УДК 621.372

Різницевий метод аналізу жорстких коливних систем та умови його стійкості

Василь Заяць

Д. т. н., доцент, Львівський державний інститут новітніх технологій та управління ім. В. Чорновола, вул. ген. Чупринки, 130, Львів, 79057, e-mail: zvm01@rambler.ru

Запропоновано метод проведення дискретизації неперервної динамічної системи, приведеної до нормальної форми Коші, та показано доцільність його застосування для аналізу жорстких систем. Отримано умови стійкості методу й оцінено величину похибки. Доцільність застосування запропонованого різницевого методу підтверджено розрахунком кварцових генераторів із високою добротністю, генераторних схем із тривалими перехідними процесами, що працюють у режимі дискретного часу, та консервативних систем.

Ключові слова: дискретна модель, неперервна система, матриця Якобі, стійкість, похибка дискретизації.

Вступ. У роботі запропоновано новий різницевий метод для формування різницевих рівнянь під час проведення числового аналізу динамічних систем, що приведені до нормальної форми Коші. Різницеву схему побудовано таким чином, щоб забезпечити отримання наступної дискретної точки для змінних стану на інтегральній кривій, що відповідає неперервній моделі динамічного процесу для скінченної величини кроку інтегрування, з гарантовано обмеженою похибкою.

Показано доцільність застосування розробленого різницевого методу до аналізу як автономних, так і систем із зовнішнім збуренням, у тому числі, у реальних кварцових генераторах із високою добротністю [1, 2] та генераторних схемах із тривалими перехідними процесами [3, 4], що працюють у режимі дискретного часу, а також аналізу поведінки об’єктів складної динамічної природи, таких як системи розпізнавання користувачів комп’ютерів за їх рукомоторними діями на основі ймовірнісного підходу [5] і системи дискретної природи [6].

Слід зазначити, що виникненню та розвитку теорії як неперервних, так і дискретних коливних систем значною мірою сприяли відомі роботи Ван-дер-Поля, А. А. Андронова, С. Е. Хайкіна [7-8], які ґрунтуються на методі повільно-змінних амплітуд [7], роботи І. М. Крилова., М. М. Боголюбова, Ю. А. Митропольського [9], у яких розроблено нелінійні асимптотичні методи. Оскільки отримані за такого підходу рівняння наближені, то ряд ефектів, таких як генерація на квазігармоніках, хаотичні рухи, біфуркаційні значення параметрів, за яких відбувається зміна динаміки системи, не було виявлено.

У цій роботі запропоновано підхід до побудови дискретної моделі для дослідження цих явищ. Дану різницеву схему апробовано під час аналізу консервативних коливних систем із відомим аналітичним розв’язком, реальних генераторних схем із високою добротністю та кварцових генераторів із тривалими перехідними процесами.

Приведено також оцінки точності та стійкості методу, порівняно з найуживанішим неявним методом трапецій, який застосовують для аналізу жорстких систем.

1. Підходи до побудови дискретних моделей

Із метою підвищення точності та відповідності математичних моделей складних об’єктів і процесів під час їх побудови необхідно враховувати значну кількість параметрів моделі та зовнішніх впливів. Відомо, що нехтування кількісно незначними параметрами може істотно спотворити поведінку реального об’єкта. Необхідність врахування значної кількості параметрів може призвести до підвищення порядку системи рівнянь, що описує модель і її жорсткості. Зазначимо, що жорсткість є властивість моделі чи об’єкта, а не самого чисельного методу.

Поняття жорсткості системи диференціальних рівнянь пов’язане з труднощами, які виникли під час чисельного інтегрування цих рівнянь явними методами. Розрахунок системи з малим кроком після загасання перехідних процесів, зумовлених швидкими рухами, призводить до того, що будь-яка спроба збільшення кроку зумовлює зростання похибки знайденого розв’язку за експоненціальним законом через те, що він стає нестійким. У зв’язку з цим розроблені неявні методи (Ейлера, Рунге-Кутта, багатокрокові методи Адамса-Мултона, Гіра, формули диференціювання назад) із метою забезпечення можливості зміни кроку обчислень у широких межах і забезпечення незалежності результатів від вихідних даних на окремих відрізках розв’язку з різними швидкостями зміни складників розв’язку та похідних від них. Прикладом жорсткої моделі є модель, у якій об’єднано системи з різними постійними часу. У загальному випадку жорсткість може бути відчутною й у системах, які є результатом формального об’єднання та нежорстких систем. У такому випадку розв’язок нової системи може суттєво відрізнятися від розв’язків окремих систем і описувати принципово нове явище чи процес. Прикладом таких систем можуть бути моделі дискретних систем [6, 10, 12, 17-19], для яких дискретність є природний спосіб їх існування, а не результат штучної дискретизації неперервних систем.

Жорсткі системи є математичні моделі об’єктів складної природи, широкий діапазон зміни часових характеристик яких пов’язаний із фізичною природою спостережуваних явищ, самих об’єктів чи процесів, що в них відбуваються. Жорсткі системи, з фізичної точки зору, часто називають системами з сильно рознесеними постійними часу або, з математичної точки зору, системами з великим значенням константи Ліпшиця, під якою розуміють норму матриці Якобі правих частин диференціальних рівнянь, що описують поведінку досліджуваної системи. Будемо вважати систему жорсткою, якщо коефіцієнт жорсткості, який визначається відношенням модуля дійсної частини власного значення матриці Якобі, що приймає найбільше значення (максимум), до модуля дійсної частини власного значення

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2010, вип. 11, 73-80

матриці Якобі, що приймає найменше значення (мінімум), перевищує десять. Це означає, що власні значення матриці Якобі рознесені більше, ніж на порядок і в системі існують як швидкі, так і повільні рухи. Для успішного аналізу динаміки таких систем необхідно мати надійні чисельні методи, які б, з однієї сторони, володіли властивістю *A*-стійкості [13-16], а з другої — дозволяли змінювати крок інтегрування в широких межах, забезпечуючи при цьому якісну відповідність моделі реальному процесу чи явищу [1-5].

У зв'язку з цим, розроблено значну кількість спеціальних неявних методів для розв'язування жорстких систем із великою кількістю параметрів і постійних часу, що мають великий розкид власних значень.

Задамося метою побудувати модель коливного процесу, в якій можливе виникнення й існування гармонійних коливань із бажаною частотою, амплітудою та формою коливань за зміни параметрів системи та початкових умов.

Під час побудови такої моделі слід виходити з того, що для малих значень амплітуди коливань рух повинен відбуватися у бік її збільшення, а для великих амплітуд — у бік зменшення. Цього можна досягти шляхом введення в матрицю переходу станів (матрицю монодромії) деякої функції f від амплітуди коливань r, яка має ділянку з від'ємною швидкістю зміни, принаймні, для великих значень амплітуд. При цьому в околі нульового положення рівноваги абсолютна величина швидкості (якщо вона від'ємна) не перевищує одиниці та для великих значень амплітуд добуток функції f на величину амплітуди r прямує до нуля зі збільшенням амплітуди коливань. Таким чином, на роль базових функцій під час побудови дискретних моделей можуть претендувати суттєво нелінійні функції, що мають ділянки як повільних, так і швидких рухів, а також ділянку з від'ємною похідною в області великих значень амплітуд.

Із метою забезпечення заданої частоти коливань необхідно задати початкове значення фази коливань. Для цього в матрицю переходу станів введемо гармонійні функції, в яких незалежною змінною буде початкова фаза коливань.

Нарешті, зміни амплітуди коливань моделі в широкому діапазоні найпростішим способом можна досягти, якщо ввести постійний коефіцієнт у матрицю переходу станів як ще один із співмножників.

Таким чином, можна запропонувати дискретну модель коливної системи другого порядку загального вигляду

$$\begin{bmatrix} x_{m+1} \\ y_{m+1} \end{bmatrix} = a\, f\left(-r_m\right) \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix}, \tag{1}$$

де x_m, y_m — змінні стану в m-ій точці дискретизації; $r_m = x_m^2 + y_m^2$ — квадрат амплітуди можливих коливань; φ — початкова фаза коливань; a — постійний параметр, зміна якого дозволяє забезпечити широкий діапазон зміни амплітуди коливань.

Оскільки йдеться про побудову моделей другого порядку, то, комбінуючи нелінійні функції від амплітуди коливань і використовуючи різні тригонометричні функції для задання початкової фази коливань, можна отримати цілий клас моделей із симетричною, кососиметричною та несиметричною матрицями переходу станів [17]. Кожна з таких моделей відрізняється своєю динамікою та потребує детального дослідження.

У роботі [11] проведено аналіз моделі (1) за вибору як базової функції $f(r) = \exp\left(-\sqrt{r}\right)$ і показано існування стійких гармонійних коливань під час зміни параметра a від одиниці до e^2, де e — основа натурального логарифма. Шляхом комп'ютерного моделювання виявлено квазігармонійні коливання як парного, так і непарного порядків. Зважаючи на відсутність повторення амплітуди коливань за великої кількості дискрет, а також нерегулярність заповнення фазових портретів коливань висловлено також припущення про існування хаотичних рухів у такій моделі [19], що підтверджено результатами комп'ютерного моделювання на прикладі побудови системи розпізнавання користувачів комп'ютера за їх рукомоторними реакціями [6]. Застосування моделі (1) до опису цієї системи розпізнавання на основі рукомоторних реакцій (часових затримок під час натискання клавіш комп'ютера) користувача комп'ютера дозволило підвищити ефективність розпізнавання в 1,5 рази внаслідок встановлення часового інтервалу для формування неперервних послідовностей рукомоторних реакцій і відсікання будь-яких непередбачуваних рухів.

Другий підхід до створення дискретних моделей, хоча правильніше назвати їх різницевими моделями, ґрунтується на проведенні дискретизації неперервних систем шляхом застосування різницевих схем (чисельних методів), які будуються таким чином, щоб забезпечити якісну відповідність дискретної (різницевої) моделі початковій.

2. Нова різницева схема побудови дискретних моделей та її аналіз

Серед значної кількості неявних чисельних методів (неявні методи Ейлера, Рунге-Кутта, багатокрокові методи Адамса-Мултона, Гіра, формули диференціювання назад, що ґрунтуються на застосуванні поліномів Лежандра [8, 10-12, 14-17]) широке застосування для аналізу жорстких систем знайшли методи зі змінним кроком обчислень, що дають змогу реалізувати основну перевагу неявних методів, порівняно з явними — зміну кроку в широких межах під час знаходження зображуючої точки фазової площини на ділянках із різною швидкістю її руху. Методи вище другого порядку складності, які потребують задання більше двох точок дискретизації, практично, не застосовуються. Це зумовлено, з однієї сторони, зростанням обчислювальної складності алгоритмів, а з другої тим, що методи другого порядку дозволяють прослідковувати динаміку системи будь-якої природи та поведінки.

Як засвідчує аналіз літературних джерел, у значній частині прикладних досліджень динаміки коливних систем використовують метод трапецій, різницева формула якого має вигляд

$$x[n+1] = x[n] + \frac{h}{2}\left(f\left[x[n], t_n\right] + f\left[x[n+1], t_{n+1}\right]\right), \tag{2}$$

де h — величина кроку інтегрування; t_n, t_{n+1} — дискретні моменти часу в сусідніх часових відліках; $x[n]$, $x[n+1]$ — значення змінних стану в n-ій та $n+1$-ій точках

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2010, вип. 11, 73-80

дискретизації; $f[x[n], t_n], f[x[n+1], t_{n+1}]$ — значення правих частин диференціальних рівнянь досліджуваної системи, приведених до нормальної форми Коші.

Формула (2) є усереднення явної та неявної різницевих схеми Ейлера і поправка до змінної стану в черговій точці дискретизації визначається в момент часу, що відповідає половині величини кроку інтегрування. Вона співпадає з методом Адамса-Башфорта першого порядку та близька до явного методу Хейна, в якому точне значення похідної в кінці інтервалу обчислень замінено на наближене значення похідної, обчисленої всередині кроку інтегрування.

Для підвищення точності методу трапецій доцільно його модифікувати таким чином, щоб забезпечити точне попадання в $n+1$ точку дискретизації під час проведення інтегрування за умови, що значення змінних стану в n-ій точці вирахувані точно. Цього можна досягнути, якщо у співвідношенні (2) крок інтегрування буде змінний, а похідні (праві частини диференціальних рівнянь) вирахувані в такий момент на часовому інтервалі h, аби сумарна поправка за рахунок явного методу Ейлера (другий доданок правої частини формули (2)) та неявного методу Ейлера (третій доданок правої частини формули (2)) забезпечувала значення $x[n+1]$, що відповідає значенню $x(t)$ у момент часу t_{n+1}. Таким чином, різницеву схему будуємо у вигляді

$$x[n+1] = x[n] + h\left(\mu f\left[x[n], t_n\right] + (1-\mu) f\left[x[n+1], t_{n+1}\right]\right), \tag{3}$$

де $0 < \mu < 1$ визначається в момент перетину дотичних до фазової траєкторії, які побудовані в моменти часу t_n і t_{n+1}.

Оскільки неможливо на основі рівнянь двох дотичних, проведених до однієї кривої у різні моменти часу, однозначно визначити значення параметра μ, то будемо його визначати в той момент, коли вклади поправок явного та неявного методів Ейлера у формулі (3) є рівноцінні. В загальному випадку така різницева схема не буде точна, але вона гарантує обмежену величину максимальної похибки дискретизації (похибка менша від різниці $f_{n+1} - f_n$) на кожному кроці. Таким чином, з умови

$$\mu f\left[x[n], t_n\right] = (1-\mu) f\left[x[n+1], t_{n+1}\right]$$

одержуємо, що

$$\mu = \frac{f\left[x[n+1], t_{n+1}\right]}{f\left[x[n+1], t_{n+1}\right] + f\left[x[n], t_n\right]}.$$

Отже, отримуємо різницеву схему для побудови дискретних моделей систем із наявними ділянками швидких і повільних рухів

$$x[n+1] = x[n] + 2h\frac{f\left[x[n+1], t_{n+1}\right] f\left[x[n], t_n\right]}{f\left[x[n+1], t_{n+1}\right] + f\left[x[n], t_n\right]}. \tag{4}$$

Результати комп'ютерного моделювання підтверджують право на існування такої схеми, оскільки забезпечують адекватне відтворення характеристик усталеного режиму коливних контурів без втрат, генераторних схем із високою добротністю, кварцових генераторів із тривалими перехідними процесами [20]. Недоліком наведеної схеми, порівняно з методом трапецій, є його більша алгоритмічна складність (майже вдвічі). Перевага схеми полягає в тому, що за співмірної точності з методом трапецій на одному кроці інтегрування, розроблений метод суттєво розширює область збіжності обчислювальних процедур. Це підтверджено результатами комп'ютерного аналізу генератора Ван дер Поля у разі введення в рівняння, що його описує, кубічної нелінійності та під час розрахунку генераторних схем із тривалими перехідними процесами, що описуються диференціальними рівняннями високих порядків. Якщо за використання методу трапецій необхідно застосовувати методи пришвидшення пошуку усталених режимів [3, 4, 11, 12] для забезпечення збіжності процесу вирахувань, то за використання різницевого методу, поданого формулою (4), можна обійтися без цього. Застосування схеми (4) забезпечує виграш у часі розрахунку в 3-8 разів, залежно від величини добротності розглядуваної моделі. Порівняння проводилося з методом трапецій.

Розроблений метод, як і метод трапецій, володіє властивістю *A*-стійкості, якщо крок інтегрування не перевищує подвійної оберненої величини до модуля дійсної частини максимального власного значення досліджуваної системи. У цьому легко переконатися, розглянувши характеристичне рівняння для тестової моделі

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z$$

із застосуванням різницевої схеми (4). Справді, різницеве рівняння у цьому випадку набуває вигляду

$$z^2\left[n+1\right] = z^2\left[n\right] + 2\lambda h\, z\left[n\right] z\left[n+1\right].$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$y^2 - 2h\lambda y - 1 = 0$$

задовольняє умову стійкості для $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, якщо

$$z = h\lambda \pm \sqrt{1 + h^2\lambda^2} < 1.$$

Остання умова виконується, якщо

$$h < \frac{2}{|\lambda|},$$

що завжди забезпечується під час проведення вирахувань для збіжності цього процесу, оскільки в силу теореми Котельникова дискретні вибірки задовольняють умову

$$h \le \frac{1}{2|\lambda|}.$$

Зазначимо, що формулу (4) виписано для неавтономної системи. Вона застосовна і для дискретизації автономних систем. У цьому випадку в функції *f*, що стоять у правій частині (4), час не входить у явному вигляді.

Для оцінки точності формули (4) застосовувався підхід, описаний у роботах [1, 20]. Суть підходу ґрунтується на співставленні розв'язків, знайдених методом гармонічного балансу, для вихідної системи та її різницевого аналога або розгляді таких моделей, для яких точний розв'язок є відомий. Проведений аналіз підтвердив правомірність застосування формули (4) до аналізу консервативних систем, автогенераторів із високою добротністю та тривалими перехідними процесами, аналізу динамічних систем зі складною динамікою [20].

Висновки. На основі запропонованого підходу побудовано дискретну коливну модель, яка володіє ширшим діапазоном коливних рухів, порівняно з існуючими моделями.

Застосування розробленого підходу до опису автоматизованої системи розпізнавання користувача комп'ютера, яка працює в режимі дискретного часу, дозволило підвищити її ефективність на 30 %.

На основі запропонованого підходу побудовано різницеву схему для дискретизації неперервних систем коливної природи, *A*-стійкість якої підтверджено результатами комп'ютерного моделювання й аналізом тестової системи. При цьому забезпечується якісна відповідність отриманої дискретної моделі її вихідному зразку. Запропоновано підхід для оцінки точності розробленої дискретної схеми для адекватного відтворення широкого діапазону коливних рухів: гармонійних коливань, квазігармонійних режимів різної кратності, коливань у системах без втрат.

Запропоновану різницеву схему доцільно використовувати як для оптимального проектування реальних пристроїв із бажаними інформаційними характеристиками, так і для конструювання алгоритмів розпізнавання коливних явищ зі складною динамікою, а також об'єктів, що працюють у режимі дискретного часу.

Література

[1] *Заяц, В. М.* Погрешность определения амплитуды и частоты автоколебательных систем при использовании метода Линигера-Уилаби / *В. М. Заяц* // Теоретическая электротехника. — 1984. — С. 83-88.

[2] *Синицкий, Л. А.* О поиске периодических режимов в нелинейных цепях численными методами / *Л. А. Синицкий, Ю. М. Шумков* // Теоретическая электротехника. — 1970. — Вып. 9. — С. 110-115.

[3] *Aprille, T.* A computer algorithm to determine the steady-state response of nonlinear oscillators / *T. Aprille, T. Trick* // IEEE Trans. on Circuit Theory. — 1972. — Vol. CT-19, No 4. — P. 354-360.

[4] *Заяц, В. М.* Ускоренный поиск установившихся режимов в высокочастотных автогенераторах с длительными переходными процессами / *В. М. Заяц* // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 1993. — № 3. — С. 26-32.

[5] *Заяць, В. М.* Комп'ютерна система ідентифікації особи за її рукомоторними реакціями / *В. М. Заяц* // Праці міжнар. конф. «Штучний інтелект». Т. 2. — Крим: 2002. — С. 180-185.

[6] Динамика одномерных отображений / *А. Н. Шарковский, С. Ф. Коляда, А. Г. Сивак, В. В. Федоренко*. — Київ: Наук. думка, 1989. — 216 с.

[7] *Андронов, А. А.* Теория колебаний / *А. А. Андронов, А. А. Вит, С. Е. Хайкин*. — Москва: Наука, 1981. — 400 с.

[8] *Бутенин, Н. В.* Введение в теорию нелинейных колебаний / *Н. В. Бутенин, Ю. И. Наймарк, Н. А. Фуфаев*. — Москва: Наука, 1976. — 354 с.

[9] *Боголюбов, Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский*. — Москва: Физматгиз, 1963. — 440 с.

[10] *Видаль, П.* Нелинейные импульсные системы / *П. Видаль*. — Москва: Энергия, 1974. — 336 с.

[11] *Заяц, В. М.* Построение и анализ модели дискретной колебательной системы / *В. М. Заяц* // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 4. — С. 161-165.

[12] *Заяць, В. М.* Моделі дискретних коливних систем / *В. М. Заяць* // Комп'ютерні технології друкарства. — 1998. — С. 37-38.
[13] *Фельдман, Л. П.* Чисельні методи в інформатиці / *Л. П. Фельдман, А. І. Петренко, О. А. Дмітрієва*. — Київ: Видавнича група BHV, 2006. — 480 с.
[14] *Холл, Д.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / *Д. Холл, Д. Уатт*. — Москва: Мир, 1979. — 312 с.
[15] *Форсайт, Д.* Машинные методы математических вычислений / *Д. Форсайт, Н. Мальком, К. Моулер*. — Москва: Мир, 1980. — 282 с.
[16] *Штеттер, Х.* Анализ дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений / *Х. Штеттер*. — Москва: Мир, 1978. — 462 с.
[17] *Заяць, В. М.* Клас функцій для побудови дискретних моделей коливних систем / *В. М. Заяц* // Ювілейна наук.-техн. конф. «КРА-40». — Львів: 2004. — С. 31-32.
[18] *Шустер, Г.* Детерминированный хаос: введение: пер. с англ. / *Г. Шустер*. — Москва: Мир, 1988. — 240 с.
[19] *Zayats, V.* Chaos searching algorithm for second order oscillatory system / *V. Zayats* // Proc. International Conf. «TCSET-2002». — Lviv-Slavske: 2002. — P. 97-98.
[20] *Заяць, В. М.* Методи, алгоритми та програмні засоби для моделювання та аналізу динаміки складних об'єктів та систем на основі дискретних моделей / *В. М. Заяць.* — Львів: Новий світ 2000, 2009. — 400 с.

Discrete method for the analysis of the rigid oscillating systems and condition of its stability

Vasyl Zayats

The approach to the construction of the oscillating system discrete model which possesses a wide range of steady dynamic regimes has been developed. The method of discretization of the continuous dynamic system in the normalized Cauchy form and a necessity of its application for the analysis of the rigid systems have been shown. The conditions of the method stability have been obtained and the error value has been estimated. The expediency of the discrete method application has been proved by the calculation of quartz generators of high quality, generator charts with long transition processes, that work in the regime of discrete time, and conservative systems.

Дискретный метод анализа жёстких динамических систем и условия его стабильности

Васыль Заяць

Предложен метод проведения дискретизации непрерывной динамической системы, приведенной к нормальной форме Коши, и показана целесообразность его применения для анализа жестких систем. Получены условия устойчивости метода и оценена величина погрешности. Целесообразность применения предложенного разностного метода подтверждена расчетом кварцевых генераторов высокой добротности, генераторных схем с длительными переходными процессами, работающих в режиме дискретного времени, и консервативных систем.

Представлено професором Я. Савулою

Отримано 12.01.09