УДК 621.3

Б.М. Стрихалюк, ст. викл., каф. «Телекомунікації» Національного Університету «Львівська політехніка»,
М.В. Кайдан, к.т.н., доц., каф. «Телекомунікації» Національного Університету «Львівська політехніка»
Р.С.Колодій, к.т.н., доц., каф. «Телекомунікації» Національного Університету «Львівська політехніка»
О.В.Тимченко, д.т.н., проф., каф. АКТ Українська академія друкарства

ВИКОРИСТАННЯ НЕЗВІДНИХ ПРЕДСТАВЛЕНЬ ДЛЯ АНАЛІЗУ К-ШЛЯХОВОЇ МАРШРУТИЗАЦІЇ

Розглядається тензорне представлення для аналізу К-шляхової маршрутизації. Запропоновано незвідні представлення для пошуку оптимальних шляхів.

Рассматривается тензорное представление для анализа К-путевой маршрутизации. Предложены неприводимые представления для поиска оптимальных путей.

Tensor presentation is examined for the analysis of K-ways of routing. Presentations of unpander are offered for the search of optimum ways.

Ключові слова: тензорне представлення, багатошляхова маршрутизація.

Вступ

Однією з важливих телекомунікаційних задач є пошук оптимальних маршрутів, при зменшені часу затримки в мережі, з одночасним зменшенням перенавантаження в усіх ділянках системи.

В даний час, можна виділити два основних підходи пошуку маршруту з найменшою часовою затримкою передачі інформації в телекомунікаційній мережі. Перший складається у використанні потокової моделі, де об'єктом дослідження є безперервний простір станів, а методи рішення визначають маршрути передачі інформації з мінімальною довжиною шляхових потоків. Другий підхід заснований на використанні теорії графів, зокрема, алгоритмів визначення найкоротших шляхів на графі. Він не враховує процеси, що протікають у телекомунікаційній мережі, їхні закономірні співвідношення.

Передача пакетів з одного вузла-джерела до вузла адресату може здійснюватись [1] використовуючи єдиний, **К**-одночасних або всі можливі маршрути. В абсолютній більшості випадків єдиний маршрут менш ефективний, оскільки менше використовує ресурси мережі передачі даних, хоча є найбільш простим. Водночас при використанні одночасно всіх можливих маршрутів ймовірність втрати окремих пакетів зростає. Очевидно, що використання обмеженої кількості маршрутів є найбільш доцільним, що вже спостерігається для двошляхової маршрутизації [1].

Метою статті є дослідження алгоритмів маршрутизації в телекомунікаційних мережах з використанням тензорного методу, що є інваріантний до вибору системи координат, а отже є найбільш ефективним для розв'язання поставлених задач.

Тензорна методологія припускає суміщеність процесів і структур, у яких ці процеси протікають. При цьому структура мережі визначає систему координат, а її зміни здійснюються перетворенням системи координат.

Аналіз та дослідження багатошляхової маршрутизації тензорним методом

Нехай в системі використовують при передачі пакетів **К** маршрутів. Для визначення через які саме маршрути доцільно передавати данні, необхідно спочатку визначити множину всіх можливих маршрутів за допомогою теорію графа [2]. Тепер використовуючи формулу Літтла $H=TL$ та маючи відомості про пропускну здатність кожного вузла L можна знайти час перебування заданого пакету H у мережі в залежності від можливого маршруту u

$$T=H\ L^{-1}u\cdot$$

Визначивши **К** маршрутів з найменшим часом затримки, по яким і будуть передані дані. Водночас розглядаємо, які саме m вузлів та n гілок використовуються для даних маршрутів.

У подальших досліджень використаємо тензорний підхід в мережах запропонований Г.Кроном [3] та розглянутий в телекомунікаційних системах [4]. Для вибраної множини систем координат, кількість гілок у будь-якій одномірній мережі, чисельно дорівнює сумі [3]

$$n=r+s,$$

де r – кількість замкнутих шляхів (контурів); s - кількість незалежних розімкнутих шляхів (вузлових пар), яка визначається [3].

$$s=m-\alpha,$$

де α - числа незв'язних підмереж. В нашому випадку, щоб не ускладняти задачу $\alpha=1$.

Відповідно до постулату другого узагальнення Г. Крона [3], як функціональний інваріант запропонованої моделі виступає тензорне рівняння Літтла, що зберігає свою форму незмінною незалежно від координатної системи розгляду мережі. Введемо в розгляд дві координатні системи. Перша

– система координат гілок мережі, а друга – система координат незалежних контурів і пар вузлів мережі. При цьому в першій системі координат як координатні шляхи безпосередньо виступають окремі гілки мережі, а в другій – координатні шляхи представлені незалежними контурами і вузловими парами.

Правила перетворення для досліджуваних параметрів записують у вигляді [4]

$$H_{г} = CH_{кв}\ , \tag{1}$$

$$T_{г} = AT_{кв}\ , \tag{2}$$

$$L_{г} = CL_{кв}C^{t} \quad \text{або} \quad L_{г} = AL_{кв}A^{t}, \tag{3}$$

$$C^{t} = A^{-1}.$$

де C та A - матриці контраваріантного та коваріантного перетворення, відповідно; навантаження $H_{г}$ та $H_{кв}$ час затримки $T_{г}$ та $T_{кв}$, пропускну здатність $L_{г}$ та $L_{кв}$ - введених вище координатних системах окремих гілок мережі та незалежних контурів і пар вузлів, відповідно.

Враховуючи, що система координат незалежних контурів і пар вузлів складається з r-контурів та s-вузлів, то вектори $H_{кв}$ та $T_{кв}$ можна розглядати, через компаунд-вектори $H_{к}$ та $H_{в}$, $T_{к}$ та $T_{в}$, які складені з компонент $h^{i}_{к}$ та $h^{j}_{в}$ – довжина повідомлення в i контурі мережі та надходить у мережу через j вузол; $t_{i}^{к}$ та $t_{i}^{в}$ – затримки передачі повідомлень, в i контурі та між j парою вузлів мережі, відповідно. Формулу Літтла зручно представити у вигляді

$$\begin{bmatrix} H_{к} \\ --- \\ H_{в} \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} L_{к.в.}^{\langle 1 \rangle} & | & L_{к.в.}^{\langle 2 \rangle} \\ --- & | & --- \\ L_{к.в.}^{\langle 3 \rangle} & | & L_{к.в.}^{\langle 4 \rangle} \end{Vmatrix} \begin{bmatrix} T_{к} \\ --- \\ T_{в} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

де

$$\begin{Vmatrix} L_{к.в.}^{\langle 1 \rangle} & | & L_{к.в.}^{\langle 2 \rangle} \\ --- & | & --- \\ L_{к.в.}^{\langle 3 \rangle} & | & L_{к.в.}^{\langle 4 \rangle} \end{Vmatrix} = L_{к.в.}\ ,$$

Тут накладається умова $T_{к}$=0, що гарантує відсутність циклів у маршрутах та дозволяє мінімізувати час передачі, який буде однаковий для кожного з розрахованих маршрутів [4]. Одночасно враховуючи, що $H_{в}$ є відомий, тоді з (4) знаходимо:

$$T_в = \left[L_{к.в.}^{\langle 4 \rangle} \right]^{-1} H_в , \qquad (5)$$

$$H_к = L_{к.в.}^{\langle 2 \rangle} T_в . \qquad (6)$$

З (5) визначаємо $T_в$ і підставляємо в (6) обчислюється $H_к$. Маючи відомості $H_в$ і $H_к$ отримаємо одночасно $H_{кв}$, тоді (1) визначаємо $H_г$, що дозволяє мати відомості розповсюдження навантаження у всіх розглянутих незалежних розімкнутих шляхів.

Враховуючи, що кількість гілок є більша ніж число можливих маршрутів, причому можливі випадки, коли гілка використовується для декількох різних шляхів, або кілька гілок приймають участь відносяться до одного і того ж маршруту. Для першого варіанту елемент $H_г$ складається зі суми навантажень різних маршрутів, що проходять через розглянутої гілки.

Важливою задачею є визначення матриць перетворення *A* та *C*. Наприклад, для визначення коваріантної матриці *A* враховуємо співвідношення (2). Спочатку Тепер до Кожному елементу $t_i^г$, і відповідному рядку матриці *A*, відповідають елементи вузлів $t_i^в$ через які гілка передає навантаження, зі знаком «мінус», коли напрям передачі з вузла і «плюс», коли пакети передаються у вузол. Також виберемо по одній гілці, що відповідає тільки до певного контуру, тоді елемент $t_i^г$ має додатковий елемент чинного контуру $t_i^к$.

В (5) визначивши $T_в$ отримаємо час затримки від початкового вузла до кінцевого і становитиме $t_g^в$, де g – індекс, що відповідає адресату.

Незвідні представлення

Розглядаючи довільну К – шляхову маршрутизацію необхідно зазначити, про існування обмеження [1]

$$\sum_{l=1}^{m} \nu_{kl}^{(j)} \le \mathbf{K},$$

де

$$\nu_{kl}^{(j)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \sum_{i=1}^{m} \chi_{kl}^{(i,j)} > 0; \\ 0, & \text{якщо} \quad \sum_{i=1}^{m} \chi_{kl}^{(i,j)} = 0. \end{cases}$$

Тут $\chi_{kl}^{(i,j)}$ – доля потоку γ_{ij}, яка проходить між вузлами k та l, $0 \le \chi_{kl}^{(i,j)} \le 1$; γ_{ij} – середнє значення трафіку, що виникає у вузлі *i* та адресований вузлу *j*.

В подальшому, використовуючи правило Ейнштейна, знак суми будемо опускати. Представимо формулу Літтла для середньої затримки повідомлень в мережі у вигляді [1]:

$$T=\frac{1}{\gamma}\lambda_{kl}t_{kl}, \tag{8}$$

де t_{kl} – середній час перебування пакету в гілці (kl); γ - повний зовнішній трафік; λ_{kl} - потік в гілці (kl), який обумовлений потоком γ_{ij} [1]:

$$\lambda_{kl}=\gamma_{ij}\cdot\chi_{kl}^{(i,j)}. \tag{9}$$

Як відомо з тензорного аналізу, завжди існує розкладання тензора на незвідні представлення [5]. В [6] проводився аналіз трафіка, розглядаючи по аналогії симетричного тензора напруги, який розкладається на кульову (скалярну) та девіаторну представлення. Згідно [5] в загальному випадку тензор другого рангу можна розкласти на симетричний та антисиметричні тензори. Антисиметричний тензор представляється у вигляді векторного представлення, а отже тензор другого рангу розкладається на скалярну, девіаторну (симетрична) та вектору (антисиметрична) складові.

В даній статті розглядаються параметри γ_{ij}, λ_{kl} та t_{kl}, які відносяться до тензора другого роду. Вони, окрім λ_{kl}, не є симетричними, оскільки трафік та час затримки з вузла-джерела у вузол-адресата у порівняння з протилежним напрямком є різними. Водночас потік, а отже і зайнятість гілки не є важливою в якому напрямку передається навантаження з (kl) чи (lk). Приведемо деякі співвідношення:

$$e_{ij}=b_{ij}+w_{ij}, \qquad b_{ij}=1/5\,(e_{ij}+e_{ji}),$$

$$w_{ij}=1/5(e_{ij}-e_{ji}), \tag{10}$$

Симетричний тензор b_{ij} характеризує на скільки досліджувані параметри є незалежними від напрямку між вузлами (ij):

$$b_{ij}=I^{(b)}\delta_{ij}+D_{ij}^{(b)}, \quad I^{(b)}=1/3b_{ii}, \qquad D_{ij}^{(b)}=b_{ii}-I^{(b)}. \tag{11}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера. З (11) бачимо, що коли скаляр $I^{(b)}=0$ в мережі відсутні цикл між вузлами. Девіатор $D_{ij}^{(b)}$ подібний за своєю суттю до тензора b_{ij} , але вже без можливих петель в мережі.

Антисиметричний тензор w_{ij} і псевдовектор V_k характеризують на скільки досліджувані параметри відрізняються від напрямку гілки (ij) та (ji):

$$w_{ij}=\varepsilon_{ijk}V_k, \tag{12}$$

де ε_{ijk} – псевдотензор Леві –Чівіта.

Тензора четвертого рангу симетричний по одній парі індексів, наприклад $\chi_{kl}^{(i,j)}$, можна розкласти:

$$r_{ijkl}=p_{ijkl}+o_{ijkl},$$

де p_{ijkl} - тензор симетричний по кожній парі індексів і характеризує на скільки досліджувані параметри є незалежними від напрямку між вузлами (ij) та (kl); o_{ijkl} – тензор антисиметричний по першій парі індексів і характеризує на скільки досліджувані параметри відрізняються від напрямку гілки (ij). Тензор p_{ijkl} розкладемо [7]:

$$p_{ijkl}=v_{ijkl}+u_{ijkl}+w_{ijkl},$$

$$v_{ijkl}=(p_{ijkl}+p_{ikjl}+p_{iljk}+p_{klij}+p_{jlik}+p_{jkil}),$$

$$u_{ijkl}=(2p_{ijkl}-p_{ikjl}-p_{iljk}+2p_{klij}-p_{jlik}-p_{jkil}),$$

$$w_{ijkl}=(2p_{ijkl}-p_{klij}).$$

Симетричний по всім індексам тензор v_{ijkl} характеризує усереднене значення досліджуваних параметрів між вузлами ijkl, як кожен з кожним та розкладається

$$v_{ijkl}= I^{(v)}\,\delta_{(ij}\delta_{kl)} +D_{(ij}^{(v)}\,\delta_{kl)} +N_{ijkl}^{(b)},$$

де інваріант $I^{(v)}$, девіатор $D_{ij}^{(v)}$ і нонор $N_{ij}^{(v)}$ є:

$$I^{(v)}= 1/5v_{iikk},$$

$$D_{ij}^{(v)}=6/7\ v_{ijkk}-10/7\ I^{(b)}\,\delta_{ij},\ \ N_{ijkl}^{(v)}= v_{ijkl}- I^{(v)}\,\delta_{(ij}\delta_{kl)} -D_{(ij}^{(v)}\,\delta_{kl)}.$$

Тут і далі, використовуються загально прийняті позначення по індексам обмеженим в круглих або квадратних дужках, - симетрування або альтернунвання відповідно, причому на індекси, які обмежені у вертикальні риски, не розповсюджуються дія дужок, що стоять поза цих рисок.

Тензор u_{ijkl} симетричний по першій і другій парі і індексів і перестановок цих пар і перетворюються в нуль при симетруванні по всім індексам, характеризує на скільки параметри є схожими від напрямку між вузлами та між самими парами (ij), (kl) та відрізняються від усереднених значень параметрів між вузлами ijkl, як кожен з кожним і розкладається на інваріантну $I^{(u)}$ та девіаторну $D_{ij}^{(u)}$ частини:

$$u_{ijkl}= I^{(u)}(\delta_{ij}\delta_{kl} -\delta_{(ij}\delta_{kl)})+[1/2\ (D_{ij}^{(u)}\delta_{kl}+ D_{kl}^{(u)}\delta_{ij})],$$

$$I^{(u)}= 1/4u_{iikk}, \qquad D_{ij}^{(u)}=3u_{ijkk}-4I^{(u)}\delta_{ij}.$$

Тензор w_{ijkl} симетричний по трьом останнім індексам і перетворюється внуль в результаті симетруванні по всім індексам, характеризується на скільки параметри відрізняються при зміні пари вузлів (ij), (kl) між собою. В нашому випадку для тензора $\chi_{kl}^{(i,j)}$, на скільки відбудуться зміни доля потоку доля потоку γ_{ij}, яка проходить між вузлами k та l від потоку γ_{kl} між вузлами і та j.

$$w_{ijkl}=\varepsilon_{m(i|(k}\delta_{l)|j)}V_m^{(w)}+1/2(D_{ij}^{(w)}\delta_{kl}-D_{kl}^{(w)}\delta_{ij})+\varepsilon_{m(i|(k}S_{l)|j)m}^{(w)}.$$

де псевдовектор $V_m^{(w)}$, девіатор $D_{ij}^{(w)}$ та псевдосептор $S_{ljm}^{(w)}$ є:

$$V_m^{(w)}=\varepsilon_{mil}w_{ijjl},\quad D_{ij}^{(w)}=2/3w_{ijkk},$$

$$S_{ljm}^{(w)}=w_{(i|jk|l)}\varepsilon_{m)jk}-1/2V_{(i}^{(w)}\delta_{lm)}.$$

Тензор o_{ijkl} визначається одним девіатором $D_{il}^{(o)}$ і сам визначає його

$$o_{ijkl}=2\delta_{(i|[k}D_{l]j)}^{(w)},\qquad D_{il}^{(o)}=2/3\ o_{ijjl}.$$

Незвідні представлення дозволяють визначити цільову функцію маршрутизації. Це надзвичайно важливий елементи, бо при аналізі симетричних частин тензора можна охарактеризувати нормальний стан мережі, а антисиметричні складові виявляють присутність відхилень від оптимального шляху.

Висновки

Вдосконалено, для К-шляхової маршрутизації, тензорну модель і представлено алгоритм пошуку шляхів при використанні вектора обмежень Запропоновано використання незвідних представлень для пошуку оптимального маршруту в телекомунікаційній мережі з використанням багатомірної цільової функції

1. *Березко М.П., Вишневський В.М., Левнер Е.В.* Математические модели исследования алгоритмов маршрутизации в сетях передаи данніх// Передачи информации в компьютерніх сетях, Т. 1, №2, С.103-125, 2001.

2. *Свами М., Тхуласираман К. Графы*, сети и алгоритмы: Пер. с англ. -.М.: Мир, 1984. - 455 с.

3. Крон Г. Тензорный анализ сетей. – М.: Сов. радио, 1978. – 719 с.

4. Математичні основи теорії телекомунікаційних систем: За заг. ред. В.В. Поповського. - Харків: ТОВ "Компанія СМІТ", 2006. - 564 с.

5. *Схоутен Я. А.,* Тензорный анализ для физиков: Пер. с англ. - М., 1965;- 456 с.

6. Мінаєв Ю. М.,Філімонова О. Ю. Моделювання трафіка комп'ютерних мереж в базисі тензорних отогональних інваріантів // Проблеми інформатизації та управління, Т.12 – с. 120-125, 2005.

7. *Сиротин Ю.И.* Разложение материальных тензоров на неприводимые части // Кристаллография, Т. 19, №5, С.909-915, 1974.

Поступила 20.08.2010р.