Об одной геометрической модели временных параллельных процессов[*]

Ошевская Елена Сергеевна

Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, г. Новосибирск, 630090, Россия. Тел.: 33-34-96, факс: 33-25-98. E-mail: eso@iis.nsk.su

The intention of the paper is to study geometric properties of timed concurrent processes. First, we introduce a notion of timed higher dimentional transition sistems and then we provide a category-theoretic characterization of bisimulation equivalence in the context of the model under consideration.

Введение

Последние годы активно разрабатываются формальные методы спецификации, анализа и моделирования параллельных/распределенных систем, имеющих сложную структурную и функциональную организацию. К таким системам относятся коммуникационные протоколы, системы управления производством, распределенные операционные системы и т.д. Разработка корректных параллельных/распределенных систем – нетривиальная задача, требующая для своего успешного решения проведения комплексных фундаментальных исследований, основанных на различных формальных методах и средствах.

Исследования последнего десятилетия показали, что применение теоретико-категорных методов позволяет разрабатывать, унифицировать и классифицировать различные параллельные модели [10]. Кроме того, в рамках теории категорий были предложены абстрактные определения эквивалентностей для различных параллельных моделей [8]. Оказалось, что эквивалентности, определенные на категориях интерливинговых моделей, согласуются с интерливинговой бисимуляцией Милнера, тогда как эквивалентности на категориях моделей с «истинным параллелизмом» требуют более сильной эквивалентности – усиленного варианта сохраняющей историю бисимуляци Трахтенброта. Альтернативная характеризация временной бисимуляции для временной интерливинговой модели – временных систем переходов – с использованием теоретоко-категорных методов была предложена Хунэм и Нильсеном [6].

С другой стороны, в начале 90-х годов прошлого столетия было начато исследование геометрических свойств параллельных процессов посредством методов комбинаторной алгебраической топологии, гомологической алгебры, алгебраической геометрии и т.д. В работах сначала Пратта [8], фан Глабика [2], а затем Губо и Йенсена [3] была предложена и исследована геометрическая модель многомерных автоматов (Higher Dimensional Automata). Многомерные автоматы – обобщение недетерминированных автоматов для моделирования семантики «истинного параллелизма». Параллельное выполнение двух событий в недетерминированных автоматах распознается геометрически как квадрат. В случае параллельного выполнения трех и более событий в автоматах появляются n-мерные кубы (n=3,4..). Это и привело к понятию многомерных автоматов. В вышеуказанных работах были изучены некоторые взаимосвязи между различными классами многомерных автоматов и классическими параллельными моделями, а также теоретико-категорные свойства этих геометрических моделей. Далее для разработки геометрических моделей параллельных процессов стали использовать структуры и методы алгебраической топологии (например, цепные бикомплексы (chain bicomplexes)) [3]. Позже Губо ввел временное расширение многомерных автоматов [5]. Кроме того, в 1996 году Сассоне и Каттани [9] была предложена модель многомерных систем переходов, которая встраивается в модель многомерных автоматов, сохраняя и отображая соответствующие понятия гомотопии и бисимуляции. Такое встраивание является эквивалентностью категорий для некоторого подкласса многомерных автоматных моделей. При этом было продемонстрировано, что при переходе от многомерных автоматов к многомерным системам переходов нет никаких потерь в выразительной мощности, и последняя модель адекватно представляет параллельные процессы.

В данной статье с целью более адекватного анализа поведенческих свойств параллельных систем на основе методов теории категорий и геометрических структур строится временное расширение модели многомерных систем переходов и изучаются гомотопические и теоретико-категорные свойства введенной модели.

Статья состоит из трех частей. В первой части вводится геометрическая модель временных многомерных систем переходов и строится соответствующая категория. Во второй части с помощью понятия гомотопии определяется бисимуляционная эквивалентность. В третьей части дается ее альтернативная характеризация в терминах открытых морфизмов. В заключении перечисляются результаты, полученные в рамках данной работы, и приводятся некоторые замечания по дальнейшей исследованиям.

[*] Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 04-01-00789).

1. Временные многомерные системы переходов

Построенная в 1996 году Сассоне и Каттани [9] модель многомерных систем переходов носит теоретико-множественный характер. Один из недостатков такого подхода – отсутствие наглядности. В 1991 году Пратт предложил изображать состояния точками, действия – отрезками, а одновременное исполнение n действий – n-мерными (закрашенными) кубами (n=2,3…). Использование этой идеи сделало построение и исследование моделей параллельных систем и процессов естественным и интуитивно понятным. К примеру, исполнение многопроцессорной системой какой-либо последовательности действий теперь можно было изобразить просто кривой (траекторией). На таком геометрическом представлении и основанно дальнейшее изложение.

Пусть $Q^n := \{(t_1,\ldots,t_n)\in \mathrm{R}^n \mid 0\le t_i \le 1, i=1,...,n\}$, $Q^0 := \{0\}$; и пусть $\mathrm{int}\,Q^n$ обозначает внутренность множества Q^n, причем $\mathrm{int}\,Q^0 := \{0\}$.

Определим функцию $\delta_i^k : Q^{n-1} \to Q^n$, $n\in \mathrm{N}, i\in \{1,...,n\}, k=0,1,$ следующим образом $\delta_i^k(t_1,\ldots,t_{n-1}) = (t_1,\ldots,t_{i-1},k,t_i,\ldots,t_{n-1})$.

Пусть $n\in \mathrm{N}$ – фиксированное.

Определение 1.1. Пусть X – топологическое пространство. Система непрерывных функций $F=\{x_\alpha^n\}_{\alpha\in A, n\in\{0,...,N\}}$ (A – счетное) называется ***кубической***, если $\forall\alpha\in A, \forall n\in\{0,...,N\}$ $x_\alpha^n : Q^n \to X$ индуцирует гомеоморфизм $\mathbf{int}\,Q^n$ на $x_\alpha^n(\mathrm{int}\,Q^n)$, и выполняется следующее условие:

$$\text{если } x^n \in F \text{, то } x\circ\delta_i^k \in F \text{ при всех } i\in\{1,...,n\}, k=0,1.$$

Определим $F^n := \{x\in F \mid dom(x) = Q^n\}$.

Введем понятие временной многомерной системы переходов.

Определение 1.2. Тройка (X, L, i_0) называется ***временной многомерной системой переходов*** (обозн. THDTS), если X – хаусдорфово топологическое пространство, L – множество меток, i_0 --- начальное состояние, и выполнены условия:

- для X задана кубическая система функций F такая, что $X = \bigcup_{x\in F^n, n\in\{0,...,N\}} x(\mathrm{int}\,Q^n)$;
- задана функция $l : F^1 \to L$ такая, что
$$\forall x\in F^2 \;\; l(x(\delta_i^0(Q^1))) = l(x(\delta_i^1(Q^1))), i=1,2,$$
$\forall x\in F^n, n>1,$ $\;\; \boldsymbol{l(x)} := \oplus\{l(y) \mid y = x\boldsymbol{(}\underbrace{\delta_i^0\circ\ldots\circ\delta_i^0}_{(n-1)}(Q^1)\boldsymbol{)}, i=1,...,n\}$, где '$\oplus$' обозначает объединение мультимножеств;
- $\forall n\in\{1,...,N\}$ выполняется следующее условие: если $x_1, x_2 \in F^n$ такие, что $x_1\boldsymbol{(}\underbrace{\delta_1^0\circ\ldots\circ\delta_1^0}_{n}(0)\boldsymbol{)} = x_2\boldsymbol{(}\underbrace{\delta_1^0\circ\ldots\circ\delta_1^0}_{n}(0)\boldsymbol{)}, x_1\boldsymbol{(}\underbrace{\delta_1^1\circ\ldots\circ\delta_1^1}_{n}(0)\boldsymbol{)} = x_2\boldsymbol{(}\underbrace{\delta_1^1\circ\ldots\circ\delta_1^1}_{n}(0)\boldsymbol{)},$ $l(x_1) = l(x_2)$, то $x_1 = x_2$;
- X снабжено семейством норм $\|\cdot\|_u$ на касательном пространстве ($T_u X = T_u x(\mathrm{int}\,Q^n)$, где $x\in F^n$ такая, что $u\in x(\mathrm{int}\,Q^n)$)) таким, что функция $P(u,\dot{u}) = \|\dot{u}\|_u$ непрерывна по u и является нормой.

Интуитивно временную многомерную систему переходов можно представить себе как хаусдорфово топологическое пространство X, состоящее из соединенных между собой деформированных n-мерных кубов, причем n=1,.,N. Кубы изогнуты так, что существует покрытие пространства картами $x_\alpha^n : Q^n \to X$, область значений каждой из которых – соответствующий деформированный n-мерный куб. На касательном пространстве к X задано семейство непрерывных норм.

Определим понятие морфизма между временными многомерными системами переходов.

Определение 1.3. Пусть $(X, L_X, i_{0_X}), (Y, L_Y, i_{0_Y})$ – THDTS, а F_X, F_Y – их кубические системы соответственно, $l_X : F_X^1 \to L_X$, $l_Y : F_Y^1 \to L_Y$, . Тогда отображение $\langle f,\alpha\rangle$ (где $\alpha : L_X \to L_Y$ – частично определенное отображение, $f : X \to Y$ – всюду определенное отображение) – ***морфизм***, если

1. $f(i_{0_X}) = i_{0_Y}$;
2. $\forall x\in F_X^n$, $n\in\{1,\ldots,N\}$,

- если $|\alpha(l_X(x))| = n$,то $\exists y\in F_Y^n$ такая, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} Q^n \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

коммутативна, а $l_Y(y) = \alpha(l_X(x))$; кроме того, верно, что $f(x(\delta_i^k(Q^{n-1}))) = y(\delta_i^k(Q^{n-1}))$, для всех $i = 1,\dots n$, $k = 0,1$,

- если $|\alpha(l_X(x))| = q < n$, то $f(x) = f(x(\delta_{j_1}^0 \circ \dots \circ \delta_{j_q}^0(Q^{n-q})))$, где $j_1,\dots,j_q$ такие, что $\alpha(l_X(x)) = \alpha(l_X(x \circ \delta_{j_1}^0 \circ \dots \circ \delta_{j_q}^0))$;

3. $\|d_u f\| \le 1$, $u \in X$.

Из этого определения следует, что $y^{-1} \circ f \circ x = id$, а значит, $f \in C^\infty$.

Таким образом, мы получаем категорию **THDTS,** чьи объекты даются определением 1.2, а морфизмы – определением 1.3.

Определение 1.4. ***Путем*** в THDTS (X, L, i_0) называется непрерывная функция $\gamma : [0,1] \to X$ такая, что

1. $\exists I_k = (a_k, a_{k+1})$, $k = 0,\dots,m$, такие, что $\exists x_k^n \in F^n$, $n \in \{1,\dots,N\}$, такие, что $\gamma\big|_{I_k} : I_k \to x_k^n(\mathbf{int}Q^n)$, причем $\gamma(a_k) = x_k^n(\underbrace{\delta^0 \circ \dots \circ \delta^0}_n(0))$, $\gamma(a_{k+1}) = x_k^n(\underbrace{\delta^1 \circ \dots \circ \delta^1}_n(0))$;
2. $\gamma\big|_{I_k}$ – дифференцируемая функция;
3. $(x_k^n)_i \circ \gamma\big|_{I_k}$ – неубывающая функция для всех $i = 1,\dots n$, но каково бы ни было открытое множество $U \subset x_k^n(\mathbf{int}Q^n)$ найдется такое $j \in \{1,\dots,n\}$, что $(x_k^n)_j \ne const$ на $U \cap \gamma(I_k)$.

Пробегом называется путь, начинающийся в начальном состоянии i_0.

Утверждение 1.5. Морфизмы категории **THDTS** сохраняют гомотопность путей.

Доказательство этого утверждения очевидно, ведь по определению морфизма при его действии не могут появляться новые "дырки". А значит, если была гомотопия между путями, то она сохранится.

Определение 1.6. ***Длиной*** пути γ называется

$$length(\gamma) = \int_0^1 \left\| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right\|_{\gamma(t)} dt.$$

Пусть $\Pi(u,v)$ обозначает множество всех путей из точки u в точку v в X.

Определение 1.7. ***Минимальное время*** между точками u и v в X есть

$$t_i^X(u,v) = \inf_{\gamma \in \Pi(u,v)} length(\gamma).$$

Максимальное время между точками u и v в X есть

$$t_s^X(u,v) = \sup_{\gamma \in \Pi(u,v)} length(\gamma).$$

2. Бисимуляционная эквивалентность

Для T – THDTS полагаем, что F_T – ее кубическая система, i_T – начальное состояние. Определим $S_T := \{s(Q^0) \mid s \in F_T^0\}$ – множество состояний. Определим функции $b, e : F_T \to S_T$ следующим образом: если $x \in F_T^n$, то $b(x) = x(\underbrace{\delta_1^0 \circ \dots \circ \delta_1^0}_n(Q^0))$, $e(x) = x(\underbrace{\delta_1^1 \circ \dots \circ \delta_1^1}_n(Q^0))$.

С каждым путем γ мы ассоциируем натуральное число $m = m(\gamma)$ – число интервалов разбиения $\{I_k = (a_k, a_{k+1})\}$ из определения 1.4 пути, и сам набор точек $\{a_k\}_{k \in \{0,\dots,m\}}$. Обозначим $\gamma_i = \gamma\big|_{[a_{i-1}, a_i)}$ при всех $i = 1,\dots,m-1$ и $\gamma_m = \gamma\big|_{[a_{m-1}, a_m]}$. Тогда путь γ можно представить в виде $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_m$, т.е. γ – это результат последовательной композиции путей $\gamma = \gamma_1,\dots,\gamma_m$. Причем полагаем, что $l(\gamma_i) := l(x_i^n)$, где x_i^n – из определения 1.4 пути.

Определение 2.1. Пусть T_1, T_2 – THDTS, а $R \subseteq S_{T_1} \times S_{T_2}$ – отношение на их множествах состояний. Пути $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_m$, $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 \cdots \tilde{\gamma}_m$ в T_1, T_2 соответственно называются ***R-соотносимыми***, если $\gamma(a_i) R \tilde{\gamma}(a_i)$ и $l(\gamma_i) := l(\tilde{\gamma}_i)$ при всех $i \in \{0,\dots,m\}$.

Определение 2.2. Пути γ и $\tilde{\gamma}$ ***R-бисимуляционны*** (обозначается $\gamma \leftrightarrow_R \tilde{\gamma}$), если

- пути γ и $\tilde{\gamma}$ R-соотносимы;
-
  - для любого пути β в T_1 такого, что $\beta \sim \gamma$, существует $\tilde{\beta} \sim \tilde{\gamma}$ в T_2 такой, что β и $\tilde{\beta}$ R-соотносимы,

– для любого пути $\tilde{\beta}$ в T_2 такого, что $\tilde{\beta} \sim \tilde{\gamma}$, существует $\beta \sim \gamma$ в T_1 такой, что β и $\tilde{\beta}$ R-соотносимы;

- длины путей γ и $\tilde{\gamma}$ совпадают.

(где '~' обозначает отношение гомотопности в обычном смысле).

Определение 2.3. ***Бисимуляция*** между THDTS T_1 и T_2 – это отношение $R \subseteq S_{T_1} \times S_{T_2}$ такое, что если γ и $\tilde{\gamma}$ – пробеги в T_1 и T_2 соответственно – R-бисимуляционны, $\gamma(a_m) = s$, $\tilde{\gamma}(a_m) = \tilde{s}$, то

- для любого пути $\beta = \beta_1$ $(m(\beta) = 1)$ такого, что $\beta(a_0) = s$, $l_{T_1}(\beta) = \mu,$ существует путь $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_1$ ($\tilde{\beta}(a_0) = \tilde{s}$, $l_{T_2}(\tilde{\beta}) = \mu$) такой, что $\gamma\beta$ и $\tilde{\gamma}\tilde{\beta}$ R-бисимуляционны.
- для любого пути $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_1$ $(m(\tilde{\beta}) = 1)$ такого, что $\tilde{\beta}(a_0) = \tilde{s}$, $l_{T_2}(\tilde{\beta}) = \mu$, существует путь $\beta = \beta_1$ ($\beta(a_0) = s$, $l_{T_1}(\beta) = \mu,$) такой, что $\gamma\beta$ и $\tilde{\gamma}\tilde{\beta}$ R-бисимуляционны.

THDTS T_1 и T_2 ***бисимуляционны*** ($T_1 \sim_R T_2$), если между ними существует бисимуляция R такая, что $i_{T_1} R i_{T_2}$.

3.Теоретико-категорная характеристика бисимуляционной эквивалентности

Определение 3.1. ***Наблюдение*** – это ацикличная THDTS (P, L, i) следующей формы

$$u_1(Q^1)u_2(Q^1)\ldots u_k(Q^1)v(Q^n),$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_k \in F^1$, $v \in F^n$, и кроме того, $b(u_1) = i$, $e(u_j) = b(u_{j+1})$, $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, $e(u_k) = b(v)$.

Обозначим через **Obs** подкатегорию наблюдений категории **THDTS**.Подкатегория **Obs** является полной.

Чтобы определить понятие **Obs**-открытости, нужно наделить **THDTS** следующей структурой: обозначим через $\mathbf{THDTS_L}$ подкатегорию всех тех THDTS с множеством меток L, морфизмы между которыми имеют тождественную (там, где она определена) компоненту α (определение 1.3). Такие морфизмы будем называть ***стрелками***. Таким образом, далее говоря об **Obs**-открытости, мы предполагаем, что рассматриваемые объекты принадлежат одной подкатегории $\mathbf{THDTS_L}$.

Определение 3.2. Пусть T_1 и T_2 – THDTS. Стрелка $\varphi{:}T_1 \to T_2$ называется **Obs**-***открытой***, если для любых P, Q из **Obs** и для любых стрелок p,q,m таких, как на коммутативной диаграмме ниже, существует стрелка $r: Q \to T_1$, удовлетворяющая соотношениям $r \circ m = p$ и $\varphi \circ r = q$.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "m"'] & T_1 \arrow[d, "\varphi"] \\ Q \arrow[r, "q"'] & T_2 \end{tikzcd} \quad\Longrightarrow\quad \begin{tikzcd} P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "m"'] & T_1 \arrow[d, "\varphi"] \\ Q \arrow[r, "q"'] \arrow[ur, "r"] & T_2 \end{tikzcd}$$

Определение 3.3. THDTS T_1 и T_2 **Obs**-***бисимуляционны***, если существуют THDTS T и **Obs**-открытые стрелки φ_1, φ_2 такие, что $T_1 \xleftarrow{\varphi_1} T \xrightarrow{\varphi_2} T_2$.

Лемма 3.4. Пусть T_1, T_2 – THDTS, $\varphi = \langle f, \alpha \rangle{:}T_1 \to T_2$ – **Obs**-открытая стрелка. Тогда если $v \in F_{T_1}^n$, то $f \circ v \in F_{T_2}^n$ при всех $n \in \{0, \ldots, N\}$.

Доказательство. Пусть существует $u \in F_{T_1}^j$ $(1 \le j \le n)$ такая, что $f \circ u = t \in F_{T_2}^0$. Всегда найдутся $u_1, \ldots, u_k \in F_{T_1}^1$ такие, что $u_1(Q^1)\ldots u_k(Q^1)u(Q^j) \in$ **Obs**. Тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd} u_1(Q^1)\dots u_k(Q^1)u(Q^j) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "m"'] & T_1 \arrow[d, "\varphi"] \\ f(u_1(Q^1))\dots f(u_k(Q^1))t(Q^0) \arrow[r, "q"'] & T_2 \end{tikzcd}$$

($m = \rho \circ \varphi\big|_{u_1(Q^1)\dots u_k(Q^1)u(Q^j)}$, где $\rho{:}T_2 \to f(u_1(Q^1))\dots f(u_k(Q^1))t(Q^0)$, причем $\rho\big|_{f(u_1(Q^1))\dots f(u_k(Q^1))t(Q^0)} = id$, а p,q – тождественные вложения) коммутативна. Тогда по определению **Obs**-открытой стрелки существует стрелка $r: f(u_1(Q^1))\dots f(u_k(Q^1))t(Q^0) \to T_1$ такая, что $p = r \circ m$. Но образ $t(Q^0)$ при морфизме r может быть только точкой, а образ $u(Q^j)$ при тождественном вложении p имеет размерность $\mathrm{j} > 0$. Получили противоречие.

Значит, $u \in F_{T_1}^n$ влечет $f \circ u \in F_{T_2}^n$. Лемма доказана.

Лемма 3.5. Пусть T_1, T_2 – THDTS, $\varphi = \langle f, \alpha \rangle{:}T_1 \to T_2$ – **Obs**-открытая стрелка. Тогда для любой функции $u \in F_{T_2}^n$ найдется такая функция $x \in F_{T_1}$, что $f \circ x = u$ при всех $n \in \{0,\dots,N\}$.

Доказательство. Допустим, что существует $u \in F_{T_2}^n$ такая, что $\forall x \in F_{T_1}\quad f \circ x \neq u$. Можно считать, что существуют $v_1,\dots,v_k \in F_{T_2}^1$ такие, что [для любого $i \in \{1,\dots,k\}$ существует $w_i \in F_{T_1}^1$ такая, что $f \circ w_i = v_i$] и $v_1(Q^1)\dots v_k(Q^1)u(Q^n) \in$ **Obs**. Тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd} w_1(Q^1)\dots w_k(Q^1) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "m"'] & T_1 \arrow[d, "\varphi"] \\ v_1(Q^1)\dots v_k(Q^1)u(Q^n) \arrow[r, "q"'] & T_2 \end{tikzcd}$$

($m = \rho \circ \varphi\big|_{w_1(Q^1)\dots w_k(Q^1)}$, где $\rho{:}T_2 \to v_1(Q^1)\dots v_k(Q^1)u(Q^n)$, причем $\rho\big|_{v_1(Q^1)\dots v_k(Q^1)u(Q^n)} = id$, а p,q – тождественные вложения) коммутативна. Т.е. по определению **Obs**-открытой стрелки существует стрелка $r{:}v_1(Q^1)\dots v_k(Q^1)u(Q^n) \to T_1$ такая, что $q = \varphi \circ r$. Но q – тождественное вложение. Получили противоречие. Лемма доказана.

Теорема 3.6. Две THDTS **Obs**-бисимуляционны тогда и только тогда, когда они бисимуляционны в соответствии с определением 2.3.

Доказательство. $\Rightarrow$. Предположим, что существуют THDTS T и $\varphi_1 = \langle f_1, \alpha_1 \rangle$, $\varphi_2 = \langle f_2, \alpha_2 \rangle$ – **Obs**-открытые стрелки такие, что $T_1 \xleftarrow{\varphi_1} T \xrightarrow{\varphi_2} T_2$. Положим $R = \{(f_1(s), f_2(s)) \mid s \in S_T\}$. Покажем, что R – отношение бисимуляции между THDTS T_1 и T_2.

Т.к. φ_1, φ_2 – морфизмы, то $f_1(i_T)$ и $f_2(i_T)$ – начальные состояния T_1 и T_2 соответственно, т.е. $(i_{T_1}, i_{T_2}) \in R$.

Из леммы 3.4 и леммы 3.5 следует, что, если $(s_1, s_2) = (f_1(s), f_2(s)) \in R$, то для любой функции $x_1^n \in F_{T_1}^n$ такой, что $b(x_1^n) = s_1$, $l_1(x_1^n) = \mu$, существует функция $x^n \in F_T^n$ такая, что $x_1^n = f_1(x^n)$, $b(x^n) = s$, $l(x^n) = \mu$, и, кроме того, $f_1(e(x^n)) = e(x_1^n)$. Аналогично, для любой функции $x^n \in F_T^n$ такой, что $b(x^n) = s$, $l(x^n) = \mu$, существует функция $x_2^n \in F_{T_2}^n$ такая, что $x_2^n = f_2(x^n)$, $b(x_2^n) = s_2$, $l_2(x_2^n) = \mu$, и, кроме того, $f_2(e(x^n)) = e(x_2^n)$.

Рассмотрим соответствующие $x_1^n \in F_{T_1}^n$, $x^n \in F_T^n$ и $x_2^n \in F_{T_2}^n$. Возьмем путь $\beta: [0,1] \to x_1^n(Q^n)$, $\beta(0) = b(x_1^n)$, $\beta(1) = e(x_1^n)$. Тогда его образ в T_2, по доказанному, есть $\tilde{\beta}: [0,1] \to x_2^n(Q^n)$, $\tilde{\beta}(0) = b(x_2^n)$, $\tilde{\beta}(1) = e(x_2^n)$. Покажем, что $\tilde{\beta}$ и β R-бисимуляционны.

Они, очевидно, R-соотносимы. При действии морфизма длина пути не возрастает, т.к. $\|d_u f\| \le 1$. Рассмотрим наблюдения $u_1(Q^1)\dots u_k(Q^1)x^n(Q^n)$ и $v_1(Q^1)\dots v_k(Q^1)x_1^n(Q^n)$ из T и T_1 соответственно, $f_1(u_1) = v_1, \dots, f_1(u_k) = v_k$. Диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
u_1(Q^1)\dots u_k(Q^1)x^n(Q^n) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "m"'] & T \arrow[d, "\varphi_1"] \\
v_1(Q^1)\dots v_k(Q^1)x_1^n(Q^n) \arrow[r, "q"'] \arrow[ur, "r"] & T_1
\end{tikzcd}
$$

($m = \rho \circ \varphi\big|_{u_1(Q^1)\dots u_k(Q^1)x^n(Q^n)}$, где $\rho : T_1 \to v_1(Q^1)\dots v_k(Q^1)x_1^n(Q^n)$, причем $\rho\big|_{v_1(Q^1)\dots v_k(Q^1)x_1^n(Q^n)} = id$, p,q – тождественные вложения, а $r : v_1(Q^1)\dots v_k(Q^1)x_1^n(Q^n) \to T$ – из определения **Obs**-открытой стрелки) коммутативна. При тождественном вложении q длина пути β сохранится, т.е. она сохранится при $\varphi_1 \circ r$, а значит, длины путей β и $\tilde{\tilde{\beta}}$ ($\tilde{\tilde{\beta}}$ – прообраз β при морфизме φ_1) совпадают. Аналогично, для $\tilde{\tilde{\beta}}$ и $\tilde{\beta}$. Таким образом, $length(\beta) = length(\tilde{\beta})$.

Пусть есть путь γ, $\gamma \sim \beta$, $\gamma([0,1]) \subset x_1^n(Q^n)$, тогда если $\tilde{\gamma}$ – его образ в T_2, то γ и $\tilde{\gamma}$ R-соотносимы по доказанному. Кроме того, $\tilde{\gamma} \sim \tilde{\beta}$, т.к. морфизмы сохраняют гомотопность путей (Утверждение 1.5). Таким образом, β и $\tilde{\beta}$ R-бисимуляционны.

Аналогично в сторону от T_2 в T_1.

$\Leftarrow$. Пусть $T_1 \sim_R T_2$. Построим следующую THDTS T: рассмотрим пару R-бисимуляционных пробегов $(\beta, \tilde{\beta})$, рассмотрим их гомотопические классы эквивалентности $K_1(\beta) = \{\gamma \in \Pi(s,t) \mid \gamma \sim \beta\}$, $K_2(\tilde{\beta}) = \{\tilde{\gamma} \in \Pi(\tilde{s}, \tilde{t}) \mid \tilde{\gamma} \sim \tilde{\beta}\}$, где $\beta(0) = s$, $\beta(1) = t$, $\tilde{\beta}(0) = \tilde{s}$, $\tilde{\beta}(1) = \tilde{t}$. Сопоставим каждой такой паре классов точку (состояние), т.е. $x^0(Q^0)$, где $x^0 \in F_T^0$. По определению, если γ и $\tilde{\gamma}$ (пробеги в T_1 и T_2 соответственно) R-бисимуляционны, $\gamma(a_m) = s$, $\tilde{\gamma}(a_m) = \tilde{s}$, то для любого пути $\beta = \beta_1$ такого, что $\beta(a_0) = s$, $l_{T_1}(\beta) = \mu,$ существует путь $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_1$ ($\tilde{\beta}(a_0) = \tilde{s}$, $l_{T_2}(\tilde{\beta}) = \mu$) такой, что $\gamma\beta$ и $\tilde{\gamma}\tilde{\beta}$ R-бисимуляционны. Каждой такой паре $\beta, \tilde{\beta}$, т.е. каждой паре функций $x_1^{|\mu|} \in F_{T_1}^{|\mu|}$, $x_2^{|\mu|} \in F_{T_2}^{|\mu|}$, таких, что $l_{T_1}(x_1^{|\mu|}) = l_{T_2}(x_2^{|\mu|}) = \mu$, $b(x_1^{|\mu|}) = s$, $b(x_2^{|\mu|}) = \tilde{s}$, $e(x_1^{|\mu|}) = \beta(1)$, $e(x_2^{|\mu|}) = \tilde{\beta}(1)$, сопоставим кубическую функцию $x^{|\mu|} \in F_T^{|\mu|}$, такую, что $l_T(x^{|\mu|}) = \mu$, $b(x^{|\mu|}) = (K_1(\gamma), K_2(\tilde{\gamma}))$, $e(x^{|\mu|}) = (K_1(\gamma\beta), K_2(\tilde{\gamma}\tilde{\beta}))$.

Очевидно, существует (естественная) стрелка $\varphi_1 = \langle f_1, \alpha_1 \rangle : T \to T_1$ (сопоставление, обратное указанному выше). Можно выбрать такие $x^{|\mu|} \in F_T^{|\mu|}$,, чтобы эта стрелка была изометрией. Тогда стрелка $\varphi_2 = \langle f_2, \alpha_2 \rangle : T \to T_2$ тоже будет изометрией (это следует из определения 2.3).

Ясно, что если диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "m"'] & T \arrow[d, "\varphi_1"] \\
Q \arrow[r, "q"'] & T_1
\end{tikzcd}
$$

(где $P, Q \in$ **Obs**, m, p, q – стрелки) коммутативна, то существует стрелка $r : Q \to T$ такая, что $r \circ m = p$ и $\varphi_1 \circ r = q$. Т.е. стрелка φ_1 **Obs**-открыта.

Аналогично для стрелки $\varphi_2 = \langle f_2, \alpha_2 \rangle : T \to T_2$.

Теорема доказана.

Заключение

В работе были получены следующие результаты: введена геометрическая модель временных многомерных систем переходов; с помощью гомотопии на введенной модели определена бисимуляционная эквивалентность; построена категория временных многомерных систем переходов; дана альтернативная характеризация бисимуляции через открытые морфизмы.

В дальнейшем предполагается разработать гомологическую характеризацию бисимуляционной эквивалентности временных многомерных систем переходов.

Литература

1. **F. Bourceux.** Handbook of Categorical Algebra. Cambridge: Cambridge University Press (1994).
2. **R. van Glabbek.** Bisimulation Semantics for Higher Dimentional Automata. Manuscript available on the web as http://theory.stanford.edu/rvg/hda
3. **E. Goubalt, T.P. Jensen.** Homology of Higer-Dimensional Automata. *Lecture Notes in Computer Science* **630** (1992) 254–268.
4. **E. Goubalt.** Domains of Higer-Dimensional Automata. *Lecture Notes in Computer Science* **715** (1993).
5. **E. Goubalt.** The Geometry of Concurrency. PhD thesis, Ecole Normale Superieure. Available at http://www.dmi.ens.fr/goubault.
6. **T. Hune, M. Nielsen.** Timed Bisimulation and Open Maps. *Lecture Notes in Computer Science* **1450** (1998) 378–387.
7. **M. Joyal, M. Nielsen, G. Winskel.** Bisimulation from Open Maps. *Information and Computation* **127(2)** (1996) 378–387.
8. **V Pratt.** Modeling Concurrency with Geometry. *Proceedings of 18th ACM Symposium on Principles of Programming Languages.* ACM Press(1991).
9. **V. Sassone, G.L. Catani.** Higher-Dimensional Transition Systems. *Proceedongs of LICS'96.*
10. **G. Winskel, M. Nielsen.** Models for Concurrency. In *Handbook of Logic in Compiter Science* **4** (1995)