

УДК 539.3

## ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ И ВЫЗВАННОГО ЕЮ ВИБРОРАЗОГРЕВА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В. Г. КАРНАУХОВ, Т. В. КАРНАУХОВА, В. И. КОЗЛОВ, В. К. ЛУЦ

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев*

*Получено 9.11.2000*

Рассмотрена задача о вынужденных колебаниях и виброразогреве трехслойных пьезоэлектрических оболочек вращения, составленных из среднего пассивного и двух пьезоактивных внешних слоев. Учет диссипативных свойств материала проводится на основе концепции комплексных характеристик. В случае независимых от температуры свойств материалов задача сведена к последовательному решению задачи электромеханики, вычислению диссипативной функции и решению уравнения теплопроводности с известным источником тепла. Для зависящих от температуры свойств материалов задача становится существенно нелинейной и для ее решения предложены итерационные методы в сочетании с методом конечных элементов. Подробно рассмотрена задача о колебаниях и виброразогреве трехслойной цилиндрической пьезопанели. При шарнирном опирании ее торцов для первого из указанных случаев получено аналитическое решение. Сопоставление аналитических и конечно-элементных решений свидетельствует о высокой точности и эффективности разработанного численно-аналитического метода. Для второго из указанных случаев представлены результаты расчета частотной зависимости амплитуды колебаний, температуры, коэффициентов затухания и электромеханической связи в окрестности первого резонанса. Все указанные характеристики показывают типичное для нелинейных систем поведение.

Розглянута задача про вимушені коливання і вібророзігрів тришарових п'єзоелектричних оболонок обертання, складених із середнього пасивного та двох п'єзоактивних зовнішніх шарів. Дисипативні властивості матеріалів враховуються на основі концепції комплексних характеристик. У випадку незалежних від температури властивостей матеріалів задача зведена до послідовного розв'язування задачі електромеханіки, розрахунку дисипативної функції та розв'язування рівняння теплопровідності з відомим джерелом тепла. Для залежних від температури властивостей матеріалів задача стає суттєво нелінійною і для її розв'язування запропоновані ітераційні методи в поєднанні з методом скінченних елементів. Детально розглянута задача про коливання і дисипативний розігрів тришарової циліндричної п'єзопанелі. При шарнірному закріпленні її торців для першого із вказаних випадків одержано аналітичне розв'язки. Співставлення аналітичних і скінченно-елементних розв'язків свідчить про високу точність та ефективність розробленого чисельно-аналітичного методу. Для другого із вказаних випадків представлені результати розрахунків частотної залежності амплітуди коливань, температури, коефіцієнтів затухання та електромеханічного зв'язку в околі першого резонансу. Всі ці характеристики показують типову для нелінійних систем поведінку.

The problem of vibration and vibro-heating of three-layer piezoelectric shells of revolution composed of passive inner and two outer piezoactive layers is considered. Conception of complex characteristics is used for inclusion of dissipative material properties. When the material characteristics are not dependent on temperature the problem is reduced to the solution of electromechanical problem, calculation of dissipative function and solution of problem of heat-conduction. The problem is nonlinear when the characteristics are dependent on temperature. It is solved by applying the iterative methods and the finite element method. The problem of vibration and vibro-heating of the three-layer cylindrical piezoelectric shells is considered in detail. For the first case the analytical solution of problem is found. The comparison of analytical and finite element solutions shows high precision and efficiency of the finite element solution. For the second case the results of calculations of frequency dependence of amplitude, temperature, coefficients of attenuation and electromechanical coupling are presented. The characteristics show typical behavior for the nonlinear systems.

### ВВЕДЕНИЕ

Трехслойные пьезоэлектрические оболочки вращения, состоящие из пассивного (без пьезоэффекта) среднего слоя и двух активных (с пьезоэффектом) внешних слоев широко используются в современной технике, в частности для контроля колебаний оболочек вращения из металлов, полимеров и композитов при действии на них механических и тепловых нагрузок [1–3]. Активные слои изготавливаются из пьезокерамики или пьезоактивных полимерных материалов [1–3]. Одним из наиболее распространенных режимов работы таких эле-

ментов является гармонический, в частности резонансный. При этом из-за рассеяния механической (в пассивном слое) и электромеханической (в пьезоактивном слое) энергий в тепловую в оболочке может наблюдаться существенное повышение температуры – виброразогрев. Это явление отрицательно сказывается на эффективности работы тонкостенных элементов по нескольким причинам. Во-первых, вследствие зависимости электромеханических характеристик материалов от температуры может произойти сдвиг резонансных частот, в результате чего падает интенсивность излучения акустической энергии, если пьезоэлемент

рассчитан на работу в резонансном режиме. Во-вторых, при достижении температурой виброразогрева точки Кюри пьезоматериал теряет свои активные свойства. В-третьих, при нарушении баланса между поступлением тепла в результате виброразогрева и его потерями на теплообмен с внешней средой может произойти так называемый тепловой взрыв (тепловой пробой). При этом наблюдается лавинообразное нарастание температуры виброразогрева во времени, а стационарное состояние вообще отсутствует [4, 5]. В-четвертых, из-за неоднородности температуры виброразогрева и структурной неоднородности в пьезоэлементе могут возникнуть значительные температурные напряжения, приводящие к механическому разрушению.

В статье [6] рассмотрена упрощенная постановка задачи о колебаниях и виброразогреве биморфной цилиндрической пьезопанели, когда свойства материала считаются независимыми от температуры. При этом для шарнирного закрепления торцов оболочки получено точное аналитическое решение задач электромеханики и теплопроводности с известным источником тепла, определяемым диссипативной функцией. Кроме того, проведен расчет на основе метода конечных элементов (МКЭ). Сравнение аналитического и конечно-элементного решений подтвердило высокую эффективность конечно-элементного подхода для данного класса задач.

В данной статье рассмотрена задача о вынужденных колебаниях и виброразогреве трехслойных пьезоэлектрических оболочек вращения, составленных из среднего пассивного и двух присоединенных к нему пьезоактивных слоев. Для учета диссипации энергии в материале используется концепция комплексных модулей. Дана как упрощенная постановка задачи, когда свойства материалов слоев не зависят от температуры, так и с учетом температурной зависимости свойств материалов.

В первом случае достаточно найти решение задачи электромеханики, вычислить по нему диссипативную функцию, а затем решить задачу теплопроводности с известным источником тепла, определяемым диссипативной функцией.

Во втором случае, когда действительная и мнимая составляющие комплексных характеристик зависят от температуры, задача становится существенно нелинейной. Для ее решения были использованы итерационные методы нелинейной механики – шаговый во времени метод, метод переменных параметров и его модификация – метод Стефенсона – Эйткена. Это позволило свести ис-

ходную нелинейную краевую задачу к последовательности линейных краевых задач электромеханики с неоднородными коэффициентами и краевых задач теплопроводности с известным источником тепла. Последние могут быть решены с помощью МКЭ [5, 7]. Подробно рассмотрена задача о колебаниях и виброразогреве трехслойной цилиндрической пьезопанели. Для случая независимых от температуры свойств материала при шарнирном опирании ее торцов получено аналитическое решение задач электромеханики и теплопроводности с известным источником тепла. При учете зависимости свойств материала от температуры использованы методы нелинейной механики, указанные выше, и метод конечных элементов для решения линейных краевых задач на каждой итерации. Дано сопоставление аналитических и конечно-элементных решений, свидетельствующее о высокой точности последних. С их использованием изучено влияние диссипативного виброразогрева и зависимости свойств материалов от температуры на электромеханическое и тепловое состояние пьезоэлектрических оболочек вращения, а именно, на частотную зависимость амплитуды колебаний, температуры виброразогрева, коэффициентов затухания и электромеханической связи в окрестности резонансных частот.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим трехслойную пьезоэлектрическую оболочку толщины  $h$ , составленную из среднего пассивного слоя толщиной  $h_0$  и двух пьезоэлектрических слоев с толщинами  $h_1$  и  $h_2$  соответственно. Пассивный слой в общем случае считается ортотропным, так что он, в свою очередь, может иметь слоистую структуру. Для моделирования вынужденных колебаний оболочки используем механические гипотезы Кирхгоффа – Лява [8, 9] и дополнительные гипотезы относительно электрических полевых величин [10] о малости тангенциальных составляющих векторов напряженности электрического поля и индукции по сравнению с их нормальными составляющими и постоянстве нормальной составляющей вектора индукции по толщине пьезоэлемента.

Формально электромеханическая часть постановки рассматриваемой задачи аналогична постановке, рассмотренной в статье [11]. Однако для полноты изложения представляется уместным привести ее здесь полностью. Следует особо отметить, что, в отличие от [11], коэффициенты приведенных ниже уравнений являются комплексными и зависят от температуры.

Введем связанную с оболочкой координатную систему  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  соответствуют координатным линиям, идущим в направлениях главных кривизн, а  $\gamma$  – в толщинном направлении. Тогда уравнения состояния пьезоактивных и пассивных слоев имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^k &= B_{11}^k(\gamma)(\varepsilon_1 + \gamma\kappa_1) + \\ &+ B_{12}^k(\gamma)(\varepsilon_2 + \gamma\kappa_2) - \gamma_{31}^k(\gamma)E_\gamma, \\ \sigma_\beta^k &= B_{12}^k(\gamma)(\varepsilon_1 + \gamma\kappa_1) + \\ &+ B_{22}^k(\gamma)(\varepsilon_2 + \gamma\kappa_2) - \gamma_{31}^k(\gamma)E_\gamma, \\ \sigma_{\alpha\beta}^k &= B_{66}^k(\gamma)(\varepsilon_{12} + \gamma\kappa_{12}), \\ D_\gamma^k &= \gamma_{33}^k(\gamma)E_\gamma + \gamma_{31}^k(\gamma) \times \\ &\times [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma(\kappa_1 + \kappa_2)], \\ &k = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее используются традиционные обозначения физических полей и материальных констант [8, 10]. Для пассивного слоя полагается  $\gamma_{31}^0 = 0$ , если он диэлектрический, и дополнительно  $\gamma_{33}^0 \rightarrow \infty$ , если он металлический. При этом величины  $B_{ij}^0$  определяются по известным формулам теории анизотропных оболочек [8, 9]. Для описания диссипативных свойств материалов принята концепция комплексных характеристик, так что в (1) и ниже все электромеханические характеристики – комплексные. Кроме того, они могут зависеть от температуры виброразогрева.

Согласно [10], для пьезоактивных поляризованных по толщине слоев имеем

$$\begin{aligned} B_{11}^k(\gamma) &= B_{22}^k(\gamma) = 1/S_{11}^k(\gamma)[1 - \nu^k(\gamma)], \\ B_{12}^k(\gamma) &= \nu^k(\gamma)B_{11}^k(\gamma), \\ B_{66}^k(\gamma) &= [1 - \nu^k(\gamma)]B_{11}^k(\gamma), \\ \gamma_{33}^k &= \varepsilon_{33}^k [1 - \nu^k(\gamma)], \\ \gamma_{31}^k &= d_{31}^k(\gamma)/S_{11}^k(\gamma)[1 - \nu^k(\gamma)], \\ k_p^k &= 2d_{31}^k(\gamma)/\varepsilon_{33}^k(\gamma)S_{11}^k(\gamma)[1 - \nu^k(\gamma)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим первый случай: между пассивным и пьезоактивными слоями нанесены бесконечно

тонкие электроды. Такие же электроды имеются и на внешних поверхностях оболочки. К каждому из слоев приложена изменяющаяся по гармоническому закону разность потенциалов  $V_k^0 \cos \omega t$  ( $k=0, 1, 2$ ). Индукцию  $D_\gamma^k$  считаем постоянной по толщине пьезослоев [10], так что

$$D_\gamma^k = C^k(\alpha, \beta). \quad (3)$$

При этом

$$E_\gamma^k = \frac{1}{\gamma_{33}^k(\gamma)} \{ C^k - \gamma_{31}^k(\gamma)[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma(\kappa_1 + \kappa_2)] \}. \quad (4)$$

Интегрируя соотношение (4) по толщине пьезослоев, имеем

$$C^k = \frac{1}{v_0^k} [-V_k^0 + v_1^k(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + v_2^k(\kappa_1 + \kappa_2)], \quad (5)$$

$$k = 0, 1, 2.$$

Подставляя этот результат в формулу (4), а полученное выражение для  $E_\gamma^k$  – в уравнения (1), находим

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^k &= B_{11}^k(\gamma)(\varepsilon_1 + \gamma\kappa_1) + \\ &+ B_{12}^k(\gamma)(\varepsilon_2 + \gamma\kappa_2) + \sigma_0^k, \\ \sigma_\beta^k &= B_{12}^k(\gamma)(\varepsilon_1 + \gamma\kappa_1) + \\ &+ B_{22}^k(\gamma)(\varepsilon_2 + \gamma\kappa_2) + \sigma_0^k, \\ \sigma_{\alpha\beta}^k &= B_{66}^k(\gamma)(\varepsilon_{12} + \gamma\kappa_{12}), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_0^k &= \frac{\gamma_{31}^k}{\gamma_{33}^k(\gamma)} \left\{ \left[ \gamma_{31}^k(\gamma) - \frac{v_1^k}{v_0^k} \right] (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \right. \\ &+ \left. \left[ \gamma_{31}^k(\gamma) - \frac{v_2^k}{v_0^k} \right] (\kappa_1 + \kappa_2) + \frac{V_0^k}{v_0^k} \right\}. \end{aligned}$$

Интегрируя соотношения (6) по толщине оболочки, учитывая расположение электродов и считая  $V_0^0 = 0$ , получаем определяющие уравнения для

трехслойной пьезооболочки:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + \\
 &\quad + K_{11}\kappa_1 + K_{12}\kappa_2 + \overset{\circ}{N}, \\
 N_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + \\
 &\quad + K_{12}\kappa_1 + K_{22}\kappa_2 + \overset{\circ}{N}, \\
 M_1 &= K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2 + \\
 &\quad + D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2 + \overset{\circ}{M}, \\
 M_2 &= K_{12}\varepsilon_1 + K_{22}\varepsilon_2 + \\
 &\quad + D_{12}\kappa_1 + D_{22}\kappa_2 + \overset{\circ}{M}, \\
 S &= C_{66}\varepsilon_{12} + K_{66}\kappa_{12}, \\
 H &= K_{66}\varepsilon_{12} + D_{66}\kappa_{12}.
 \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\overset{\circ}{N} = \frac{v_1}{v_0} \overset{1}{V}_0 + \frac{v_2}{v_0} \overset{2}{V}_0; \quad \overset{\circ}{M} = \frac{v_1}{v_0} \overset{1}{V}_0 + \frac{v_2}{v_0} \overset{2}{V}_0;$$

$$\begin{aligned}
 (C_{66}, K_{66}, D_{66}) &= \int_{(h)} B_{66}(\gamma) \cdot (1, \gamma, \gamma^2) d\gamma; \\
 C_{ij} &= \int_{(h)} B_{ij}(\gamma) d\gamma + \overset{1}{v}_3 + \overset{2}{v}_3 - \frac{\overset{12}{v}_1}{v_0} - \frac{\overset{22}{v}_1}{v_0}; \\
 K_{ij} &= \int_{(h)} B_{ij}(\gamma) \gamma d\gamma + \overset{1}{v}_4 + \overset{2}{v}_4 - \frac{\overset{11}{v}_1 \overset{1}{v}_2}{v_0} - \frac{\overset{21}{v}_1 \overset{2}{v}_2}{v_0}; \\
 D_{ij} &= \int_{(h)} B_{ij}(\gamma) \gamma^2 d\gamma + \overset{1}{v}_5 + \overset{2}{v}_5 - \frac{\overset{12}{v}_1}{v_0} - \frac{\overset{22}{v}_1}{v_0};
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$i, j = 1, 2.$$

где

$$\begin{aligned}
 \overset{k}{v}_0 &= \int_{(hk)} \frac{1}{\overset{k}{\gamma}_{33}} d\gamma; \\
 \overset{k}{v}_{(1,2)} &= \int_{(hk)} \frac{\overset{k}{\gamma}_{31} \cdot (1, \gamma)}{\overset{k}{\gamma}_{33}} d\gamma; \\
 \overset{k}{v}_{(3,4,5)} &= \int_{(hk)} \frac{\overset{k2}{\gamma}_{31} \cdot (1, \gamma, \gamma^2)}{\overset{k}{\gamma}_{33}} d\gamma.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим второй случай: электроды между пассивным диэлектрическим и пьезоактивными слоями отсутствуют. К внешним электродам

подведена разность потенциалов  $\overset{\circ}{V} \cos \omega t$ . Тогда нормальная составляющая индукции постоянна по всей толщине оболочки:

$$\overset{k}{D}_\gamma = C(\alpha, \beta). \tag{10}$$

При этом

$$(7) \quad \overset{k}{E}_\gamma = \frac{1}{\overset{k}{\gamma}_{33}(\gamma)} (C - \overset{k}{\gamma}_{31}(\gamma)) [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma(\kappa_1 + \kappa_2)]. \tag{11}$$

Интегрируя уравнение (11) по толщине оболочки  $h$ , находим

$$C = \frac{1}{v_0} \left[ -\overset{\circ}{V} + v_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + v_2(\kappa_1 + \kappa_2) \right]. \tag{12}$$

Подставив выражение (12) в формулу (11), а результат для  $\overset{k}{E}_\gamma$  – в уравнения (1), придем к соотношениям типа (6), в которых

$$\begin{aligned}
 \overset{k}{\sigma}_0 &= \frac{\overset{k}{\gamma}_{31}}{\overset{k}{\gamma}_{33}(\gamma)} \left\{ \left[ \overset{k}{\gamma}_{31}(\gamma) - \frac{v_1}{v_0} \right] (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \overset{k}{\gamma}_{31}(\gamma) - \frac{v_2}{v_0} \right] (\kappa_1 + \kappa_2) + \frac{\overset{\circ}{V}}{v_0} \right\}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Учитывая равенство (13), после интегрирования соотношений (6) по толщине оболочки получаем определяющие уравнения для трехслойной пьезооболочки вида (7), где

$$\overset{\circ}{N} = \frac{v_1}{v_0} \overset{\circ}{V}; \quad \overset{\circ}{M} = \frac{v_2}{v_0} \overset{\circ}{V};$$

$$\begin{aligned}
 (C_{66}, K_{66}, D_{66}) &= \int_{(h)} B_{66} \cdot (1, \gamma, \gamma^2) d\gamma; \\
 C_{ij} &= \int_{(h)} B_{ij}(\gamma) d\gamma + v_3 - \frac{v_1^2}{v_0}; \\
 K_{ij} &= \int_{(h)} B_{ij}(\gamma) \gamma d\gamma + v_4 - \frac{v_1 v_2}{v_0}; \\
 D_{ij} &= \int_{(h)} B_{ij}(\gamma) \gamma^2 d\gamma + v_5 - \frac{v_2^2}{v_0}; \\
 &\quad i, j = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{14}$$

В формулах (13) и (14)

$$\begin{aligned} v_0 &= \int_{(h)} \frac{1}{\gamma_{33}^k} d\gamma; \\ v_{(1,2)} &= \int_{(h)} \frac{\gamma_{31}^k \cdot (1, \gamma)}{\gamma_{33}^k} d\gamma; \\ v_{(3,4,5)} &= \int_{(h)} \frac{\gamma_{31}^{k2} \cdot (1, \gamma, \gamma^2)}{\gamma_{33}^k} d\gamma. \end{aligned} \quad (15)$$

В случае пьезоактивных слоев, имеющих одинаковую толщину, одинаковые электромеханические свойства и противоположные направления поляризации  $\overset{2}{\gamma}_{31} = -\overset{1}{\gamma}_{31}$  ( $\overset{1}{\gamma}_{31} \geq 0$ ), получаем следующие выражения для электромеханических характеристик уравнений состояния:

- 1) при наличии электродов между пассивным и пьезоактивными слоями, к которым подведены разности потенциалов  $\overset{1}{V}_1 = \overset{2}{V}_2 = \overset{0}{V}$ ,  $\overset{0}{V}_0 = 0$ ,

$$\begin{aligned} C_{ij} &= h_0 \overset{0}{B}_{ij} + 2h_1 \overset{1}{B}_{ij}, \\ D_{ij} &= \tilde{D}_{ij} - \frac{1}{2} \frac{\overset{12}{\gamma}_{31}}{\overset{1}{\gamma}_{33}} h_1 (h_1 + h_0)^2, \\ \overset{0}{M} &= \overset{1}{\gamma}_{31} (h_1 + h_0) \overset{0}{V}, \\ K_{ij} &= 0, \quad \overset{0}{N} = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

- 2) при отсутствии электродов

$$\begin{aligned} C_{ij} &= h_0 \overset{0}{B}_{ij} + 2h_1 \left( \overset{1}{B}_{ij} + \frac{\overset{12}{\gamma}_{31}}{\overset{1}{\gamma}_{33}} \right), \\ D_{ij} &= \tilde{D}_{ij} - \frac{1}{2} \frac{\overset{12}{\gamma}_{31}}{\overset{1}{\gamma}_{33}} \frac{h_1^2 (h_0 + h_1)^2 \overset{0}{\gamma}_{33}}{h_0 \overset{1}{\gamma}_{33} + 2h_1 \overset{0}{\gamma}_{33}}, \\ \overset{0}{M} &= \frac{\overset{1}{\gamma}_{31} h_1 (h_0 + h_1) \overset{0}{\gamma}_{33}}{h_0 \overset{1}{\gamma}_{33} + 2h_1 \overset{0}{\gamma}_{33}} \overset{0}{V}_0, \\ K_{ij} &= 0, \quad \overset{0}{N} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь и далее

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ij} &= \frac{h_0^3}{12} \overset{0}{B}_{ij} + \left( \frac{2}{3} \overset{1}{B}_{ij} + \frac{\overset{12}{\gamma}_{31}}{\overset{1}{\gamma}_{33}} \right) \times \\ &\times \left[ \left( \frac{h_0}{2} + h_1 \right)^3 - \left( \frac{h_0}{2} \right)^3 \right]. \end{aligned}$$

Если же пьезоактивные слои имеют равные толщины, одинаковые свойства и поляризацию ( $\overset{1}{\gamma}_{31} = \overset{2}{\gamma}_{31}$ ), то характеристики пьезооболочки определяются по следующим формулам:

- 1) при наличии электродов между пассивным и пьезоактивными слоями

$$\overset{0}{N} = 2\overset{1}{\gamma}_{31} \overset{0}{V}_1, \quad \overset{0}{M} = 0, \quad (18)$$

а  $C_{ij}, K_{ij}, D_{ij}$  имеют вид (16);

- 2) при отсутствии электродов

$$\begin{aligned} C_{ij} &= h_0 \overset{0}{B}_{ij} + 2h_1 \left( \overset{1}{B}_{ij} + \frac{\overset{12}{\gamma}_{31}}{\overset{1}{\gamma}_{33}} \right) - \\ &- 4 \frac{\overset{12}{\gamma}_{31}}{\overset{1}{\gamma}_{33}} \frac{h_1^2 \overset{0}{\gamma}_{33} \overset{1}{\gamma}_{33}}{h_0 \overset{1}{\gamma}_{33} + 2h_1 \overset{0}{\gamma}_{33}}, \\ \overset{0}{N} &= 2 \frac{\overset{1}{\gamma}_{31}}{\overset{1}{\gamma}_{33}} \frac{h_1^2 \overset{0}{\gamma}_{33} \overset{1}{\gamma}_{33}}{h_0 \overset{1}{\gamma}_{33} + 2h_1 \overset{0}{\gamma}_{33}} \overset{0}{V}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$D_{ij} = \tilde{D}_{ij}, \quad K_{ij} = 0, \quad \overset{0}{M} = 0.$$

Из представленных формул видно, что наличие или отсутствие электродов между пассивным и пьезоактивными слоями влияет на жесткостные характеристики оболочки и электрическую нагрузку.

Определяющие уравнения (7) по форме совпадают с определяющими уравнениями термоупругости оболочек [9, 12, 13], хотя и описывают совершенно другой физический процесс. Эта формальная аналогия позволяет перенести многие результаты, полученные в термоупругости оболочек без пьезоэффекта, на задачи о колебаниях пьезооболочки. Остальные уравнения – кинематические соотношения и уравнения движения (линейные или нелинейные), а также граничные условия – носят универсальный характер, не зависящий от определяющих уравнений, и имеют известный из теории оболочек вид [8, 9].

При оценке влияния типа электрических граничных условий на вынужденные колебания и виброзагрыв при механическом периодическом нагружении оболочки необходимо получить определяющие уравнения для двух крайних случаев: когда электроды закорочены и когда они разомкнуты.

1. В случае закороченных электродов во всех представленных выше соотношениях необходимо положить  $\overset{0}{V}_k = 0$  ( $k = 0, 1, 2$ ) при наличии

электродов между пассивным и пьезоактивными слоями и  $V^0 = 0$  при их отсутствии.

2. Для разомкнутых электродов при выводе определяющих соотношений для трехслойной пьезооболочки необходимо положить  $D_\gamma^k = 0$  при наличии электродов и  $C(\alpha, \beta) = 0$  при их отсутствии. В обоих случаях это приводит к соотношению

$$E_\gamma^k = -\frac{\gamma_{31}^k}{\gamma_{33}^k} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma(\kappa_1 + \kappa_2)]. \quad (20)$$

При этом в жесткостных характеристиках необходимо положить  $v_1^k = v_2^k = 0$  либо  $v_1 = v_2 = 0$  в зависимости от наличия или отсутствия бесконечно тонких электродов между пассивным и пьезоактивными слоями. Ненулевые величины  $v_{3,4,5}^k$  или  $v_{3,4,5}$  определяются по формулам (9) и (15).

К представленным выше уравнениям необходимо добавить уравнение энергии, которое для периодических процессов имеет вид обычного уравнения энергии с источником тепла, определяемом диссипацией [5]. Диссипативные функции для пассивного и пьезоактивного слоев определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{W} &= \frac{\omega}{2} (\overset{\circ}{\sigma}_{mn}'' \varepsilon_{mn}' - \overset{\circ}{\sigma}_{mn}' \varepsilon_{mn}''), \\ \overset{k}{W} &= \frac{\omega}{2} (\overset{k}{\sigma}_{mn}'' \varepsilon_{mn}' - \overset{k}{\sigma}_{mn}' \varepsilon_{mn}'' - \\ &\quad - D_m'' E_m^k + D_m^k E_m''), \end{aligned} \quad (21)$$

$k = 1, 2.$

Здесь и далее  $(\cdot)'$  и  $(\cdot)''$  означают действительную и мнимую части комплексной величины  $(\cdot)$  соответственно.

Для получения двумерных уравнений энергии для оболочки вращения, по аналогии с [14, 15], примем гипотезу о степенном законе изменения нормальной составляющей теплового потока  $q_3$  по толщине:

$$q_3 = \sum_{\nu=1}^N a_\nu(\alpha, \beta, t) \gamma^{\nu-1}. \quad (22)$$

При таком выборе автоматически удовлетворяются условия непрерывности теплового потока между слоями оболочки. Граничные условия для тем-

пературы  $\theta$  имеют вид

$$\begin{aligned} -\lambda_{33} \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} + \alpha_3(\theta - \theta^-) &= 0 \\ \text{при } \gamma &= -\frac{h_0}{2} - h_2, \\ \lambda_{33} \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} + \alpha_4(\theta - \theta^+) &= 0 \\ \text{при } \gamma &= \frac{h_0}{2} + h_1, \\ \lambda_n \frac{\partial \theta}{\partial n} + \alpha_L(\theta - \theta^L) &= 0 \\ \text{на } L. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь  $\theta^-$ ,  $\theta^+$  и  $\theta^L$  – значения температуры на указанных поверхностях соответственно;  $L$  – внешний контур пластинки.

Интегрируя по  $\gamma$  выражение

$$q_3 = -\lambda_{33}(\gamma) \frac{\partial \theta}{\partial \gamma}, \quad (24)$$

получаем

$$\theta = \sum_{\nu=0}^N P_\nu(\gamma) \theta_\nu(\alpha, \beta, t), \quad (25)$$

где  $\theta_\nu$  – неизвестные функции;  $P_\nu$  – функции распределения температуры по толщине оболочки:

$$P_0(\gamma) = 1,$$

$$\begin{aligned} P_\nu(\gamma) &= \lambda_{33}/h^{\nu+1} \int_{-h_0/2-h_2}^{\gamma} \lambda_{33}^{-1}(\gamma) \gamma^{\nu-1} d\gamma, \\ \theta_0 &= \theta_0(\alpha, \beta, t), \\ \theta_\nu(\alpha, \beta, t) &= -a_\nu h^{\nu+1} / \bar{\lambda}_{33}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь  $(\bar{\cdot})$  обозначает интегральную характеристику вида

$$(\bar{\cdot}) = \int_{(h)} (\cdot) d\gamma.$$

Двумерные уравнения энергии получаем, умножая уравнение энергии

$$(\lambda_{mn} \theta_{,m})_{,n} + W = c \dot{\theta},$$

$$W = \overset{\circ}{W} + \overset{1}{W} + \overset{2}{W}$$

на  $P_\nu(\gamma) d\gamma$  ( $\nu=0, 1, \dots, N$ ) и интегрируя последнее выражение по толщине оболочки. В уравнении энергии запятая перед индексом означает дифференцирование по соответствующей пространственной координате, а повторяющиеся индексы – суммирование от 1 до 3. В результате

имеем систему дифференциальных уравнений порядка  $N+1$  относительно  $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N)^T$ :

$$K\theta = R\theta^* - W^*.$$

Здесь

$$\theta^* = (\theta^-, \theta^+);$$

$$W^* = (W_0, W_1, \dots, W_N)^T;$$

$$W_m = \int_{(h)} WP_m(\gamma)d\gamma;$$

операторы  $K, R$  представлены в работах [14, 15]. Аналогично получаем и двумерные граничные и начальные условия [14, 15].

В дальнейшем ограничимся случаем постоянства температуры  $\theta_0$  по толщине оболочки, когда  $q_3 \equiv 0$ . При этом диссипативная функция имеет вид

$$W = \frac{\omega}{2} (N_1''\varepsilon_1' - N_1'\varepsilon_1'' + N_2''\varepsilon_2' - N_2'\varepsilon_2'' + S''\varepsilon_{12}' - S'\varepsilon_{12}'' + M_1''\kappa_1' - M_1'\kappa_1'' + M_2''\kappa_2' - M_2'\kappa_2'' + H''\kappa_{12}' - H'\kappa_{12}'' + \sum_k \overset{k}{C}V_0),$$

а осредненное по толщине оболочки уравнение энергии [12] –

$$\Delta\theta_0 - \frac{2\gamma_0}{h^2}(\theta_0 - \overset{\circ}{\theta}) + \frac{W}{h\lambda} = \frac{\bar{c}}{h\lambda}\dot{\theta}_0. \quad (27)$$

В этом уравнении под оператором Лапласа понимаем

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Граничные и начальные условия для  $\theta_0$  представлены в [12]. В дальнейшем будем считать, что тангенсы угла потерь в пассивных и активных слоях одинаковы.

Используя представленные выше уравнения состояния, уравнения движения, кинематические соотношения и уравнения энергии, получаем замкнутую систему уравнений относительно перемещений  $u, v, w$  и температуры  $\theta_0$  со стандартными граничными и начальными для температуры условиями. В качестве примера покажем, как выглядит эта замкнутая система уравнений для трехслойной цилиндрической пьезопанели  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ , симметричной относительно срединной поверхности структуры с изотропным пассивным слоем. Согласно технической теории,

уравнения движения и неразрывности деформаций имеют вид [8]

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{N_2}{R} + \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + \tilde{N} - \tilde{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\rho = \rho_0 h_0 + 2\rho_1 h_1.$$

Введением функции усилий

$$N_1 = h\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad N_2 = h\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad (29)$$

$$S = -h\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

тождественно удовлетворим первым двум уравнениям системы (28). Разрешив уравнения состояния (7) относительно деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ , используя (29), из уравнений (28) для случая независимости от температуры свойств оболочки получим систему

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2(D_{12} + D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} - \frac{h}{R}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \tilde{N} + \rho\ddot{w} = 0, \quad (30)$$

$$A_{11}\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - 2(A_{12} + A_{66})\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{22}\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{1}{hR}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

где

$$A_{11} = \frac{C_{22}}{\Delta}; \quad A_{12} = \frac{C_{12}}{\Delta}; \quad A_{22} = \frac{C_{11}}{\Delta};$$

$$A_{66} = \frac{1}{C_{66}}; \quad \Delta = C_{11}C_{22} - C_{12}^2.$$

Запись различных типов граничных условий представлена, например, в [8, 9]. Для теплоизолированных торцов тепловые граничные условия

имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_0}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } x = 0, a, \\ \frac{\partial \theta_0}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } y = 0, b. \end{aligned}$$

Начальное условие запишется в форме

$$\theta_0 = \theta^0 \quad \text{при } t = 0.$$

Для симметричной относительно срединной поверхности структуры, когда средний слой изотропен, а свойства пьезоактивных слоев одинаковы, за исключением того, что они имеют противоположное направление поляризации, система уравнений (30) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \Delta \Delta \Phi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \\ D_M \Delta \Delta w - \frac{h}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \omega^2 w &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь

$$E = D_N(1 - \nu_N^2)/h;$$

$$\begin{aligned} D_N &= \overset{\circ}{B}_{11} h_0 + 2 \overset{\circ}{B}_{11} h_1 \left[ 1 + \frac{1 + \overset{\circ}{\nu}}{2} \frac{(k_p)^2}{1 - (k_p)^2} \right]; \\ \nu_N D_N &= \left\{ \overset{\circ}{B}_{12} h_0 + 2 \overset{\circ}{B}_{11} h_1 \left[ \overset{\circ}{\nu} + \frac{1 + \overset{\circ}{\nu}}{2} \frac{(k_p)^2}{1 - (k_p)^2} \right] \right\}; \\ D_M &= \overset{\circ}{B}_{11} h_0^3 / 12 + \frac{1}{2} \overset{\circ}{B}_{11} h_1 \left[ (h_0 + h_1)^2 + \frac{1}{3} h_1^2 \right] \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{1 + \overset{\circ}{\nu}}{2} \frac{(k_p)^2}{1 - (k_p)^2} \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{h_1^2}{(h_0 + h_1)^2}} \right) \right]; \\ \nu_M D_M &= \overset{\circ}{B}_{12} h_0^3 / 12 + \frac{1}{2} \overset{\circ}{B}_{11} h_1 \left[ (h_0 + h_1)^2 + \frac{1}{3} h_1^2 \right] \times \\ &\times \left[ \nu_1 + \frac{1 + \overset{\circ}{\nu}}{2} \frac{(k_p)^2}{1 - (k_p)^2} \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{h_1^2}{(h_0 + h_1)^2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Для шарнирного закрепления краев оболочки граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} w &= 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = M_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ v &= 0 \quad \text{при } x = 0, a, \\ w &= 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = M_0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ u &= 0 \quad \text{при } y = 0, b, \end{aligned}$$

где

$$M_0 = M^0 / D_M, \quad M^0 = \frac{\overset{\circ}{d}_{31} V_0 (h_0 + h_1)}{\overset{\circ}{S}_{11} (1 - \overset{\circ}{\nu})};$$

$V_0$  – разность потенциалов, подведенная к пьезоактивным слоям:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{V}_0 &= 0; \quad \overset{\circ}{V}_0 = \overset{\circ}{V}_0 = V_0; \\ \overset{\circ}{\nu} &= -\overset{\circ}{S}_{12} / \overset{\circ}{S}_{11}. \end{aligned}$$

## 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Как указывалось выше, в случае независимых от температуры свойств материала задача сводится к решению задачи электромеханики, вычислению диссипативной функции и решению задачи теплопроводности с известным источником тепла. Задача электромеханики решается с учетом диссипации, когда частота электромеханического нагружения близка к собственным частотам колебаний оболочки. В квазистатическом случае она может быть решена без учета диссипации, т. е. в упругой постановке, хотя при расчете температурного поля диссипация и учитывается. Такой упрощенный подход дает достаточно точные результаты [5, 7]. При решении каждой из перечисленных задач могут быть использованы как аналитические, так и численные методы.

Проиллюстрируем описанный подход на примере задачи о вынужденных колебаниях цилиндрической пьезопанели. Представим полный прогиб в виде

$$w = w_s + w_d. \quad (32)$$

Составляющая  $w_s$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Delta w_s = 0 \quad (33)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} w_s &= 0, \quad \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = M_0 \quad \text{при } x = 0, a, \\ w_s &= 0, \quad \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = M_0 \quad \text{при } y = 0, b. \end{aligned} \quad (34)$$

Решение краевой задачи (33), (34) имеет вид

$$w_s = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} w_{mn}^s \sin(k_m x) \sin(p_n y), \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} w_{mn}^s &= -\frac{16 M_0}{ab k_m p_n (k_m^2 + p_n^2)}, \\ k_m &= \frac{m\pi}{a}, \quad p_n = \frac{n\pi}{b}. \end{aligned} \quad (36)$$



Решение задачи (33), (34) может быть получено и в одинарных рядах Фурье [13]. Учитывая соотношения (32), (33), для  $w_d$  и  $\Phi$  получим краевую задачу с однородными граничными условиями:

$$\frac{1}{E}\Delta\Delta\Phi + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w_d}{\partial x^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = 0, \quad (37)$$

$$D_M\Delta\Delta w_d - \frac{h}{R}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho\omega^2(w_s + w_d) = 0,$$

$$w_d = 0, \quad \frac{\partial^2 w_d}{\partial x^2} = 0,$$

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, a, \quad (38)$$

$$w_d = 0, \quad \frac{\partial^2 w_d}{\partial y^2} = 0,$$

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, b.$$

Решение представляется в виде двойных тригонометрических рядов

$$w_d = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} w_{mn}^d \sin(k_m x) \sin(p_n y), \quad (39)$$

$$\Phi = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \Phi_{mn} \sin(k_m x) \sin(p_n y).$$

Их коэффициенты вычисляются по формулам

$$w_{mn}^d = \frac{[\rho\omega_{mn}^2 k_{mn} - k_m^4 hE/R^2] w_{mn}^s}{D_M k_{mn}^2 + hE k_m^4 / R^2 - \rho\omega^2 k_{mn}}, \quad (40)$$

$$\Phi_{mn} = (w_{mn}^s + w_{mn}^d) E / (R k_{mn}),$$

$$k_{mn} = (k_m^2 + p_n^2)^2.$$

Собственные частоты находятся как

$$\rho\omega_{mn}^2 = D'_M k_{mn} + \frac{hE' k_m^4}{R^2 k_{mn}}. \quad (41)$$

Полный прогиб на собственной частоте –

$$w_{mn} = \frac{(D''_M - iD'_M) k_{mn}^2 w_{mn}^s}{D''_M k_{mn}^2 + h k_m^4 E'' / R^2}. \quad (42)$$

При этом

$$\Phi_{mn} = (E' + iE'') k_m^2 w_{mn} / R. \quad (43)$$

Стационарное уравнение энергии (27) с учетом малости мнимых составляющих по сравнению с действительными может быть записано в виде

$$\Delta\theta - k^2\theta + \frac{W}{h\lambda} = 0, \quad (44)$$

$$\theta = \theta_0 - \theta^0, \quad k^2 = \frac{2\gamma_0}{h^2}.$$

На резонансной частоте, когда удерживается одна гармоника,

$$W = W_0 + W_1 \cos(2k_m x) + W_2 \cos(2p_n y) + W_{11} \cos(2k_m) \cos(2p_n y), \quad (45)$$

где

$$W_k = \bar{W}_k \left(\frac{V_0}{h}\right)^2;$$

$$\bar{W}_0 = \frac{\omega}{8} \left[ h^2 J'' \Phi_{mn}^2 k_{mn}^2 + \right.$$

$$\left. + D''_M w_0^2 \left(\frac{D'_M}{D''_M}\right)^2 k_{mn}^2 - 4\varepsilon_{33}'' (1 - k_p^2) h \right];$$

$$\bar{W}_1 = \bar{W}_2 =$$

$$= -\frac{\omega}{8} \left[ h^2 J'' \Phi_{mn}^2 ((k_m^2 - p_n^2)^2 - 4\nu_M k_m^2 p_n^2) + \right. \quad (46)$$

$$\left. + D''_M w_0^2 \left(\frac{D'_M}{D''_M}\right)^2 (k_m^2 - p_n^2)^2 + 4\nu_M k_m^2 p_n^2 \right];$$

$$\bar{W}_{11} = \bar{W}_0 + \frac{\omega}{2} \varepsilon_{33}'' (1 - k_p^2);$$

$$w_0 = \frac{48(1 + \nu) d_{31}}{abk_m p_n k_{mn} h \left(1 + \frac{1 + \nu}{2} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2}\right)};$$

$$J = \frac{1}{D_N (1 - \nu_N^2)}.$$

При выводе уравнений (46) предполагалось, что все тангенсы углов потерь материалов одинаковы.

Решение уравнения теплопроводности (44) для случая теплоизолированных торцов имеет вид

$$\theta = \frac{1}{h\lambda} \left( \frac{W_0}{k^2} + \frac{W_1}{k^2 + 4k_m^2} \cos(2k_m x) + \frac{W_2}{k^2 + 4p_n^2} \cos(2p_n y) + \frac{W_{11}}{k^2 + 4k_m^2 + 4p_n^2} \cos(2k_m x) \cos(2p_n y) \right). \quad (47)$$

Можно показать, что абсолютный максимум температуры достигается в точке  $(a/2, b/2)$  и равен

$$\theta_{\max} = \frac{1}{h\lambda} \left( \frac{W_0}{k^2} - \frac{W_1}{k^2 + 4k_m^2} - \frac{W_2}{k^2 + 4p_n^2} + \frac{W_{11}}{k^2 + 4k_m^2 + 4p_n^2} \right). \quad (48)$$

Если считать, что при достижении температурой точки Кюри  $\theta_K$  хотя бы в одной точке пьезоэлемент теряет свои электромеханические свойства (“разрушается”), то критическое значение параметра нагружения определяется формулой

$$\left(\frac{V_0}{h}\right)_{kr}^2 = h\lambda\theta_K \left( \frac{\bar{W}_0}{k^2} - \frac{\bar{W}_1}{k^2 + 4k_m^2} - \frac{\bar{W}_1}{k^2 + 4p_n^2} + \frac{\bar{W}_{11}}{k^2 + 4k_m^2 + 4p_n^2} \right)^{-1}. \quad (49)$$

В зависимости от уровня нагружения, условий теплообмена, диссипативных характеристик материалов возникает необходимость в учете зависимости свойств материалов слоев от температуры. При этом, как указывалось выше, задача становится существенно нелинейной. Для ее решения используются методы нелинейной механики, сводящие исходную нелинейную краевую задачу к решению на каждой итерации линейных задач электромеханики для оболочек с комплексными характеристиками и задач теплопроводности с известным источником тепла, определяемым диссипативной функцией. Каждая из этих линейных задач решается методом конечных элементов. Согласно ему задача электромеханики с переменными комплексными коэффициентами эквивалентна вариационному уравнению

$$\delta \mathcal{E} = 0.$$

Обратимся к конкретным примерам. Так, для рассмотренной выше цилиндрической оболочки

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_S \left\{ D_N [\varepsilon_1^2 + 2\nu_N \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + 2(1-\nu_N)\varepsilon_{12}^2] + D_M [\kappa_1^2 + 2\nu_M \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2 + 2(1-\nu_M)\kappa_{12}^2] - \omega^2 \tilde{\rho} w^2 - D_M M_0 (\kappa_1 + \kappa_2) \right\} dS. \quad (50)$$

При решении задачи прогиб в пределах элемента аппроксимировался полиномами Эрмита [6]

$$w = \sum_{m=1}^4 L_m w_m + \sum_{m=1}^4 L_{m+4} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_m + \sum_{m=1}^4 L_{m+8} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_m + \sum_{m=1}^4 L_{m+12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_m, \quad (51)$$

а тангенциальные составляющие вектора перемещений и геометрические параметры оболочки –

полиномами третьей степени

$$u = \sum_{m=1}^{12} N_m u_m, \quad v = \sum_{m=1}^{12} N_m v_m, \quad (52)$$

$$x = \sum_{m=1}^{12} N_m x_m, \quad y = \sum_{m=1}^{12} N_m y_m.$$

В соотношениях (51), (52)  $w_m, \dots, y_m$  – значения нормальных и тангенциальных составляющих вектора перемещений и их производных, а также координат в узловых точках;  $L_m, N_m$  – аппроксимирующие функции. Используя обычную технику МКЭ, для определения комплексных значений составляющих вектора перемещений получаем систему линейных алгебраических уравнений, комплексные коэффициенты которой выражаются через электромеханические характеристики материалов и геометрические параметры оболочки:

$$(K - \omega^2 M)U \left[ w_m, \dots, \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_m \right] = P(M_0). \quad (53)$$

Матрицы масс и жесткостей  $M$  и  $K$  являются симметричными и имеют редко заполненную структуру, характерную для МКЭ. Это позволило разработать эффективный алгоритм решения комплексных систем большой размерности с использованием метода Гаусса. Так как диссипативные свойства материала существенно не влияют на резонансные частоты, то последние находились в рамках упругой постановки задачи, когда мнимые составляющие комплексных характеристик полагаются равными нулю. Алгоритм определения резонансных частот базировался на контроле знака определителя

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (54)$$

и методе половинного деления интервала, в котором находится собственное число. Для сокращения расчетного времени был реализован также алгоритм определения резонансных частот с помощью решения задачи о вынужденных колебаниях рассматриваемой оболочки, возбуждаемой как механически, так и электрически. Такой алгоритм позволяет найти и резонансные частоты, и формы собственных колебаний.

Краевые задачи теплопроводности решались на той же сетке конечных элементов, что и задачи электромеханики. При этом коэффициенты разложения температуры в степенной ряд, температура внешней среды, начальная температура, коэффициенты теплопроводности, мощность источников тепла аппроксимировались выражениями типа (52). В результате использования МКЭ была

получена система обыкновенных дифференциальных уравнений по временной координате. Для ее решения использовалась конечно-разностная схема Кренка–Никольсена второго порядка точности, а также неявная конечно-разностная схема первого порядка точности. Полученные системы линейных алгебраических уравнений решались методом Гаусса.

Описанный подход позволяет вычислить как локальные характеристики термомеханического процесса колебаний, так и некоторые важные интегральные характеристики (коэффициент затухания и электромеханической связи). Коэффициент затухания вводится как отношение диссипированной за цикл электромеханической энергии  $W$  к полной накопленной за цикл энергии  $2U$ :

$$K_a = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\int_V W dv}{\int_V U dv}. \quad (55)$$

Упрощенные в соответствии с гипотезами Кирхгоффа–Лява и адекватными им гипотезами относительно электрических полевых величин выражения для  $W$  и  $2U$  имеют вид

$$\begin{aligned} W = & \frac{\omega}{2} \{ A''_{11} [(\varepsilon'_1 + \gamma\kappa'_1)^2 + (\varepsilon''_1 + \gamma\kappa''_1)^2] + \\ & + 2A''_{12} [(\varepsilon'_1 + \gamma\kappa'_1)(\varepsilon'_2 + \gamma\kappa'_2) + (\varepsilon''_1 + \gamma\kappa''_1) \times \\ & \times (\varepsilon''_2 + \gamma\kappa''_2)] + A''_{22} [(\varepsilon'_2 + \gamma\kappa'_2)^2 + (\varepsilon''_2 + \gamma\kappa''_2)^2] + \\ & + 4B''_{66} [(\varepsilon'_{12} + \gamma\kappa'_{12})^2 + (\varepsilon''_{12} + \gamma\kappa''_{12})^2] + \\ & + \bar{D}''_{\gamma}(\varepsilon'_1 + \gamma\kappa'_1) - \bar{D}'_{\gamma}(\varepsilon''_1 + \gamma\kappa''_1) + \bar{D}''_{\gamma}(\varepsilon'_2 + \gamma\kappa'_2) - \\ & - \bar{D}'_{\gamma}(\varepsilon''_2 + \gamma\kappa''_2) + D'_{\gamma}E''_{\gamma} - D''_{\gamma}E'_{\gamma} \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2U = & \{ A'_{11} [(\varepsilon'_1 + \gamma\kappa'_1)^2 + (\varepsilon''_1 + \gamma\kappa''_1)^2] + \\ & + 2A'_{12} [(\varepsilon'_1 + \gamma\kappa'_1)(\varepsilon'_2 + \gamma\kappa'_2) + (\varepsilon''_1 + \gamma\kappa''_1) \times \\ & \times (\varepsilon''_2 + \gamma\kappa''_2)] + A'_{22} [(\varepsilon'_2 + \gamma\kappa'_2)^2 + (\varepsilon''_2 + \gamma\kappa''_2)^2] + \\ & + 4B'_{66} [(\varepsilon'_{12} + \gamma\kappa'_{12})^2 + (\varepsilon''_{12} + \gamma\kappa''_{12})^2] + \\ & + \bar{D}'_{\gamma}(\varepsilon'_1 + \gamma\kappa'_1) + \bar{D}''_{\gamma}(\varepsilon''_1 + \gamma\kappa''_1) + \bar{D}'_{\gamma}(\varepsilon'_2 + \gamma\kappa'_2) + \\ & + \bar{D}''_{\gamma}(\varepsilon''_2 + \gamma\kappa''_2) + D'_{\gamma}E'_{\gamma} + D''_{\gamma}E''_{\gamma} \}. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} A_{11} = B_{11} + \frac{\gamma_{13}^2}{\gamma_{33}}, \quad A_{12} = B_{12} + \frac{\gamma_{13}}{\gamma_{33}}, \\ A_{22} = B_{22} + \frac{\gamma_{13}}{\gamma_{33}}, \quad \bar{D}_{\gamma} = -\frac{\gamma_{13}}{\gamma_{33}}D_{\gamma}. \end{aligned}$$

Количественная оценка эффективности преобразования энергии при стационарных колебаниях пьезоэлектрического тела как на резонансных, так и на нерезонансных частотах определяется коэффициентом электромеханической связи, общая теория которого разработана А. Ф. Улитко [10]. Квадрат этого коэффициента равен отношению способной к обращению электрической (механической) энергии, накопленной на данной деформации в объеме пьезоэлектрического тела, ко всей подведенной к телу извне механической (электрической) энергии:

$$k_e^2 = \frac{U_p - U_k}{U_p}. \quad (56)$$

Здесь  $U_p$  и  $U_k$  – внутренняя энергия пьезоэлектрического тела при разомкнутых и коротко замкнутых электродах соответственно. При использовании системы гипотез для тонкостенной пьезооболочки вращения эти величины определяются соотношениями

$$\begin{aligned} 2U_p = & \frac{1}{2} \int_V \{ A'_{11} [(\varepsilon'_1 + \gamma\kappa'_1)^2 + (\varepsilon''_1 + \gamma\kappa''_1)^2] + \\ & + 2A'_{12} [(\varepsilon'_1 + \gamma\kappa'_1)(\varepsilon'_2 + \gamma\kappa'_2) + (\varepsilon''_1 + \gamma\kappa''_1) \times \\ & \times (\varepsilon''_2 + \gamma\kappa''_2)] + A'_{22} [(\varepsilon'_2 + \gamma\kappa'_2)^2 + (\varepsilon''_2 + \gamma\kappa''_2)^2] + \\ & + 4B'_{66} [(\varepsilon'_{12} + \gamma\kappa'_{12})^2 + (\varepsilon''_{12} + \gamma\kappa''_{12})^2] \} R d\varphi ds d\gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2U_k = & \frac{1}{2} \int_V \{ B'_{11} [(\varepsilon'_1 + \gamma\kappa'_1)^2 + (\varepsilon''_1 + \gamma\kappa''_1)^2] + \\ & + 2B'_{12} [(\varepsilon'_1 + \gamma\kappa'_1)(\varepsilon'_2 + \gamma\kappa'_2) + (\varepsilon''_1 + \gamma\kappa''_1) \times \\ & \times (\varepsilon''_2 + \gamma\kappa''_2)] + B'_{22} [(\varepsilon'_2 + \gamma\kappa'_2)^2 + (\varepsilon''_2 + \gamma\kappa''_2)^2] + \\ & + 4B'_{66} [(\varepsilon'_{12} + \gamma\kappa'_{12})^2 + (\varepsilon''_{12} + \gamma\kappa''_{12})^2] \} R d\varphi ds d\gamma, \end{aligned}$$

Использование упомянутых интегральных характеристик является особенно эффективным при решении задач о колебаниях тонкостенных элементов МКЭ. При этом сначала решаются основные задачи о колебаниях и виброразогреве оболочек, а затем определяются коэффициенты затухания и электромеханической связи.

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные результаты получены для цилиндрической панели, составленной из стального среднего слоя и двух поляризованных в противоположных направлениях слоев из пьезокерамики ЦТСтБС-2 со следующими характеристиками:

$$\begin{aligned}d_{31} &= -1.6 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/Н}, \\S'_{11} &= 12.5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}, \quad S'_{12} = 4.62 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}, \\ \varepsilon_{33} &= 2100\varepsilon^0, \quad \varepsilon^0 = 8.454 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}, \\ \delta_{11}^S &= 1.6 \cdot 10^{-3}.\end{aligned}$$

Для стального слоя принято  $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,  $\nu = 0.3$ .

Геометрические, теплофизические параметры и разность потенциалов были выбраны такими:

$$\begin{aligned}a &= b = 0.01 \text{ м}, \quad R = 0.01 \text{ м}, \\ h_1 &= h_2 = 0.25 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad h_0 = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \\ \theta_0 &= 20 \text{ }^\circ\text{C}, \quad \theta^+ = \theta^- = 20 \text{ }^\circ\text{C}, \\ \lambda &= 1.25 \text{ м/(м}\cdot\text{град)}, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 25 \text{ м/(м}\cdot\text{град)}, \\ \rho_1 &= 7500 \text{ кг/м}^3, \quad V_0 = 1.5 \text{ В}.\end{aligned}$$

Результаты сравнения аналитического и конечно-элементного решений – действительные и мнимые составляющие прогиба, кривизны, усилий и моментов, диссипативной функции и температуры для первой резонансной частоты хорошо согласуются между собой: совпадают три – четыре знака.

Рассмотрим случай, когда характеристики пьезоматериала зависят от температуры. Такая зависимость для ЦТСтБС-2 исследована экспериментально в работе [16]. Нелинейные краевые задачи решались с использованием методов нелинейной механики, а также МКЭ (для решения линейных задач на каждой итерации).

На рис. 1 представлена зависимость модуля прогиба от частоты в окрестности первого резонанса. Сплошная линия отвечает случаю зависящих от температуры свойств, а штриховая – независящих. Видно, что для этих случаев в определенном диапазоне частот как верхняя, так и нижняя ветви линейной и нелинейной амплитудно-частотных характеристик достаточно хорошо согласуются между собой. Имеет место типичное для мягкой характеристики затягивание влево: в определенном диапазоне частот наблюдается нелинейный гистерезис со срывом колебаний с нижней ветви на верхнюю (при увеличении частоты)

и с верхней ветви на нижнюю (при ее снижении из зарезонансной области). В окрестности срыва с верхней ветви на нижнюю наблюдается амплитудный всплеск, порождаемый спецификой температурного поведения материала в окрестности этих частот. На рис. 2 представлена частотная зависимость температуры в центре пьезопанели в окрестности первой резонансной частоты (обозначения кривых – прежние). Здесь также наблюдается типичное для нелинейных систем поведение температуры со срывом с нижней ветви на верхнюю при движении по частоте в сторону ее увеличения, и обратный срыв с верхней ветви на нижнюю – при движении по частоте из зарезонансной области в сторону уменьшения.

Рис. 3 иллюстрирует частотную зависимость коэффициента затухания. Как видно, если не учитывать зависимость свойств материала от температуры, этот коэффициент в рассматриваемом диапазоне частот практически постоянен. Однако при учете зависимости свойств материала от температуры наблюдается типичное для нелинейных систем поведение этого коэффициента в окрестности первой резонансной частоты (нелинейный гистерезис).

На рис. 4 показана зависимость коэффициента электромеханической связи от частоты в окрестности первого резонанса. Здесь также наблюдается типичное нелинейное поведение этого коэффициента. В то же время, для независящих от температуры свойств оболочки он практически постоянен. В целом при температурной зависимости свойств кривая лежит ниже значений коэффициента электромеханической связи, рассчитанных для свойств, независящих от температуры. Тем не менее, в окрестности точки срыва на нижнюю ветвь имеет место небольшое увеличение этого коэффициента.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С использованием механических гипотез Кирхгоффа – Лява, дополненных адекватными им гипотезами относительно электрических полевых величин и температуры, получена замкнутая система уравнений, описывающая вынужденные колебания и диссипативный разогрев трехслойных пьезоэлектрических оболочек, составленных из пассивного среднего слоя и присоединенных к нему двух пьезоактивных слоев. Диссипативные свойства материалов учитываются на основе концепции комплексных модулей. Рассмотрены различные случаи расположения бесконечно тонких электродов.

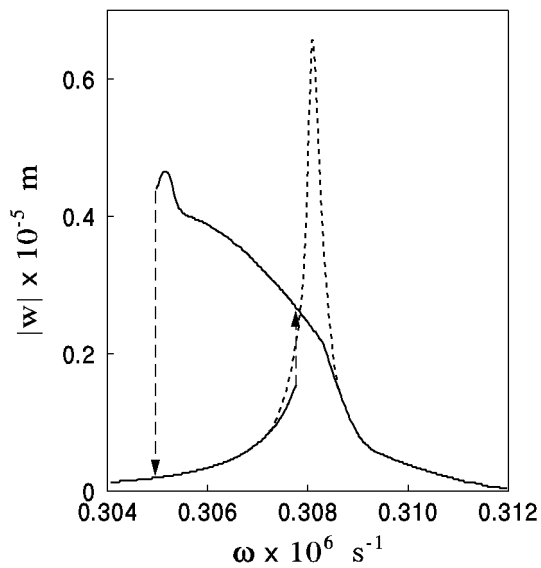


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика для трехслойной цилиндрической пьезопанели при  $V_0 = 1.5$  В

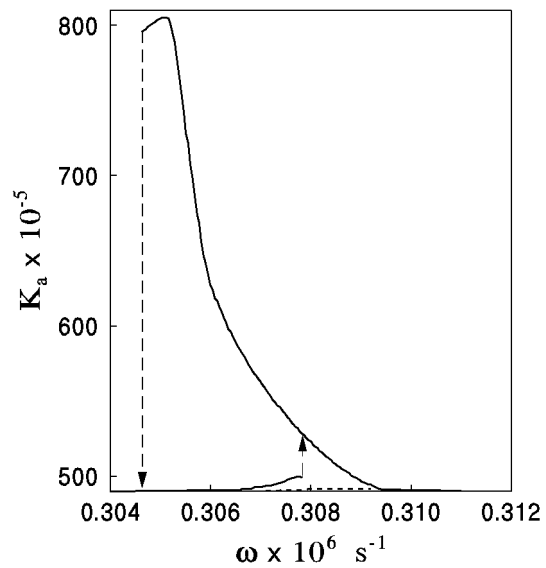


Рис. 3. Частотная зависимость коэффициента затухания для трехслойной цилиндрической пьезопанели при  $V_0 = 1.5$  В

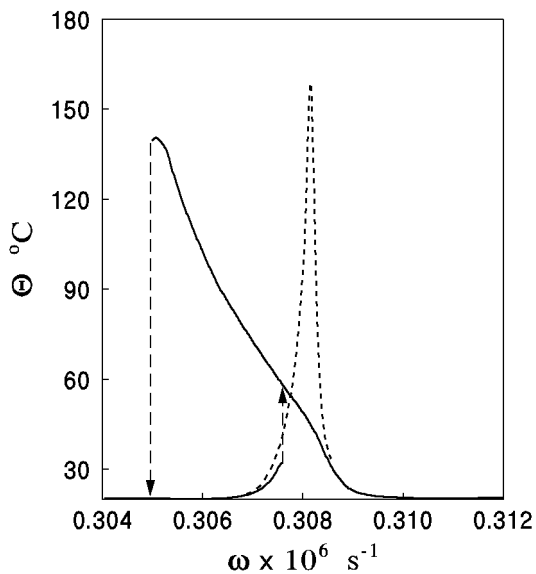


Рис. 2. Температурно-частотная характеристика для трехслойной цилиндрической пьезопанели при  $V_0 = 1.5$  В

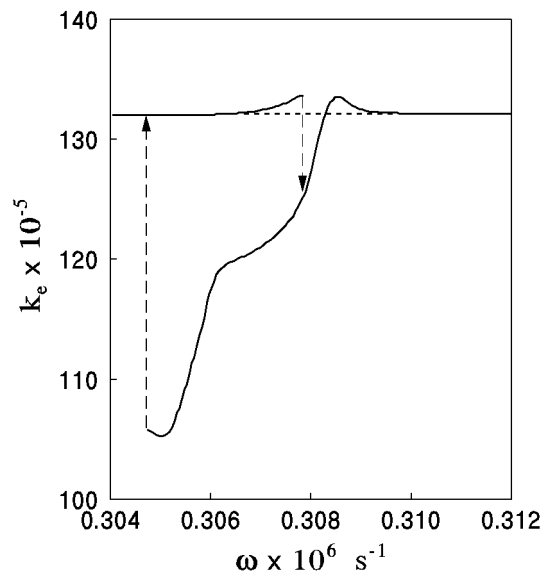


Рис. 4. Частотная зависимость коэффициента электромеханической связи для трехслойной цилиндрической пьезопанели при  $V_0 = 1.5$  В

Детально рассмотрена задача о вынужденных колебаниях и виброразогреве трехслойной цилиндрической пьезопанели. Для случая независимых от температуры характеристик материалов и шарнирного закрепления торцов панели получено аналитическое решение задачи электромеханики и

теплопроводности с известным источником тепла, определяемым диссипативной функцией.

Для случая зависящих от температуры характеристик материалов задача становится существенно нелинейной. Для ее решения применяются итерационные методы нелинейной механики в со-

четании с МКЭ для решения линейных задач электромеханики и теплопроводности на каждой итерации. Сравнение аналитических и конечно-элементных решений показывает высокую точность и эффективность последнего подхода.

На основе разработанных моделей и методов исследовано влияние зависимости свойств материалов на частотные зависимости амплитуд колебаний, температуры виброразогрева, коэффициенты затухания и электромеханической связи в окрестности первой резонансной частоты. Каждая из этих величин имеет типичное для нелинейных систем поведение с характерными нелинейным гистерезисом и срывом с верхних и нижних ветвей в определенном диапазоне частот.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Министерства просвещения и науки Украины (проект N 01.07/050).

1. Rao S. S., Sunar M. Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of structure: A survey // *Appl. Mech. Review.*– 1994.– **47**, N 4.– P. 113–123.
2. Tani J., Takagi T., Qiu J. Intelligent material systems: Applications of functional materials // *Appl. Mech. Review.*– 1998.– **51**, N 8.– P. 505–521.
3. Tzou H. S., Bergman L. A. Dynamics and control of distributed systems.– Cambridge: Cambridge University Press, 1998.– 400 p.
4. Сканиви Г. Н. Физика диэлектриков: том 2.– М.: Наука, 1966.– 636 с.
5. *Механика* связанных полей в элементах конструкций: в пяти томах. Том 4. Электротермовязкоупругость / Карнаухова В. Г., Киричок И. Ф.– К.: Наук. думка, 1988.– 320 с.
6. Рассказов А. О., Козлов В. И., Карнаухова Т. В. Вынужденные поперечные колебания и виброразогрев цилиндрической биморфной панели из диссипативного пьезоматериала // *Прикл. мех.*– 2000.– **36**, N 5.– С. 89–97.
7. *Термомеханика* эластомерных конструкций при циклическом нагружении / Потураев В. Н., Дырда В.И., Карнаухова В.Г. и др. Ред. В. Н. Потураева.– К.: Наук. думка, 1987.– 288 с.
8. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек.– М.: Наука, 1974.– 446 с.
9. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости.– К.: Наук. думка, 1981.– 544 с.
10. *Механика* связанных полей в элементах конструкций: в пяти томах. Том 5. Электроупругость / Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.– К.: Наук. думка, 1989.– 280 с.
11. Карнаухова О. В., Козлов В. И., Рассказов А. О. Параметрические колебания трехслойных пьезоэлектрических оболочек вращения // *Акуст. вісн.*– 2001.– **4**, N 1.– С. 31–43.
12. Коваленко А. Д. Основы термоупругости.– К.: Наук. думка, 1970.– 307 с.
13. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений.– М.: Мир, 1985.– 520 с.
14. Бондарь А. Г. Термоупругое равновесие многослойных ортотропных оболочек // *Механика композитных материалов.*– 1983.– N 4.– С. 691–697.
15. Бондарь А. Г., Рассказов А. О., Козлов В. И., Бондарский А. Г. Термоупругое равновесие многослойных составных оболочек // *Пробл. прочн.*– 1989.– N 6.– С. 68–72.
16. Болкисев А. Н., Карлаш В. Л., Шульга Н. А. О зависимости свойств пьезокерамических материалов от температуры // *Прикл. мех.*– 1984.– **20**, N 7.– С. 70–74.