятно, в 1742 г. В предисловии к тридцатому тому второй серии

сочинений Эйлера Opera omnia (1955, р.р. LXXVII–LXXVIII) известный механик Трусделл упоминает о письме Эйлера к Goldbach в 1742 г., в котором Эйлер сообщал о посылке фрагмента своей статьи “О течении жидкости в упругой трубе” в Дижон на конкурс, объявленный Французской Академией Наук по такой тематике с денежной премией в 30 луидоров. Не получив ответа из Академии, Эйлер весьма об этом сожалел не только потому, что работа не получила поддержки, но и возможно была утеряна, а копии статьи он себе не оставил. Но оказалось, что работа не только не была утеряна, но даже, наряду с двумя другими сочинениями, поделила премию [3, 4]. Правда, неизвестно, получил ли Эйлер свою часть премии. По крайней мере, в списке премий, полученных Эйлером от Французской Академии, эта премия, как и сама работа, не упоминаются [5].

Публикация 1862 г. является, по-видимому, вариантом первоначальной рукописи, но в 1859 г. при подготовке посмертных томов сочинений Эйлера издатели располагали только неполной рукописью и поэтому параграфы 1–14 в издании отсутствуют. Недостающие фрагменты рукописи удалось обнаружить в Архиве АН СССР в Ленинграде и в издании 1952 г. работа представлена в законченном виде.

Можно предположить, что интерес к исследованию проблем гемодинамики (движения крови по артериям) появился у Эйлера в результате его тесного общения с братьями Бернулли. Один из них, Даниил Бернулли, в 1725–1727 г.г. был профессором физиологии по кафедре анатомии и физиологии Петербургской АН и занимался вопросами гидростатики, механики движения жидкости по каналам [6] и др. Примерно в это время (в 1733 г.) опубликовано сочинение “Haemostaticks” английского физиолога Хейлса, в котором он привел результаты первого в истории прямого измерения кровяного давления у животных и оценки скорости течения крови в различных артериях, им было введено также понятие “силы крови” – аналог давления в движущейся жидкости. Таким образом, идея математического описания процессов, протекающих в живом организме на основе общих законов механики, витала в воздухе и привлекала внимание механиков того времени. Результаты своих исследований о волновом движении крови в артерии Эйлер доложил на заседании Петербургской Академии наук в 1775 г. Математическая постановка задачи состояла из уравнения неразрывности для течения несжимаемой жидкости в упругой трубе в одномерном (гидравлическом) приближении:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} + S \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

и уравнения движения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

которое Эйлер называет уравнением ускорения. В уравнениях (1)–(2) t – время, x – продольная координата, S – площадь поперечного сечения канала, p , v – средние на сечении давление и скорость движения жидкости, ρ – плотность жидкости. Течение крови вызывается периодическими сокращениями

сердца, которое рассматривалось как гидравлический насос. Для замыкания системы (1)–(2) необходимо было задать зависимость площади поперечного сечения от давления $S(p)$. Однако Эйлер не получает это уравнение из решения задачи о напряженно-деформированном состоянии артерии, а полагает, что изменение площади в зависимости от давления можно представить как

$$S = \frac{\sum p}{c + p},$$

или

$$S = \left(1 - c \log \frac{\Sigma}{\Sigma - S} \right), \quad (3)$$

где Σ – максимальное значение площади при неограниченном росте давления. Но свести полученную систему (1)–(3) к одному уравнению и затем найти его решение Эйлеру не удалось, и он заканчивает свою работу словами:

“... вынужден закончить работу, так как ее решение превосходит человеческие силы. Если бы Бог хотел, чтобы мы нашли течение крови по артериям, он не придумал бы такие сложные уравнения”.

Интересно заметить, что от решения Эйлера отделял всего один шаг. В 1750 г. в четвертом томе Мемуаров Берлинской Академии Наук была опубликована статья Эйлера “О колебаниях струн”. В ней содержался метод решения проблемы колебания струны, мало отличавшийся от предложенного ранее Ж. Даламбером решения в форме бегущих волн. И если бы Эйлеру удалось найти зависимость $S(p)$, то проблема легко свелась бы к волновому уравнению типа колебаний струн. Но хотя задача не получила окончательного решения, сама постановка Эйлером задачи об одномерном нестационарном течении жидкости в деформированном канале явилась важной вехой в развитии механики кровообращения. В дальнейшем Эйлером было выполнено и опубликовано большое количество работ по гидравлике и гидромеханике, но к задачам гидроупругости он больше не возвращался. Нет никаких сведений об этом и в записных книжках Эйлера [7]. После Эйлера задача гемодинамики артерий и особенно распространения пульсовой волны привлекала внимание ряда авторов.

В 1808 г. Т. Young [8], затем Е. Weber [9], а позже целый ряд других физиологов пытались определить скорость пульсовой волны в артерии и факторы, определяющие эту скорость. Young правильно объясняет физический механизм процесса, проводя аналогии между распространением импульса давления в упругой среде и в несжимаемой жидкости, заключенной в упругой трубе. Но прямая аналогия здесь не корректна, так как в отличие от неограниченной среды, которую рассматривал Ньютон, на скорость волны в жидкости в упругой трубе будет влиять податливость стенок трубы. Resal Н. [10] рассматривал по существу ту же задачу, что и Эйлер (движение несжимаемой жидкости в каучуковой трубе), и впервые определил скорость волны c , учтя упругость трубы:

$$c = \sqrt{\frac{Eh}{2R\rho}},$$

где E – модуль упругости, h – толщина стенок, R – радиус трубы. Более полное решение этой же задачи, без учета сжатия жидкости, но с учетом влияния инерции стенок трубы и трения жидкости, было проведено И. Громеко [11]. Он получил биквадратное уравнение, корни которого выражают две скорости распространения волны. Одновременный учет сжимаемости жидкости и податливости стенок трубы сделал D. Korteweg [12]. Он предложил формулу для скорости звука в упругой трубе, заполненной жидкостью:

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1 + 2\frac{KR}{Eh}}},$$

где c_0 – скорость звука в жидкости, K – модуль упругости жидкости. Таким образом, спустя более чем сто лет после опубликования Эйлером своих уравнений был сделан решительный прорыв в замыкании уравнений гидравлики и упругости. Правда, Korteweg рассматривал трубу как систему не связанных друг с другом упругих колец, пренебрегая изгибными напряжениями и силами инерции. Все эти обстоятельства учел позже Lamb Н. [13]. Он установил существование двух значений фазовой скорости для длинных волн, одна из которых близка к скорости, вычисленной по формуле Korteweg, а другая – к скорости звука в материале стенки трубы. Если не считать несколько экспериментальных исследований, ссылки на которые содержатся в работе Н.Е. Жуковского [14], то отмеченными публикациями и ограничиваются теоретические исследования о распространении волны гидродинамического давления в упругой трубе к концу XIX века. В конце XIX века в связи с многочисленными авариями на московском водопроводе Н.Е. Жуковский был привлечен к работе комиссии по выяснению и изучению причин этих явлений. Анализ аварий и результатов специально поставленных опытов позволил Жуковскому сделать вывод, что удар воды в водопроводе (это явление получило название “гидравлический удар”) происходит из-за возникновения и распространения в трубе ударной волны, скорость которой довольно велика (примерно 1000 м/с) (рис. 1).

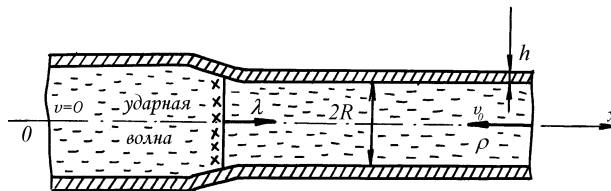


Рис. 1. Схема задачи о гидравлическом ударе (Н.Е. Жуковский).

“Я полагаю, – писал Жуковский [14] – что упомянутое обстоятельство было упущено из виду потому, что наблюдения не делались над длинными трубами; в коротких же трубах, вследствие громадной скорости распространения ударной волны, поднятие давления представляется происходящим

вдоль всей трубы мгновенно”. В основу теории Жуковский, как и Эйлер, положил уравнения движения идеальной жидкости, но деформация стенок трубы рассмотрена как деформация упругого кольца, без учета сил инерции и растягивающих сил в сечениях трубы, перпендикулярных ее оси. В результате задача была сведена к хорошо изученному к тому времени волновому уравнению, решение которого представляет собой суперпозицию двух бегущих волн

$$p(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct),$$

где $p(x, t)$ – давление жидкости в сечении x трубы в момент времени t . Произвольные функции f_1 и f_2 определяются из граничных и начальных условий задачи. Для определения максимального давления, которое создается в трубе при мгновенном перекрытии задвижки, Жуковский установил, ставшую классической, формулу

$$p - p_0 = \rho_0 v_0 c,$$

из которой следует, что повышение давления в трубе прямо пропорционально скорости, потерянной при гидравлическом ударе, и скорости распространения ударной волны. Решение волнового уравнения позволило рассчитать диаграммы давления в различных сечениях трубопровода при распространении ударной волны, установить место аварии на трубопроводе и получить полное представление о состоянии трубы. Исследование гидравлического удара принесло Н.Е. Жуковскому мировую известность. Вскоре после опубликования работа была переведена на немецкий, английский, французский языки и на многие годы предопределила развитие гидроупругости трубопроводных систем. “Как эта работа не похожа на старые классические исследования по механике. Как она близка нашему времени” – восклицает акад. С.А. Христианович [15].

За прошедшие 100 с небольшим лет со времени выхода работы Н.Е. Жуковского как в нашей стране, так и за рубежом опубликовано огромное число статей, монографий, книг по гидравлическому удару. Особую актуальность исследования волновых процессов в трубопроводных системах приобрели в связи с развитием энергетики, трубопроводного транспорта, широким использованием трубопроводных и топливных систем в авиационной и ракетной технике. Дать сколько-нибудь подробный анализ их в краткой статье не представляется возможным. Ограничимся замечанием, что достаточно подробный анализ таких исследований содержится в обзорах Гудсона [16] (по состоянию на 1970) и автора настоящей статьи [17] (по состоянию на 1990 г.). К настоящему времени можно считать, что переходные процессы, возникающие при течении жидкости в упругом трубопроводе и в оболочечных конструкциях, в постановке Н.Е. Жуковского изучены достаточно подробно. Менее изучены задачи для течения вязкой сжимаемой жидкости, а также те интересные с физической точки зрения процессы, в которых существенное значение имеют нелинейные явления. В конце 50-х годов прошлого века возникли задачи, связанные с распространением волн давления в составных оболочечных конструкциях, в частности, в системе соосных, вложенных друг в друга, труб,

зазор между которыми заполнен жидкостью, а по поверхности одной из труб распространяется волна давления. Впервые с подобной проблемой столкнулись при создании систем межслойного охлаждения стволов артиллерийских орудий [18]. Практическое применение получили системы межслойного охлаждения, в которых отвод тепла, выделяющегося при горении пороха и нагревающего ствол, производили водой, циркулирующей в зазоре между стволом и кожухом (рис. 2).

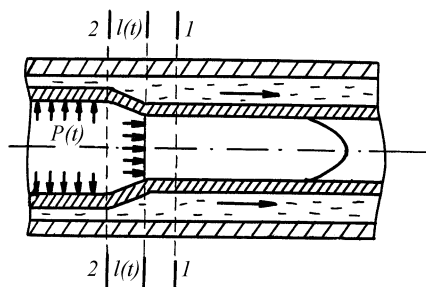


Рис. 2. Схема задачи о гидравлическом ударе в системах охлаждения (Г.Т. Алдошин).

В процессе экспериментальной обработки конструкции столкнулись с фактом возникновения пика давления в дульной части ствола, который нередко превосходил давление пороховых газов в соответствующем сечении ствола. Удовлетворительного объяснения этого явления не было, так как расчеты по классической теории Ламе–Гадолена показывали, что давление в жидкости не должно было превосходить 15–20 % давления пороховых газов.

Первая, достаточно корректная, модель явления была предложена в работе автора [19]. Физическая картина развития процессе ударно-волнового течения жидкости отличается здесь от рассмотренной Н.Е. Жуковским и представляется следующим образом. Под действием давления газа в снарядном пространстве $P(t)$ деформируются стенки ствола, приводя к уменьшению площади проходного сечения канала охлаждения, давление в жидкости повышается и в виде волны гидравлического удара распространяется вдоль канала, а сама зона деформирования $2 - l(t) - 1$ со скоростью снаряда движется к дульной части. Изменение площади происходит в малой области вблизи дна снаряда $l(t)$, и потому ее можно схематизировать скачком площади поперечного сечения, который перемещается вдоль ствола со скоростью снаряда и, подобно поршню, нагнетает жидкость, генерируя рост давления перед снарядом. В рамках основных допущений теории Н.Е. Жуковского (линеаризация уравнений для жидкости и квазистатическая деформация стенки ствола) задача была сведена к системе волновых уравнений, и ее решение для давления жидкости $p(x, t)$ и расхода $Q(x, t)$ было записано в форме Даламбера–Эйлера

$$p(x, t) = a_1 \frac{K}{E} P(t) + f_1(x - ct) + f_2(x + ct),$$

$$Q(x, t) = -\rho S_0 u(t) + \frac{S_0}{c} f_1(x - ct) - \frac{F_0}{c} f_2(x + ct),$$

в области заснарядного пространства $0 \leq x \leq l(t)$

$$p(x, t) = h_1(x - ct) + h_2(x + ct),$$

$$Q(x, t) = -\rho S_0 u(t) + \frac{S_0}{c} h_1(x - ct) - \frac{F_0}{c} h_2(x + ct),$$

здесь $u(t)$ – скорость отката. Произвольные волновые функции определяются из начальных и граничных условий на входе и выходе жидкости из системы охлаждения и условий “сшивания” решений до- и за снарядом на скачке площади сечения $l(t)$. Принципиальным моментом решения является введение скачка площади сечения и запись на скачке законов сохранения типа ударных волн [20].

Главный результат полученного решения состоит в установлении факта формирования пика давления за счет формирования волны сжатия в жидкости на фронте движущегося снаряда: интенсивность волны растет с увеличением скорости снаряда, чем и объясняется совпадение максимального давления в дульной части по времени с моментом прохода снаряда. При приближении скорости снаряда к скорости звука наступает “акустический” резонанс: давление возрастает неограниченно. Задачи, подобные рассмотренной, возникают в контурах циркуляции жидкостей реакторов водо-водяного типа [21], трубопроводах, подверженных сейсмическому воздействию [22]. Теория таких задач разработана и освещена в научной литературе явно недостаточно. Пионерская работа Л. Эйлера, которая долгое время не была известна широкому кругу механиков (можно упомянуть, что даже Н.Е. Жуковский, ссылаясь на ряд предшественников, не упоминает Л. Эйлера), в настоящее время обрела второе дыхание. Понадобилось много времени и усилий выдающихся механиков и биологов, чтобы “новый день в физиологии”, о котором мечтал Д. Бернулли, наступил. В настоящее время происходит активное развитие биомеханики и ее раздела – гемодинамики. Успехи прикладной математики и развитие вычислительной техники позволяют исследовать задачу Эйлера в усложненных постановках с учетом вязкости жидкости, двухфазного состава (суспензия эритроцитов и лейкоцитов в плазме), сложной реологии материала стенки артерий и т.п. Все это позволяет получить более полную и важную информацию, требуемую для медицинских приложений. Но эти биофизические приложения гидроупругости заслуживают отдельного обстоятельного обзора. Статья Л. Эйлера, опубликованная в 1862 г. на латинском языке, до сих пор не переведена ни на русский, ни на какой-либо западно-европейский язык. Возможно, поэтому она не получила широкой известности в свое время среди механиков и должного приложения. Но, тем не менее, корни современной гидроупругости и гемодинамики – в “Principi...” и в этом ее непреходящее значение. “Читайте Эйлера, он – наш общий учитель” – завещал Лаплас молодым математикам. На наш взгляд, мало кто из современных

молодых, да и не очень молодых, может свободно читать Эйлера в оригинале, тем более, учитывая труднодоступность этих оригиналов. Все сказанное подчеркивает необходимость перевода работы на русский язык.

1. *Euleri L. Principia pro motu sanguines per arteria determinando // Opera Postuma mathematica et physica Anno MD CCC XLIV DETECTA. – Petropoli, 1862. – P. 814–823.*
2. *Ньютон И. Математические начала натуральной философии // Собр. трудов акад. А.Н. Крылова: В 12 т. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. – Т. 7. – 696 с.*
3. *История механики в России. – Киев: Наук. думка, 1987. – 392 с.*
4. *Иванюцкий Г.Р. 275 лет Российской Академии Наук и история биофизики // Биофизика. – 1999. – 44, № 6. – С. 965–979.*
5. *Копелевич Ю.Х. Материалы к биографии Эйлера // Историко-математические исследования. – М.: Гостехиздат, 1957. – Вып. 10. – С. 9–65.*
6. *Бернулли Д. Гидродинамика или записки о силах и движении жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 552 с.*
7. *Михайлов Г.К. Записные книжки Л. Эйлера в Архиве АН СССР // Историко-математические исследования. – М.: Гостехиздат, 1957. – Вып. 10. – С. 67–94.*
8. *Young T. Hydraulic investigation subservient to an intended Gronian Lecture on the motion of the blood // Phil. Trans. Roy. Soc. of London. – 1808. – 98. – P. 164–186.*
9. *Weber E. Über die Anwendung d.wellenlehre und d. Lehre von Kreislauf d.Bluts. // Berichte der Sächsischen Gesells der Wissenschaft. – 1850. – P. 164–204.*
10. *Resal H. Note sur les petits mouvements d'un fluide in compressible dans un tuyau l'elastic // J. de Mathem. pures et appliquies. – 1876.*
11. *Громеко И.С. О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубах. – Казань, 1883.*
12. *Korteweg D. Over Voorplating-Snelheid von golven in elastische Baizen. – Leiden, 1878.*
13. *Lamb H. Über die Geschwindigkeit des Schalles unter Einfluss der Elastizität der Wände // Manchester Literary & Philosophical Soc.-Memories & Proc. – 1898. – 42, № 9.*
14. *Жуковский Н.Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 103 с.*
15. *Христианович С.А. Научное наследие Жуковского Н.Е. – М.: Изд-во бюро науч. инф. ЦАГИ, 1951.*
16. *Гудсон. Обзор методов моделирования переходных процессов в гидравлических линиях // Теоретические основы инженерных расчетов, 1972. – 94. Сер. Д, № 2.*
17. *Алдошин Г.Т. Внутренние сопряженные задачи аэрогидроупругости // Модели механики сплошной среды: Сб. докл. и лекций XIV Международ. школы по моделям механики сплошной среды (17–24 августа 1997, Жуковский, Россия). – М., 1997. – С. 4–15.*
18. *Леонтьев Н., Кудрявцев А. Корабельная универсальная артиллерия среднего калибра. Пути развития // Военный парад. – 2002. – № 3.*
19. *Алдошин Г.Т. Гидравлический удар в деформированном трубопроводе // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. математики, механики и астрономии. – 1961. – В. Ч. – С. 93–102.*
20. *Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. – М.: Гостехиздат, 1955. – 804 с.*
21. *Катковский Е.А., Полетаев Г.Н. Волновые процессы в гидросистемах. – М., 1975. – (Препринт / ИАЕ; № 249).*
22. *Рашидов Т.Р. О действии сейсмических волн на цилиндрический туннель с жидкостью // Изв. АН УзССР. Сер. Техн. науки. – № 5. – С. 43–47.*