

УДК 531.36

©2007. А.В. Кремнев, А.С. Кулешов

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ СКЕЙТБОРДА

В работе рассматривается простейшая модель роликовой доски – скейтборда со стоящим на нем спортсменом (райдером). В отличие от предшествующих работ [1–4], в которых рассматривался только случай малых углов наклона доски и поворота колесных осей, в данной работе предполагается, что эти углы могут принимать конечные значения. Выписаны нелинейные кинематические соотношения между этими углами. С учетом найденных кинематических соотношений построены полные уравнения движения модели скейтборда. Анализ полученных уравнений позволил выявить некоторые весьма интересные особенности движения скейтборда.

Введение. В настоящее время скейтбординг – искусство катания на скейтборде – является одним из самых популярных видов спорта. Многие миллионы людей увлекаются скейтбордингом. Однако, несмотря на большую популярность скейтбординга, количество публикаций, посвященных различным вопросам динамики скейтборда, сравнительно невелико. В конце 70-х – начале 80-х годов XX века появились две статьи Монта Хаббарда [1, 2], в которых были построены и исследованы математические модели, описывающие движение скейтборда со стоящим на нем райдером. При этом для получения уравнений движения моделей использовались общие теоремы динамики. В настоящей работе мы даем дальнейшее развитие одной из моделей скейтборда, предложенных Хаббардом.

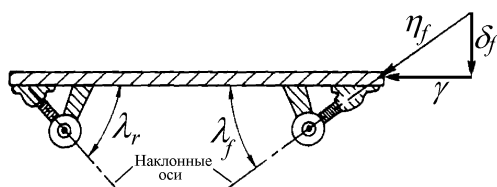


Рис. 1. Скейтборд: вид сбоку.

Обычный скейтборд состоит из доски, двух подвесок, соединяющих колеса с доской, и четырех колес (рис. 1). Современные доски обычно имеют 78–83 см. в длину, 17–21 см. в ширину, толщина их 1–2 см. Кроме размеров, доски различаются по конкейву (прогибу), которым определяется предназначение скейтборда. Для исполнения сложных трюков лучше использовать более гибкую доску. Более жесткой доской следует пользоваться при катании на больших скоростях (например, при скатывании с горы).

Наиболее существенными элементами скейтборда являются подвески, при помощи которых оси колес крепятся к доске. Вращение как передней, так и задней колесной пары происходит вокруг соответствующих наклонных осей – пивотов (рис. 1). Это приводит к тому, что всякий раз, когда доска не параллельна плоскости движения, колесные пары поворачиваются на соответствующие углы относительно вертикальной оси, перпендикулярной плоскости движения (рис. 2). Управляют скейтбордом, используя именно эти связи

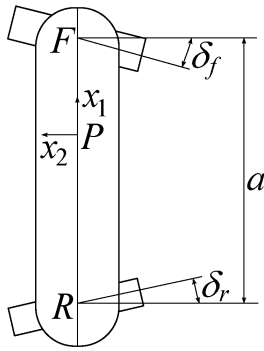


Рис. 2. Скейтборд: вид сверху.

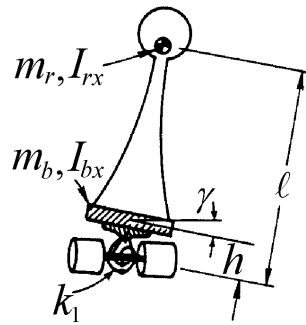


Рис. 3. Скейтборд: вид сзади.

между углом наклона доски и углами поворота колесных пар.

Предположим также, что в случае наклона доски скейтборда возникает восстанавливающий момент, который возвращает доску в первоначальное положение. Будем считать, что величина этого момента пропорциональна углу наклона доски. Такой момент может возникать, например, если доска соединена с колесами при помощи торсионных пружин (рис. 3). Ранее то же самое предположение о наличии восстанавливающего момента было сделано в работах [1, 2]. Жесткость пружины будем обозначать k_1 .

1. Постановка задачи. Уравнения движения. Предположим, что райдер, стоящий на скейтборде, представляет собой твердое тело, остающееся перпендикулярным к плоскости доски во все время движения. Следовательно, при наклоне доски на некоторый угол γ райдер отклоняется от вертикали на тот же угол (рис. 3).

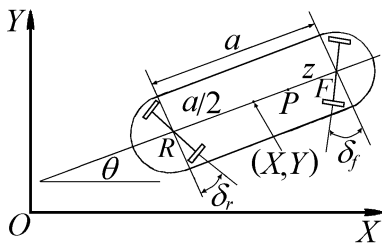


Рис. 4. Неподвижная система координат $OXYZ$.

Введем неподвижную систему координат $OXYZ$ с началом в некоторой точке O плоскости, по которой движется скейтборд, и осью OZ перпендикулярной плоскости движения. Обозначим середины осей передних и задних колес скейтборда через F и R соответственно. Пусть расстояние FR равно a . Положение отрезка FR относительно неподвижной системы координат $OXYZ$ определяется координатами X, Y его середины и углом θ , который данный отрезок образует с неподвижной осью OX (рис. 4).

При наклоне доски на угол γ ось передней колесной пары поворачивается на угол δ_f по часовой стрелке, а ось задней колесной пары поворачивается на угол δ_r против часовой стрелки (рис. 2). Предположим, что скейтборд движется таким образом, что его колеса не могут проскальзывать в направлении, перпендикулярном плоскости колеса. Это требование приводит к тому, что

на систему накладываются две неголономные связи

$$\begin{aligned} -\dot{X} \sin(\theta - \delta_f) + \dot{Y} \cos(\theta - \delta_f) + \frac{a}{2} \dot{\theta} \cos \delta_f &= 0, \\ -\dot{X} \sin(\theta + \delta_r) + \dot{Y} \cos(\theta + \delta_r) - \frac{a}{2} \dot{\theta} \cos \delta_r &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Мы можем разрешить уравнения связей (1) относительно \dot{X} и \dot{Y} . Получим

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\frac{a\dot{\theta}}{2 \sin(\delta_f + \delta_r)} [\cos \delta_f \cos(\theta + \delta_r) + \cos \delta_r \cos(\theta - \delta_f)], \\ \dot{Y} &= -\frac{a\dot{\theta}}{2 \sin(\delta_f + \delta_r)} [\cos \delta_f \sin(\theta + \delta_r) + \cos \delta_r \sin(\theta - \delta_f)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Скорости точек F и R при этом будут направлены горизонтально и перпендикулярно осям колес. В этом случае на отрезке FR существует точка P , скорость которой направлена вдоль прямой FR (см. [1–6]). Величину скорости точки P обозначим через u . Тогда для расстояния FP от передней подвески до точки P и для скорости u справедливы следующие формулы [5, 6]:

$$FP = \frac{a \sin \delta_f \cos \delta_r}{\sin(\delta_f + \delta_r)}, \quad u = -\frac{a\dot{\theta} \cos \delta_f \cos \delta_r}{\sin(\delta_f + \delta_r)}, \quad (3)$$

откуда

$$\dot{\theta} = -\frac{u \sin(\delta_f + \delta_r)}{a \cos \delta_f \cos \delta_r}.$$

В работах [5, 6] было показано, что углы поворота δ_f и δ_r колесных осей связаны с углом наклона доски следующими соотношениями:

$$\operatorname{tg} \delta_f = \operatorname{tg} \lambda_f \sin \gamma, \quad \operatorname{tg} \delta_r = \operatorname{tg} \lambda_r \sin \gamma, \quad (4)$$

где λ_f и λ_r – постоянные углы, которые образуют наклонные оси скейтборда с горизонталью.

С учетом связей (4) перепишем уравнения (2) для \dot{X} и \dot{Y} в виде

$$\begin{aligned} \dot{X} &= u \cos \theta + \frac{(\operatorname{tg} \lambda_f - \operatorname{tg} \lambda_r)}{2} u \sin \gamma \sin \theta, \\ \dot{Y} &= u \sin \theta - \frac{(\operatorname{tg} \lambda_f - \operatorname{tg} \lambda_r)}{2} u \sin \gamma \cos \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Соотношения (3) перепишутся следующим образом:

$$FP = \frac{a \operatorname{tg} \lambda_f}{\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r} = \operatorname{const}, \quad \dot{\theta} = -\frac{(\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r)}{a} u \sin \gamma. \quad (6)$$

Предположим, что доска скейтборда расположена на высоте h от прямой FR , длина доски также равна a , а ее центр масс расположен на продольной оси посередине между точками крепления подвесок. Относительно райдера будем предполагать, что он стоит не в центре доски, а на ее продольной оси на постоянном расстоянии d от точки крепления F передней подвески. Пусть l – высота центра масс райдера над точкой P . Кроме того, пусть m_b – масса доски, m_r – масса райдера, I_{bx}, I_{by}, I_{bz} – главные центральные моменты инерции доски, I_{rx}, I_{ry}, I_{rz} – главные центральные моменты инерции райдера. Введем также обозначения

$$I_x = I_{bx} + I_{rx}, \quad I_y = I_{by} + I_{ry}, \quad I_z = I_{bz} + I_{rz}.$$

Тогда скорость u точки P и угол наклона доски γ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям [5]:

$$(A + (C - 2D) \sin^2 \gamma + K \sin^4 \gamma) \dot{u} + (C - 3D + 3K \sin^2 \gamma) u \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \gamma + B (\ddot{\gamma} \cos \gamma - \dot{\gamma}^2 \sin \gamma) \sin \gamma = 0, \quad (7)$$

$$E \ddot{\gamma} + (D - K \sin^2 \gamma) u^2 \sin \gamma \cos \gamma + k_1 \gamma - (m_b h + m_r l) g \sin \gamma + B (\dot{u} \sin \gamma + u \dot{\gamma} \cos \gamma) \cos \gamma = 0.$$

Здесь A, \dots, E, K – функции параметров, а именно:

$$A = m_b + m_r,$$

$$E = I_x + m_b h^2 + m_r l^2,$$

$$B = \frac{m_b h}{2} (\operatorname{tg} \lambda_f - \operatorname{tg} \lambda_r) + \frac{m_r l}{a} ((a - d) \operatorname{tg} \lambda_f - d \operatorname{tg} \lambda_r),$$

$$C = \frac{m_b}{4} (\operatorname{tg} \lambda_f - \operatorname{tg} \lambda_r)^2 + \frac{I_z}{a^2} (\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r)^2 + \frac{m_r}{a^2} ((a - d) \operatorname{tg} \lambda_f - d \operatorname{tg} \lambda_r)^2,$$

$$D = \frac{(\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r)}{a} (m_b h + m_r l),$$

$$K = \frac{(\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r)^2}{a^2} (I_y + m_b h^2 + m_r l^2 - I_z).$$

Таким образом, уравнения (5)–(7) образуют полную систему уравнений движения простейшей модели скейтборда.

2. Устойчивость прямолинейного движения скейтборда. Уравнения (7) имеют частное решение

$$u = u_0 = \operatorname{const}, \quad \gamma = 0, \quad (8)$$

которое соответствует равномерному прямолинейному движению скейтборда. Условия устойчивости этого движения имеют вид [1–6]

$$B u_0 > 0, \quad D u_0^2 + k_1 - (m_b h + m_r l) g > 0 \quad (9)$$

или, выписывая явные выражения для коэффициентов B и D ,

$$\left[\frac{m_b h}{2} (\operatorname{tg} \lambda_f - \operatorname{tg} \lambda_r) + \frac{m_r l}{a} ((a-d) \operatorname{tg} \lambda_f - d \operatorname{tg} \lambda_r) \right] u_0 > 0, \quad (10)$$

$$k_1 + \left((\operatorname{tg} \lambda_f + \operatorname{tg} \lambda_r) \frac{u_0^2}{a} - g \right) (m_b h + m_r l) > 0. \quad (11)$$

Из условия (10) следует, в частности, что устойчивость прямолинейного движения скейтборда зависит от направления движения. Если в одном направлении движение скейтборда будет устойчивым, то в противоположном – обязательно неустойчивым. Такое поведение присуще многим неголономным системам. В первую очередь здесь следует назвать задачу о движении “кельтского камня” (см., например [7, 8]), в которой устойчивость вращения камня зависит от направления вращения.

Будем считать, что коэффициент B положителен, $B > 0$. Тогда при $u_0 > 0$ скейтборд движется в “устойчивом” направлении, а при $u_0 < 0$ – в “неустойчивом”. Значение $u_0 = 0$ соответствует равновесию скейтборда, когда он неподвижно стоит на плоскости. Необходимое и достаточное условие устойчивости данного положения равновесия имеет вид (см. [1–6])

$$k_1 - (m_b h + m_r l) g > 0. \quad (12)$$

Считая условие (12) выполненным, рассмотрим движение системы вблизи положения равновесия. Разрешая уравнения (7) относительно \dot{u} и $\ddot{\gamma}$ и полагая u и γ малыми величинами, выпишем уравнения возмущенного движения системы с учетом членов до второго порядка малости включительно:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{B(k_1 - (m_b h + m_r l) g)}{AE} \gamma^2, \\ \ddot{\gamma} + \frac{k_1 - (m_b h + m_r l) g}{E} \gamma &= -\frac{Bu\dot{\gamma}}{E}. \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$\Omega^2 = \frac{k_1 - (m_b h + m_r l) g}{E},$$

окончательно приведем уравнения возмущенного движения к виду

$$\dot{u} = \frac{B\Omega^2}{A} \gamma^2, \quad \ddot{\gamma} + \Omega^2 \gamma = -\frac{Bu\dot{\gamma}}{E}. \quad (13)$$

Заметим, что линейная часть второго уравнения системы (13) уже приведена к виду, соответствующему нормальным колебаниям. Для исследования

нелинейной системы (13) приведем ее к нормальной форме [8, 9]. Сначала сделаем замену переменных

$$\gamma = \frac{z_1 - z_2}{2i}, \quad \dot{\gamma} = \frac{z_1 + z_2}{2}\Omega, \quad u = z_3.$$

В переменных z_k , $k = 1, 2, 3$, линейная часть системы (13) имеет диагональную форму и получение нормальной формы сводится к выделению резонансных членов из нелинейностей в правых частях преобразованной системы (13). Таким образом, нормальная форма системы (13) имеет вид

$$\dot{z}_1 = i\Omega z_1 - \frac{B}{2E} z_1 z_3, \quad \dot{z}_2 = -i\Omega z_2 - \frac{B}{2E} z_2 z_3, \quad \dot{z}_3 = \frac{B\Omega^2}{2A} z_1 z_2.$$

Вводя вещественные полярные координаты согласно формулам

$$z_1 = \rho_1 (\cos \sigma + i \sin \sigma), \quad z_2 = \rho_1 (\cos \sigma - i \sin \sigma), \quad z_3 = \rho_2$$

из системы (13) получим нормализованную систему уравнений возмущенного движения, которая распадается на две независимые подсистемы:

$$\dot{\rho}_1 = -\frac{B}{2E} \rho_1 \rho_2, \quad \dot{\rho}_2 = \frac{B\Omega^2}{2A} \rho_1^2, \quad (14)$$

$$\dot{\sigma} = \Omega. \quad (15)$$

В (14) отброшены члены выше второго, а в (15) – выше первого порядка относительно ρ_k , $k = 1, 2$.

В ε -окрестности положения равновесия правые части уравнений (14) и (15) отличаются от отвечающих им правых частей точных уравнений возмущенного движения на величины порядка ε^3 и ε^2 соответственно. Решения точных уравнений аппроксимируются решениями системы (14), (15) с погрешностью порядка ε^2 для ρ_1 , ρ_2 и порядка ε для σ на интервале времени порядка $1/\varepsilon$. Ограничиваясь этой точностью, будем вместо полных уравнений возмущенного движения рассматривать приближенную систему (14), (15).

Уравнение (15) сразу интегрируется. Получаем

$$\sigma = \Omega t + \sigma_0.$$

Система (14) описывает эволюцию амплитуды ρ_1 колебаний доски и скорости ρ_2 прямолинейного движения скейтборда. Легко показать, что данная система имеет первый интеграл

$$E\rho_1^2 + \frac{A}{\Omega^2} \rho_2^2 = An_1^2. \quad (16)$$

Здесь n_1 – постоянная, определяемая начальными условиями. Воспользуемся интегралом (16) для решения системы уравнений (14) и получения

явных зависимостей $\rho_1 = \rho_1(t)$ и $\rho_2 = \rho_2(t)$. Выражая из интеграла (16) ρ_1^2 и подставляя во второе уравнение системы (14), получим

$$\dot{\rho}_2 = \frac{B}{2E} (\Omega^2 n_1^2 - \rho_2^2). \quad (17)$$

Решение уравнения (17) имеет вид

$$\rho_2(t) = \frac{\Omega n_1 (1 - n_2 \exp(-\frac{B\Omega n_1 t}{E}))}{(1 + n_2 \exp(-\frac{B\Omega n_1 t}{E}))}, \quad (18)$$

где n_2 – неотрицательная произвольная постоянная. Явную зависимость функции ρ_1 от времени можно определить теперь из интеграла (16):

$$\rho_1(t) = 2n_1 \sqrt{\frac{An_2}{E} \frac{\exp(-\frac{B\Omega n_1 t}{2E})}{1 + n_2 \exp(-\frac{B\Omega n_1 t}{E})}}. \quad (19)$$

Остановимся подробно на свойствах решений (18), (19) системы (14) и их связи с характером движения скейтборда. Система (14) имеет положение равновесия

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = \Omega n_1 \quad (20)$$

(эти частные решения могут быть получены из общих зависимостей (18), (19) если положить в них $n_2 = 0$). При этом произвольная постоянная n_1 может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Положительные значения постоянной n_1 соответствуют прямолинейному движению скейтборда с малой скоростью в “устойчивом” направлении, а отрицательные – в “неустойчивом”. Действительно, линеаризованные в окрестности равновесия (20) уравнения (14) дают

$$\dot{\rho}_1 = -\frac{B}{2E} \Omega n_1 \rho_1, \quad \dot{\rho}_2 = 0.$$

Таким образом, при $n_1 > 0$ положение равновесия устойчиво, а при $n_1 < 0$ – неустойчиво.

Зависимости функций ρ_1 и ρ_2 от времени дают полное представление о характере движения скейтборда при малых скоростях. Будем считать, что мы находимся в окрестности устойчивого равновесия ($n_1 > 0$) и в начальный момент времени $\rho_2(0) \geq 0$, т.е. $n_2 \leq 1$ (случай $n_1 > 0$, $n_2 > 1$ аналогичен случаю $n_1 < 0$, $n_2 < 1$, который будет рассмотрен ниже). Эти условия соответствуют тому, что в начальный момент скейтборд получил малую скорость

$$\rho_2(0) = \Omega n_1 \frac{1 - n_2}{1 + n_2}$$

в “устойчивом” направлении. Тогда с течением времени “амплитуда” колебаний доски ρ_1 монотонно убывает от ее начального значения

$$\rho_1(0) = \frac{2n_1}{1 + n_2} \sqrt{\frac{An_2}{E}}$$

до нуля, а скорость движения скейтборда ρ_2 возрастает по модулю. В пределе скейтборд движется в устойчивом направлении с постоянной скоростью Ωn_1 .

Пусть теперь мы находимся в окрестности неустойчивого равновесия $n_1 < 0$. Предположим снова, что в начальный момент времени $n_2 < 1$, т.е. $\rho_2(0) < 0$ (случай $n_1 < 0, n_2 > 1$ аналогичен разобранным выше случаю $n_1 > 0, n_2 < 1$). Эти условия соответствуют тому, что в начальный момент скейтборд получил малую скорость

$$\rho_2(0) = \Omega n_1 \frac{1 - n_2}{1 + n_2}$$

в “неустойчивом” направлении. В этом случае предельное движение системы будет таким же, как и при $\rho_2(0) \geq 0$, но эволюция движения существенно иная. При

$$0 < t < t_* = \frac{E \ln(n_2)}{B\Omega n_1}$$

“амплитуда” колебаний ρ_1 по модулю монотонно возрастает, а скейтборд движется в неустойчивом направлении со все уменьшающейся скоростью. В момент $t = t_*$ скорость скейтборда обращается в нуль, а “амплитуда” колебаний ρ_1 достигает своего максимального (по модулю) значения

$$\rho_1(t_*) = n_1 \sqrt{\frac{A}{E}}.$$

При $t > t_*$ скейтборд движется уже в устойчивом направлении с возрастающей скоростью, а амплитуда колебаний монотонно по модулю убывает. Таким образом, при $\rho_2(0) < 0$ за время эволюции движения один раз происходит смена направления прямолинейного движения скейтборда с постоянной скоростью. Аналогичные нелинейные эффекты (в частности, смена направления движения) наблюдались раньше и в других задачах неголономной механики (например, в классической задаче о движении “кельтского камня” [7, 8]). Этим еще раз можно подчеркнуть связь рассматриваемой задачи с классическими задачами динамики неголономных систем.

Графики функций ρ_1 и ρ_2 от времени, как в случаях $n_1 > 0, n_2 \leq 1$, так и в случаях $n_1 < 0, n_2 \leq 1$, представлены на рис. 5–8.

Возвращаясь к исходным переменным γ, u , мы можем написать

$$\gamma = \rho_1 \left(\sin \sigma - \frac{B}{4E\Omega} \rho_2 \cos \sigma \right), \quad \dot{\gamma} = \Omega \rho_1 \left(\cos \sigma - \frac{B}{4E\Omega} \rho_2 \sin \sigma \right),$$

$$u = \rho_2 - \frac{B\Omega}{2A} \rho_1^2 \sin \sigma \cos \sigma.$$

Графики зависимости функций u и γ от времени представлены на рис. 9–12. Они еще раз подтверждают сделанные нами выводы о характере движения скейтборда с малой скоростью в устойчивом и неустойчивом направлениях.

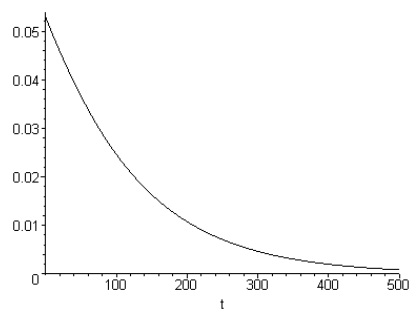


Рис. 5. График функции ρ_1
в случае $n_1 > 0, n_2 \leq 1$.

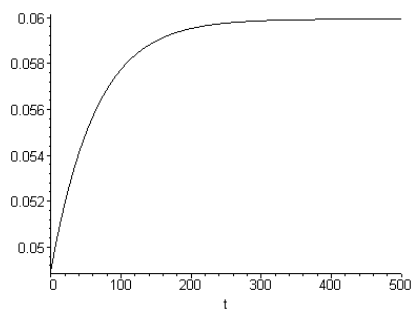


Рис. 6. График функции ρ_2
в случае $n_1 > 0, n_2 \leq 1$.

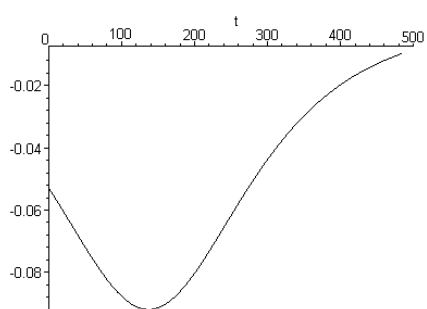


Рис. 7. График функции ρ_1
в случае $n_1 < 0, n_2 \leq 1$.

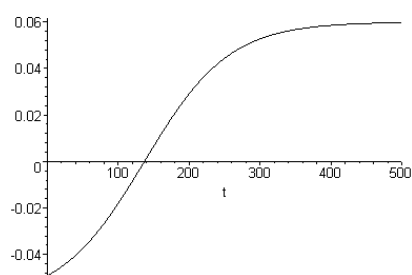


Рис. 8. График функции ρ_2
в случае $n_1 < 0, n_2 \leq 1$.

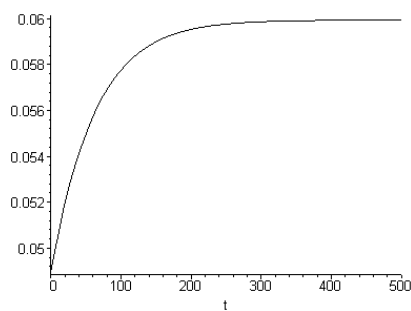


Рис. 9. График скорости u в случае
 $n_1 > 0, n_2 \leq 1$.

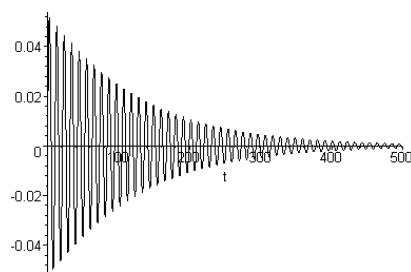


Рис. 10. Зависимость угла γ от времени
в случае $n_1 > 0, n_2 \leq 1$.

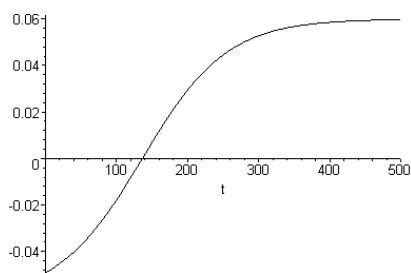


Рис. 11. График скорости u в случае $n_1 < 0$, $n_2 \leq 1$.

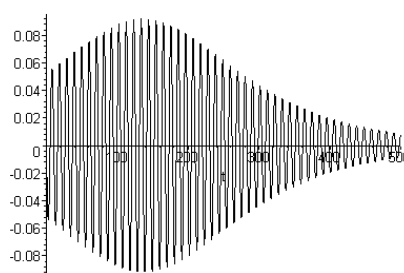


Рис. 12. Зависимость угла γ от времени в случае $n_1 < 0$, $n_2 \leq 1$.

Таковы некоторые свойства рассмотренной нами простейшей модели скейтборда со стоящим на нем райдером при движении по горизонтальной плоскости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (07-01-00290), гранта “Научные школы” (НШ-6667.2006.1).

1. *Hubbard M.* Lateral Dynamics and Stability of the Skateboard // *J. Appl. Mech.* – 1979. – **46**. – P. 931–936.
2. *Hubbard M.* Human Control of the Skateboard // *J. of Biomech.* – 1980. – **13**. – P. 745–754.
3. *Kuleshov A.S.* Mathematical Model of the Skateboard // *Proc. of XXIV Int. Symp. on Biomech. in Sports.* – Salzburg, 2006. – **2** – P. 715–719.
4. *Кулешов А.С.* Математическая модель скейтборда с одной степенью свободы // Докл. РАН. – 2007. – **414**, No 3. – С. 330–333.
5. *Кремнев А.В., Кулешов А.С.* Нелинейная динамика и устойчивость движения простейшей модели скейтборда. – М.: Изд-во Мех.-мат. ф-та МГУ, 2007. – 104 с. <http://akule.pisem.net/Kuleshov.pdf>
6. *Österling A.E.* MAS 3030. On the skateboard, kinematics and dynamics. – School of Mathematical Sciences. – University of Exeter. UK, 2004. – 45 p. <http://akule.pisem.net/theSkateboard.pdf>
7. *Астапов И.С.* Об устойчивости вращения кельтского камня // *Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика, механика.* – 1980. – No 2. – С. 97–100.
8. *Маркеев А.П.* О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости // *Прикл. математика и мезаника.* – 1983. – **47**, вып. 4. – С. 575–582.
9. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. – М.: Наука. – 1979. – 256 с.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
avkremen@mail.ru
kuleshov@mech.math.msu.su

Получено 18.09.07