УДК 519.6

Е.Ю. КАРПЕНКО

О ПРИМЕНЕНИИ ВЕЙВЛЕТОВ И ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

Abstract: *In the article one of approaches to the decision of task of signal restoration is considered, based on the use of wavelet base with filtration of the recovered signal.*
Key words: *signal restoration, Fredgolms integral equation, wavelet, Haar, Matlab, filter.*

Анотація: *У статті розглянуто один із підходів для розв'язання задачі відтворення сигналу, що базується на використанні вейвлетного базису та фільтрації відтвореного сигналу.*
Ключові слова: *відтворення сигналів, інтегральне рівняння Фредгольма, вейвлет, Хаар, Matlab, фільтр.*

Аннотация: *В статье рассмотрен один из подходов к решению задачи восстановления сигнала, основанный на использовании вейвлетного базиса с последующей фильтрацией восстановленного сигнала.*
Ключевые слова: *восстановление сигналов, интегральное уравнение Фредгольма, вейвлет, Хаар, Matlab, фильтр.*

1. Введение

В практических задачах восстановления сигналов зачастую возникает вопрос о существовании, единственности и устойчивости решения основного интегрального уравнения. Большинство таких задач являются некорректно поставленными и решать их трудно из-за неизбежных ошибок регистрации наблюдаемой функции. Первая попытка решения конкретной задачи восстановления сигналов была предпринята Рэлеем еще в 1871 г. С тех пор опубликовано большое количество работ, в которых рассматривались различные задачи восстановления сигналов и предложены эффективные методы их решения, нашедшие практическое применение [1].

Подобные методы основаны на классических способах решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода в предположении абсолютно точных измерений правой части. Различные методы восстановления допускают следующую классификацию:

1) аппроксимативные методы, основанные на задании или аппроксимации сигнала с помощью «простых» функций, позволяющих найти решение либо в явном виде, либо в виде некоторого ряда;

2) итерационные методы, предполагающие нахождение решения путем последовательного определения поправок к наблюдаемой функции;

3) алгебраические методы, предусматривающие сведение основного интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений и последующее ее решение.

Приведенная выше классификация, естественно, условна, так как многие практические методы можно одновременно отнести к различным классам. В данной статье рассмотрен именно такой случай: при решении интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода искомая функция будет разложена в вейвлетный ряд, для нахождения неизвестных коэффициентов разложения которого методом регуляризации Тихонова будет решена система линейных алгебраических уравнений.

2. Понятие вейвлета

В настоящее время применение вейвлетов как математического аппарата широко используется в различных областях научных исследований. Вейвлеты используются при обработке различного рода сигналов (речевых), анализе изображений и во многих других случаях.

При использовании вейвлетного базиса сигнал разлагают по семейству функций, порожденных исходной функцией $\psi(x)$ («материнским» вейвлетом) с помощью переносов и масштабных растяжений:

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k). \tag{1}$$

На вейвлеты накладываются следующие условия:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx = 0, \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty. \end{aligned} \tag{2}$$

Исходный одномерный сигнал, разложенный по вейвлет-базису, принимает вид

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{jk}\psi_{jk}(x). \tag{3}$$

В качестве простейшего примера ортогонального вейвлета можно рассмотреть вейвлет Хаара, который определяется следующим соотношением:

$$\psi_{00}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \le x < 1, \\ 0, & x < 0,\ x \ge 1. \end{cases} \tag{4}$$

3. Постановка задачи

Многие задачи восстановления сигналов можно свести к решению интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода:

$$\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x), \tag{5}$$

где $K(x,s)$ – ядро интегрального оператора;

$f(x)$ – правая часть уравнения (сигнал на выходе);

$y(x)$ – искомая функция (сигнал на входе).

Для решения уравнений вида (5) применяются различные методы [2], многие из них опираются на использование дополнительной априорной информации о входном сигнале.

Будем искать решение уравнения (5) в базисе (3):

$$y(x)=c_0+\sum_{\substack{j=0:r\\k=0:2^j-1}} c_{jk}\psi_{jk}(x), \tag{6}$$

где r – уровень наименьшего вейвлета.

Для удобства в вычислениях формулу (6) можно представить в виде

$$y(x)=c_0+\sum_{i=1}^{n} c_i\psi_i(x), \tag{7}$$

где

$$n=2^{r+1}-1;$$

$$i=2^j+k.$$

Между числами i и (j,k) можно установить и обратное соотношение:

$$j=[\log_2 i];$$

$$k=i-2^j.$$

Подставив (6) в (5), получаем

$$\int_a^b K(x,s)[c_0+c_{00}\psi_{00}(s)+c_{10}\psi_{10}(s)+c_{11}\psi_{11}(s)+c_{20}\psi_{20}(s)+...]ds=f(x). \tag{8}$$

Разбив отрезок $[a,b]$ равномерной сеткой $\{x_i\}_{i=1}^N$, перейдем от уравнения (8) к системе уравнений (9):

$$\begin{aligned} &c_0\int_a^b K(x_i,s)ds+c_{00}\int_a^b K(x_i,s)\psi_{00}(s)ds+c_{10}\int_a^b K(x_i,s)\psi_{10}(s)ds+c_{11}\int_a^b K(x_i,s)\psi_{11}(s)ds+\\ &+c_{20}\int_a^b K(x_i,s)\psi_{20}(s)ds+...=f(x_i),\quad i=\overline{1,N}. \end{aligned} \tag{9}$$

Принимая во внимание тот факт, что для вейвлетов Хаара справедлива формула

$$\psi_{ij}(x)=\begin{cases} 2^{j/2}, & \dfrac{k}{2^j}\le x<\dfrac{k+1/2}{2^j},\\ -2^{j/2}, & \dfrac{k+1/2}{2^j}\le x<\dfrac{k+1}{2^j},\\ 0, & x<\dfrac{k}{2^j},\ x\ge\dfrac{k+1}{2^j}. \end{cases} \tag{10}$$

система уравнений (9) принимает вид

$$c_0\int_a^b K(x_i,s)ds+\sum_{\substack{j=0:r\\k=0:2^j-1}} 2^{j/2}c_{jk}\left(\int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1/2}{2^j}} K(x_i,s)ds-\int_{\frac{k+1/2}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} K(x_i,s)ds\right)=f(x_i). \tag{11}$$

Для вычисления интегралов, стоящих в правых частях системы (11), воспользуемся квадратурным методом трапеций, что позволит перейти от системы (11) к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов c_{jk}:

$$AC = F, \tag{12}$$

где элементы матрицы A определяются следующими формулами:

$$A_{ij} = 2^{j/2}\left(\sum_{j1=1}^{N_j} \tilde{A}_{j1} K(x_i, s_{j1}) - \sum_{j2=1}^{N_j} \tilde{A}_{j2} K(x_i, s_{j2})\right), \; i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, 2^{r+1} - 1}, \tag{13}$$

где s_{j1} и s_{j2} – точки разбиения отрезков $[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1/2}{2^j}]$ и $[\frac{k+1/2}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]$ соответственно.

Для решения полученной системы (12) воспользуемся методом регуляризации Тихонова:

$$C = (A^T A + \alpha E)^{-1} \cdot A^T F, \tag{14}$$

где α – параметр регуляризации.

Для проверки эффективности данного метода в среде Matlab были написаны программные модули, реализующие вышеизложенный алгоритм. В качестве тестового примера был рассмотрен следующий входной сигнал:

$$y(x) = \begin{cases} 1, \; x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]; \\ 0, \; x \notin \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \end{cases} \tag{15}$$

в качестве ядра рассмотрена функция $K(x, s) = e^{-45 \cdot (x-s)^2}$.

Был получен следующий результат:

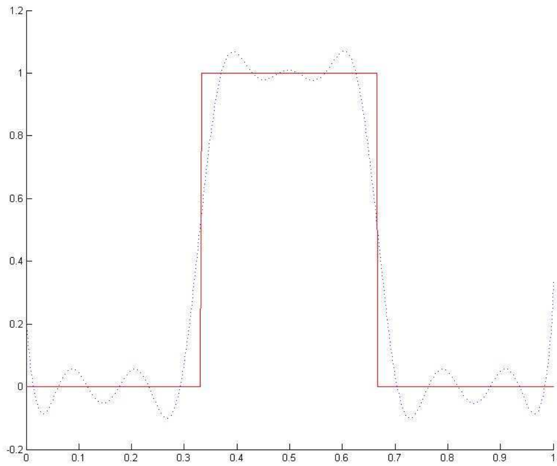

Рис. 1. Исходный сигнал (—), восстановленный сигнал (- -)

Как видно по рис. 1, из-за наличия скачков в исходном сигнале наблюдаются гиббсовские осцилляции в восстановленном сигнале, что мешает в полной мере судить о его структуре.

3. Оптимальная линейная фильтрация

Для устранения явлений Гиббса, которые могут возникать в местах быстрого изменения функции (скачках), необходимо построение оптимального линейного фильтра для коррекции восстанавливаемого сигнала. Возникает задача нахождения так называемых сигма-факторов, повышающих качество восстановления сигнала:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i c_i \psi_i(x)\,. \tag{16}$$

Подобный подход уже рассматривался при решении поставленной задачи с использованием SVD базиса. При наличии априорной информации удалось достаточно эффективно устранить явления Гиббса.

Широко известен фильтр Ланцоша $\left(\sigma(r,k)=\dfrac{\sin(\pi k/r)}{\pi k/r}\right)$ и фильтр Фейера $\left(\sigma(r,k)=\dfrac{r-k}{r}\right)$, которые применяются для рядов Фурье [3].

При использовании вейвлетного базиса следует искать сигма-факторы не для каждой функции, входящей в вейвлетный ряд, а допускать, что функции одного вейвлетного уровня имеют общий сигма-фактор. Возникает задача минимизации некоторого функционала, которая успешно решается средствами Matlab при использовании встроенной функции fmincon. При этом минимизацию следует выполнять не на всем отрезке $[a,b]$, а в местах, несколько удаленных от скачков функции.

При рассмотрении 9-уровневого вейвлетного базиса результат оказался следующим:

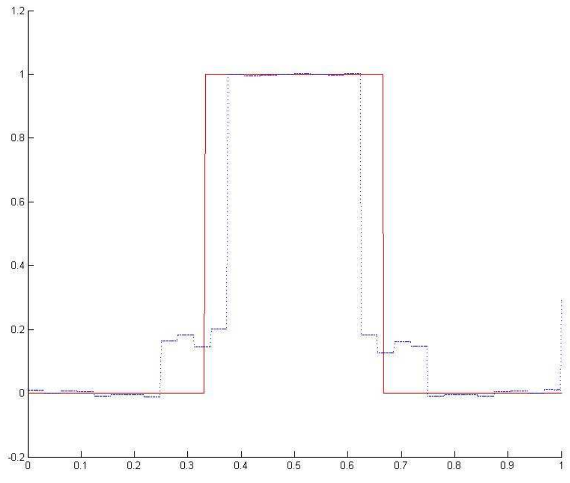

Рис. 2. Исходный сигнал (—), восстановленный сигнал (- -)

Очевидно, что предложенный алгоритм позволил подавить осцилляции Гиббса и качественно восстановил сигнал в местах, удаленных от скачков. Таким образом, определив места разрывов функции, можно достроить сигнал в местах, близких к скачку, аппроксимировав хорошо восстановленные участки.

4. Выводы

Представление искомой функции в виде базиса при решении интегральных уравнений Фредгольма I рода позволяет, в отличие от метода регуляризации Тихонова, проводить дополнительную фильтрацию сигнала. При повышении точности решения интегральных уравнений (увеличении размерности СЛАУ) целесообразно использовать современные высокоэффективные приемы параллельного программирования. Ведутся разработки в направлении использования технологии MPI и библиотеки ScaLAPACK, позволяющие существенно повысить скорость решения уравнений.

В заключение следует отметить, что фильтр, построенный на тестовом примере, как оказалось, эффективно действует и в ряде других случаев. Естественно, возникает вопрос о классификации сигналов, для которых удается качественно провести восстановление. Данный вопрос является актуальным, и ему будут посвящены дальнейшие исследования в этой области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Раутиан С.Г. Реальные спектральные приборы. – К.: УФН, 1958. – Т. 66, Вып. 3. – С. 158.
2. Василенко Г.И. Теория восстановления сигналов: О редукции к идеальному прибору в физике и технике. – М.: Советское радио, 1979. – 272 с.
3. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры. – М.: Советское радио, 1980. – 224 с.

Стаття надійшла до редакції 25.12.2007