УДК 622.279.23

Вплив неусувної похибки на розрахунок газодинамічних параметрів руху газу в трубопроводі

Назарій Лопух

Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: lopuh_nazar@ukr.net

Моделювання технологічних об'єктів газотранспортної системи, в яку входять і підземні сховища газу, пов'язане зі значною невизначеністю параметрів як моделі, так і вхідних даних. Адекватність моделей значною мірою залежить від точності розв'язків відповідних задач математичної фізики, яка, в основному, визначається точністю вхідної інформації. Проведено ряд числових експериментів, метою яких було вивчення впливу збурення крайових і початкових умов задачі на її розв'язок. На основі одержаних результатів проаналізовано вплив похибки вхідних даних на газодинамічні параметри руху газу в трубопроводі.

Ключові слова: дискретизація, похибка, числовий метод, нестаціонарний процес.

Вступ. Рух газу в трубопроводі, в загальному випадку, описується системою взаємозв'язаних диференціальних нелінійних рівнянь у частинних похідних. Для розв'язування таких систем аналітичні методи побудовані для окремих випадків [1-3]. Тому для отримання їх розв'язку використовують ітераційні, числові, асимптотичні чи інші наближені методи [5, 6]. Очевидно, що кожен із них має певні межі свого застосування та дає можливість отримати значення шуканого розв'язку певного класу прикладних задач із достатньою точністю. Ефективніше поєднати декілька методів розв'язування, наприклад, ітераційного та числового. Таку ідею реалізовано в роботах [7, 8], у яких для отримання шуканого розв'язку запропоновано ітераційну схему в поєднанні з методом скінченних елементів (МСЕ).

Під час розв'язування прикладних задач на основі вхідної інформації, яка задається в дискретному вигляді з обмеженою точністю, головний вклад у неточність кінцевого результату вносить неусувна похибка, тобто похибка вхідних даних. Разом із тим застосування числових методів до розв'язування задач супроводжується похибкою методу, яку важко оцінити. У зв'язку з цим у роботі на основі числових експериментів проведено дослідження впливу похибки вхідних даних і дискретизації на точність кінцевого результату.

1. Постановка задачі

У більшості робіт для опису неусталеного ізотермічного руху газу в трубопроводі використовують таку нелінійну систему взаємозв'язаних диференціальних рівнянь у частинних похідних

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x}+\alpha\rho\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\upsilon^2}{2}\right)+\rho g\dfrac{\partial h}{\partial x}+\dfrac{\lambda\rho\upsilon^2}{2d}+\dfrac{\partial(\rho\upsilon)}{\partial t}=0, \\ \dfrac{\partial(\rho\upsilon)}{\partial x}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial p}{\partial t}=0. \end{cases} \tag{1}$$

Для замикання цієї системи рівнянь використовують рівняння стану газу, для якого існує багато подань у параметричній формі, зокрема,

$$p=\rho zRT .$$

Тут p,ρ,υ — відповідно тиск, густина та швидкість руху газу, g — прискорення вільного падіння, h — відносна висота залягання трубопроводу, λ — коефіцієнт гідравлічного опору, d — внутрішній діаметр трубопроводу, c — швидкість звуку в газі, α — коефіцієнт Коріоліса, $t>0$ — час, $x\in[0,l]$ — лінійна координата, l — довжина трубопроводу, R — газова стала, z — коефіцієнт стисливості, для обчислення якого застосовують емпіричну формулу [4]

$$z=\frac{1}{1+fp}, \tag{2}$$

де p вимірюється в атмосферах, а $f=\left(24-0,21t^{\circ}C\right)\cdot10^{-4}$ [1/атм], t°C — температура газу за Цельсієм. Формула (2) з достатньою для практики точністю описує відмінність реального газу від ідеального. Вона дозволяє враховувати залежність коефіцієнта стискуваності від тиску та температури газу під час розв'язування задач математичної фізики, зокрема в усталеному режимі руху газу.

Відомо, що температура газу змінюється вздовж трубопроводу, а відтак впливає на газодинамічні параметри процесу. Зміна на 5°C середньої температури газу в трубопроводі довжиною 100 км із внутрішнім діаметром 1,388 м приводить до зміни вихідного тиску від 0,5 до 1 атм. Залежність температури газу вздовж трубопроводу від координати задаємо формулою [6]

$$T(x)=T_{01}+T_{02}e^{-ax}, \tag{3}$$

де

$$T_{01}=T_{гр}-T_{00},\qquad T_{02}=T_0-T_{гр}+T_{00},$$

$$T_{00}=\frac{1}{al}\left[\Delta p\left(D_i-\frac{1}{C_p\rho_0}\right)+\frac{g\Delta h}{C_p}\right],\quad \Delta p=p_0-p_l,\quad a=\frac{k\pi d}{C_p\omega},$$

$T_{гр}$ — температура ґрунту, T_0 — температура газу на вході в трубопровід, D_i — коефіцієнт Джоуля-Томпсона, C_p — теплоємність газу за сталого тиску, ρ_0 — густина газу в стандартних умовах (температура $20^{\circ}C$, тиск 1атм), p_0 і p_l — значення тисків на вході та виході трубопроводу, k — коефіцієнт теплопередачі від трубопроводу до ґрунту, $\omega = \rho\upsilon$ — конвективний складник потоку маси.

За початкові умови вибрано розподіл тиску у вихідному усталеному режимі, який визначається співвідношенням

$$p(x,0) = \sqrt{p_0^2 - \frac{\lambda zRT}{d}\left(\frac{\rho_0 q_0}{s}\right)^2 x}\,, \tag{4}$$

де $s = \pi d^2/4$, q_0 — об'ємна витрата газу в стандартних умовах.

Розглядаємо трубопровід, який з'єднує послідовні компресорні станції. Оскільки на компресорних станціях є витратоміри, то природно граничні умови задавати на об'ємні витрати $q_0(t)$ на вході в трубопровід і $q_l(t)$ — на виході. Аналіз наявних експериментальних даних показує, що для їх апроксимації ефективними є функціональні залежності (5) і (6)

$$q_0(t) = q_{0n} + \left(q_0 - q_{0n}\right)e^{-\gamma_0 t}\,, \tag{5}$$

$$q_l(t) = q_{ln} + \left(q_l - q_{ln}\right)e^{-\gamma_l t}\,. \tag{6}$$

Тут q_0, q_{0n} — об'ємні витрати газу у вихідному та новому стаціонарному станах руху газу, γ_0 — параметр, який характеризує швидкість переходу з одного стану в інший на вході трубопроводу, а q_l, q_{ln}, γ_l — аналогічні параметри на виході трубопроводу. Граничні умови записуємо так

$$\omega\left(0,t\right) = \frac{\rho_{st}}{s}q_0(t)\,, \quad \omega\left(l,t\right) = \frac{\rho_{st}}{s}q_l(t)\,. \tag{7}$$

2. Метод розв'язування задачі

Однією з переваг МСЕ є те, що він дозволяє досліджувати фізичні процеси, які описуються диференціальними рівняннями з розподіленими параметрами. Для спрощення записів і більшої ілюстративності розв'язування задач математичної фізики часто використовують векторні та матричні подання величин. У випадку, що розглядається, шукані функції ω та p зручно подати як вектор $\mathbf{W} = (\omega, p)$. Тоді в матрично-векторній формі систему (1) запишемо так

$$\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{VW} + \mathbf{M}\,, \tag{8}$$

де $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} -m_2 & -m_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -m_4 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Тут $m_2 = \frac{\alpha b_\upsilon}{2d}$, $m_3 = \frac{\rho_0 T_0}{p_0 T} b_p \left(g \frac{dh}{dx} + \frac{\lambda a_\upsilon}{2d} \right)$, $m_4 = \frac{\rho_0 T_0}{p_0 T} a_p \left(g \frac{dh}{dx} + \frac{\lambda a_\upsilon}{2d} \right)$,

$$b_\upsilon = -\upsilon_1 \upsilon_2 - \frac{1}{8}(\upsilon_2 - \upsilon_1)^2, \quad a_p = p_1(1 + f p_1) - b_p p_1,$$

$$b_p = \frac{1}{p_1 - p_2}\left[p_1(1 + f p_1) - p_2(1 + f p_2) \right], \quad a_\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2, \quad p \in [p_1, p_2],$$

де p_1, p_2 — межі зміни тиску, а υ_1, υ_2 — межі зміни швидкості руху газу в трубопроводі.

Розв'язок відповідної задачі математичної фізики шукаємо в прямокутній області $[x_0 - x_N,\ t_0 - t_k]$, де x_0, x_N, t_0, t_k — початкові та кінцеві значення просторової та часової координат відповідно.

Ітераційна процедура розв'язування поставленої задачі з використання МСЕ полягає в наступному [7, 8].

- На першому етапі знаходимо аналітичний розв'язок лінеаризованої системи рівнянь. Отриманий розв'язок приймаємо за початкове наближення в ітераційній процедурі.
- На наступному кроці знайдений розв'язок використовуємо для визначення нев'язки й уточнення початкового наближення шуканого розв'язку.
- Процес ітерацій продовжуємо до того часу, поки різниця між двома послідовними наближеннями буде менша від заданої точності.

Відзначимо, що в лінеаризованому варіанті, який приймаємо для знаходження початкового наближення, отримуємо систему рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Її розв'язок можна знаходити аналітичним методом із використанням інтегрального перетворення Лапласа за часовою змінною або МСЕ. Якщо ж початкові або граничні умови задані в дискретному вигляді, то доцільніше застосовувати МСЕ.

3. Обчислювальний експеримент

Дослідження впливу похибки вхідних даних і параметрів дискретизації на точність результату проводили у ході обчислювального експерименту на трубопроводі довжиною $l = 100$ км, діаметром $d = 1{,}388$ м і з такими значеннями параметрів: $\lambda = 0{,}009$, $\rho_0 = 0{,}682$ кг/м^3, $T_0 = 313$°K, $R = 506{,}7$ Дж/кг °K, $z = 0{,}87$. Граничні умови задавали на поступлення та відбір газу, які змінювалися з часом від 1000 до 1200 м^3/с за експоненціальним законом. Крок за часом $dt = 40$ с, кількість елементів розбиття за координатою $n = 30$.

Алгоритм дослідження впливу похибки початкового розподілу тиску.

- Обчислюємо значення початково-граничних умов.
- Далі випадковим чином вводимо збурення тиску $\tilde{p}(x, \varepsilon)$ на величину ε.
- Розв'язуємо задачу з новими початковими умовами $\tilde{p}(x, \varepsilon)$.

Аналогічним чином досліджуємо вплив похибки граничних умов. Результати обчислень подані у вигляді таблиць і рисунків.

Таблиця 1

Розраховане значення запасу газу в трубопроводі для різних значень випадкової похибки ε (у відсотках) у початковому розподілі тиску вздовж трубопроводу

t	ε = 0	ε = 1	ε = 5	ε = 20
0	8755769	8736001	8706978	8829873
700	8755769	8740033	8667950	8623243
1400	8755769	8740536	8670458	8634948
2200	8755769	8741010	8670976	8643032
3000	8755769	8741118	8671076	8645807
4000	8755769	8741140	8671094	8645953

Таблиця 2

Різниця розрахованого значення запасу газу в трубопроводі для різних значень випадкової похибки ε (%) у початковому розподілі тиску у різні проміжки часу *t* (ε > 0)

t	ε = 1	ε = 5	ε = 20
100	4131	– 18346	– 215255
200	432	– 5486	631
300	597	– 1023	2950
500	– 643	– 12113	3340
700	– 485	– 2060	1704
1400	503	2508	11705
2200	474	518	8084
3000	108	100	2775
4000	22	18	146

Таблиця 3

Значення тиску в момент часу *t* = 4000 с внаслідок збурення тиску в усіх вузлах при різних значеннях похибки ε

x	ε = 0	ε = 1	ε = 5	ε = 10
0	63,293	63,352	64,305	63,902
10	61,280	61,443	60,583	62,912
20	59,184	59,256	60,128	59,922
30	56,967	57,136	56,346	58,661
40	54,642	54,730	55,515	55,536
50	52,167	52,345	51,630	53,950
60	49,545	49,654	50,345	50,636
70	46,724	46,916	46,283	48,643
80	43,688	43,826	44,414	45,050
90	40,364	40,579	40,038	42,508
100	36,688	36,870	37,340	38,462

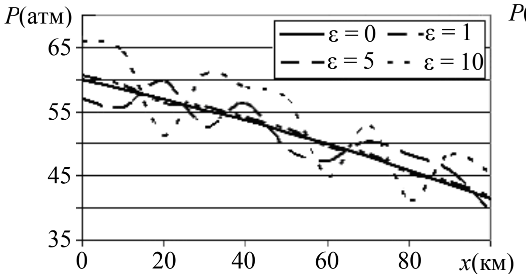

Рис. 1. Залежність розподілу тиску від координати в момент часу $t = 0$ внаслідок відхилення тисків в усіх вузлах на випадкові величини, що не перевищують ε (%)

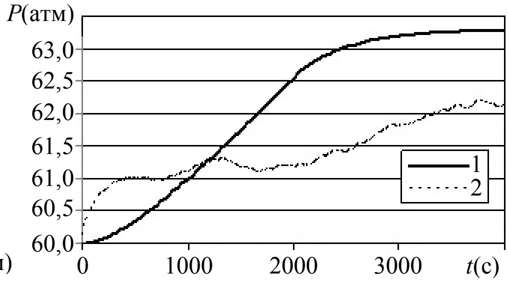

Рис. 2. Значення тиску на вході труби внаслідок збурення граничної умови на вході (крива 1: ε = 0, крива 2: ε = 10)

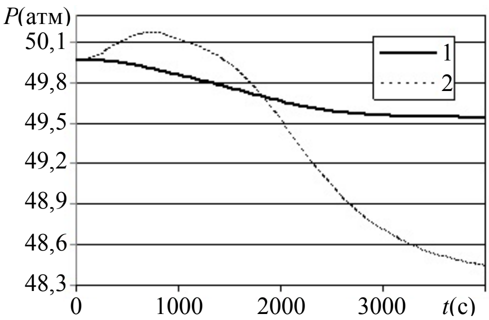

Рис. 3. Значення тиску посередині труби внаслідок збурення граничної умови на вході (крива 1: ε = 0, крива 2: ε = 10)

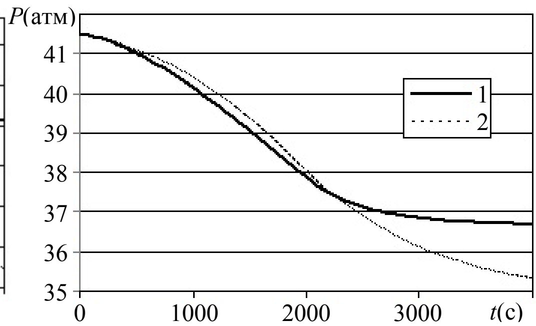

Рис. 4. Значення тиску на виході труби внаслідок збурення граничної умови на вході (крива 1: ε = 0, крива 2: ε = 10)

4. Аналіз результатів і висновки

Для прийнятих тут параметрів початковий запас газу в трубопроводі складав 8 755 769 м^3. Згідно з граничними умовами об’єм газу в трубопроводі не змінюється, оскільки кількість газу, що входить, дорівнює кількості газу, що виходить.

Бачимо, що похибка вхідних даних по-різному впливає на розподіл тиску в трубі. Аналіз результатів обчислень, поданих у табл. 1, показує, що наявність випадкової похибки в початковому розподілі тиску приводить до зміни запасу газу в трубопроводі, яка залежить від часу. Причому найбільша зміна є в початкові моменти часу, коли вагомими є перехідні режими. Оскільки запас газу не може змінюватися (у межах точності обчислень), то це можна використати, по-перше, для вибору кроку за часом у МСЕ і, по-друге, для вимог до точності вхідних даних під час розв’язування відповідних задач математичної фізики.

Починаючи з деякого часу (на рис. 2-4 це відповідає 2 300 с), збурення граничних умов суттєво впливає на розподіл тиску. Це можна пояснити швидкістю реакції уздовж труби на збурення крайових умов.

Враховуючи великі розміри трубопроводу та значення тиску, за якого проходить процес руху газу, незначна зміна тиску призводить до суттєвої зміни запасу газу в трубопроводі. Проведені числові експерименти показують, що для стабільного розрахунку газодинамічних параметрів (запасу газу, розподілу тиску тощо) точність задання крайових умов необхідно узгоджувати з точністю шуканого розв'язку, що вимагається під час розв'язування відповідної практичної задачі.

Із графіків на рис. 1-4 бачимо, що різниця між тисками на позначці 4 000 с приблизно однакова на всіх ділянках труби та складає ≈ 1,4 атм. Вплив збурення крайових умов на вході трубопроводу стає суттєвим тільки після 2 300 с (див. рис. 4). Це пояснюється швидкістю передачі збурення тиску вздовж труби.

Числові експерименти показали, що похибка вхідних даних по-різному впливає на зміну у часі розподілу тиску в трубі. Зокрема, проведені експерименти свідчать, що для конкретної задачі хід нестаціонарного процесу залежить від величини похибки початкового тиску, а також від розташування та кількості вузлів, у яких задається вхідна похибка.

Література

[1] *Александров, А. В.* Проектирование и эксплуатация систем дальнего транспорта газа / *А. В. Александров, Е. И. Яковлев*. — Москва: Недра, 1974. — 432 с.

[2] *Жидкова, М. А.* Трубопроводный транспорт газа / *М. А. Жидкова*. — Киев: Наук. думка, 1973. — 142 с.

[3] Трубопровідний транспорт газу / *М. П. Ковалко, В. Я. Грудз, В. Б. Михалків* та ін. — Київ: Арена, 2002. — 600 с.

[4] *Черникин, А. В.* Формула для расчета коэффициента гидралического сопротивления газопроводов / *А. В. Черникин, З. Т. Галиуллин* // Газовая промышленность. — 1998. — № 1. — С. 32-33.

[5] *П'янило, Я. Д.* Ітераційні методи гідравлічного розрахунку газових мереж / *Я. Д. П'янило* // Тези міжнар конф. «Проблеми чисельного аналізу і прикладної математики». — Україна, Львів, 2004. — С. 70-71.

[6] *П'янило, Я. Д.* Ітераційні методи розв'язування задач про розподіл тиску в трубопроводах / *Я. Д. П'янило, М. Г. Притула, Б. В. Землянський* // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. — 2005. — Вип. 1. — С. 97-105.

[7] Алгоритми розрахунку гідродинамічних параметрів течії газу в трубопроводах (1) / *Н. Лопух, М. Притула, Я. П'янило, Я. Савула* // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. — 2007. — Вип. 12. — С. 108-117.

[8] Алгоритми розрахунку гідродинамічних параметрів течії газу в трубопроводах (2) / *Н. Лопух, М. Притула, Я. П'янило, Я. Савула* // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. — 2008. — № 616. — С. 159-165.

Influence of input error on the gas-dynamic parameters of gas motion in a pipeline

Nazarii Lopukh

Modelling of technological objects of gas transportation system, which includes an underground gas storage facility is related with considerable uncertainty of both model parameters and input data. Adequacy of models largely depends on the accuracy of decisions related problems of mathematical physics, which is mainly determined by the accuracy of input data. A series of numerical experiments aimed at investigations of the influence of perturbation of boundary and initial conditions of the problem on its solution are carried out. Using the results of investigation of the influence of input data errors on the gas-dynamic transportation parameters of a gas pipeline are presented.

Влияние неустранимой погрешности на газодинамические параметры движения газа в трубопроводе

Назарий Лопух

Моделирование технологических объектов газотранспортной системы, в которую входят и подземные хранилища газа, связано с значительной неопределенностью параметров как модели, так и входных данных. Адекватность моделей в значительной степени зависит от точности решений соответствующих задач математической физики, определяющейся в основном точностью входной информации. Проведен ряд численных экспериментов, целью которых было изучение влияния возмущения краевых и начальных условий задачи на ее решение. На основе полученных результатов проанализировано влияние погрешности входных данных на газодинамические параметры движения газа в трубопроводе.

Отримано 16.09.09