УДК 539.3

Приповерхнева неоднорідність напружено-деформованого стану суцільного циліндра за врахування дисипативних процесів

Зоя Бойко

Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: zoya@cmm.lviv.ua

Співвідношення запропонованої раніше математичної моделі механіки пружних деформівних систем використано для вивчення напружено-деформованого стану необмеженого суцільного циліндра. Згадана модель описує формування приповерхневих неоднорідностей, яке пов'язується як із процесом локального зміщення маси, так і з дисипативними процесами. Встановлено, що за нехтування у рівняннях стану ефектами взаємовпливу процесів деформування та локального зміщення маси, приповерхнева неоднорідність компонент тензора напружень і хімічного потенціалу зумовлена протіканням у тілі дисипативних процесів. Показано, що поверхневим напруженням властивий розмірний ефект.

Ключові слова: дисипативні процеси, локальне зміщення маси, приповерхневі явища, розмірний ефект.

Вступ. Наукові основи термодинаміки поверхневих явищ розвинуті Гіббсом [1]. Приймається, що поверхневий шар є новою «поверхневою фазою». З огляду на те, що товщина поверхневого шару надзвичайно мала порівняно з іншими двома вимірами, його трактують як геометричну поверхню. Гріффітсом [2] введено у розгляд поверхневу енергію (поверхневий натяг), яка дорівнює роботі, необхідній для формування нової поверхні.

Для врахування поверхневих ефектів у твердих тілах приповерхневий шар, зазвичай, моделюють тонкою оболонкою, характеристики матеріалу якої відмінні від відповідних характеристик внутрішніх областей тіла [3, 4]. Нелокальні теорії, які передбачають залежність локального термодинамічного стану тіла у заданій точці від стану в його сусідніх точках, описують приповерхневу неоднорідність за об'ємного підходу. Цю залежність враховують або функціональними визначальними співвідношеннями просторового типу [5, 6], або шляхом збагачення простору параметрів стану градієнтами тензора деформації вищих порядків [7-13]. Набув розвитку також інший підхід, а саме локально-градієнтний [14], за якого приповерхневі явища описували завдяки урахуванню процесу локального зміщення маси [15-17].

У дослідженнях [18, 19] процес локального зміщення маси пов'язувався з упорядкуванням структури фізично-малого елемента тіла. Необоротність цього процесу враховано у праці [19], що дозволило дослідити кінетику становлення приповерхневої неоднорідності напружено-деформованого стану пружних тіл.

Енергетичний підхід до термодинамічного опису формування приповерхневих явищ у термопружних тілах і, зокрема, встановлення стаціонарного стану тіла, наведено у роботі [20].

У працях [21, 22] шляхом поєднання енергетичного та термодинамічного підходів запропоновано математичну модель механіки пружних систем, у якій формування приповерхневих неоднорідностей пов'язано як з локальним зміщенням маси, так і дисипативними процесами. Дослідження напружено-деформованого стану пружного півпростору з використанням визначальних співвідношень моделі [22] проведено в [23].

Метою цієї роботи є побудова й аналіз розв'язку задачі про напружено-деформований стан нескінченного суцільного ізотропного циліндра. При цьому за основу беремо співвідношення моделі механіки пружних деформівних систем, одержані у праці [22].

1. Вихідні співвідношення моделі

Визначальні співвідношення моделі механіки пружних деформівних систем, у якій формування приповерхневих неоднорідностей пов'язане з урахуванням процесу локального зміщення маси та з дисипативними процесами, спричиненими переходом тіла з вихідного природного (однорідного) стану до градієнтного стаціонарного, мають вигляд [22]

$$\frac{1}{3}\sigma^* = -\frac{P_{(0)}}{\rho_{(0)}} + K_* e - \beta\left(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M\right), \qquad \left(\hat{\sigma}^s\right)^d = 2G\hat{e}^d,$$
$$\mu - \mu_{(0)} = \alpha\left(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M\right) - \beta e. \tag{1}$$

Тут $\frac{1}{3}\sigma^*$ — кульовий складник симетричної частини $\hat{\sigma}^s$ тензора напружень Піоли-Кірхгофа першого роду $\hat{\sigma}$; $e = \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}$ — об'ємна деформація фізично малої підсистеми; $\vec{u}$ — вектор переміщення; $\left(\hat{\sigma}^s\right)^d = \hat{\sigma}^s - \sigma\hat{I}/3$ — девіатор симетричної частини $\hat{\sigma}^s$ тензора напружень Піоли-Кірхгофа першого роду $\hat{\sigma}$; $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^s + \hat{\sigma}^a$; $\hat{\sigma}^a$ — антисиметрична частина $\hat{\sigma}$; $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$; $\hat{e}^d = \hat{e} - e\hat{I}/3$ — девіатор тензора деформації $\hat{e}$; μ — хімічний потенціал; $\vec{\Pi}_M = \int_{t_0}^{t} \vec{J}_M d\tilde{t}$ — вектор локального зміщення маси; $\vec{J}_M$ — потік маси, спричинений локальним зміщенням маси; $K_* = K - \frac{2P_{(0)}}{\rho_{(0)}} - \frac{1}{\rho_{(0)}^2}\frac{\partial P}{\partial(1/\rho)}\bigg|_{(1/\rho_{(0)})}$; $P_{(0)}, \rho_{(0)}, \mu_{(0)}$ — тиск, густина маси та хімічний потенціал у безмежному однорідному середовищі за відсутності зовнішнього навантаження; K, G — модулі об'ємного стиску та зсуву; $\alpha = \left(\frac{\partial\left(\mu - \mu_{(0)}\right)}{\partial\left(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M\right)}\right)_0$,

$\beta = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\partial \sigma^*}{\partial\left(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M\right)}\right)_0$; $\vec{\nabla}_0$ — диференціальний оператор Гамільтона у відліковій конфігурації; $\hat{I}$ — одиничний тензор.

Відповідно симетрична частина $\hat{\sigma}^s$ тензора напружень $\hat{\sigma}$ така

$$\hat{\sigma}^s = \left[-\frac{P_{(0)}}{\rho_{(0)}} + K_* e + \beta\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M\right)\right]\hat{I} + 2G\hat{e}^d . \tag{2}$$

Вихідні співвідношення для опису дисипативних процесів (без урахування ефектів їх взаємовпливу) мають вигляд [22]

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{\sigma} + \vec{f}^+ = \beta_1 \vec{u} , \quad \vec{\sigma}^a = -G'\vec{\varphi} ,$$
$$\vec{\nabla}_0\left(\mu - \mu_{(0)}\right) = \beta_2\left(-\vec{\Pi}_M\right), \tag{3}$$

де $\vec{f}^+$ — вектор густини об’ємних сил; $\vec{\sigma}^a$ — супутній вектор до антисиметричного тензора напружень $\hat{\sigma}^a$; $\vec{\varphi} = \dfrac{1}{2}\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}$; β_1, β_2, G' — коефіцієнти дисипативних процесів; «×»— знак векторного добутку.

Ключову систему рівнянь моделі з урахуванням рівнянь стану (1) і рівнянь для дисипативних процесів (3) подамо відносно векторів переміщення $\vec{u}$ та локального зміщення маси $\vec{\Pi}_M$

$$G\Delta\vec{u} + \left(K_* + \frac{1}{3}G\right)\vec{\nabla}_0\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\right) - G'\vec{\nabla}_0 \cdot \left[\hat{\epsilon} \cdot \left(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}\right)\right] - \beta_1\vec{u} + f^+ = -\beta\vec{\nabla}_0\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M\right),$$
$$\alpha\vec{\nabla}_0\left(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M\right) + \beta_2\vec{\Pi}_M = \beta\vec{\nabla}_0\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\right). \tag{4}$$

Тут Δ — оператор Лапласа, $\hat{\epsilon}$ — антисиметричний тензор третього рангу Леві-Чивіта.

При цьому антисиметрична частини $\hat{\sigma}^a$ тензора напружень $\hat{\sigma}$ буде

$$\hat{\sigma}^a = -G'\hat{\epsilon} \cdot \left(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}\right). \tag{5}$$

За умови нехтування взаємовпливом процесів деформування та локального зміщення маси у рівняннях стану (1), ключова система рівнянь (4) розпадається на систему двох незв’язаних рівнянь

$$G\Delta\vec{u} + \left(K_* + \frac{1}{3}G\right)\vec{\nabla}_0\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\right) - G'\vec{\nabla}_0 \cdot \left[\hat{\epsilon} \cdot \left(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}\right)\right] - \beta_1\vec{u} + \vec{f}^+ = 0 , \tag{6}$$

$$\alpha\vec{\nabla}_0\left(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\Pi}_M\right) + \beta_2\vec{\Pi}_M = 0 . \tag{7}$$

Під час розв’язування відповідних задач математичної фізики для забезпечення однозначності їх розв’язків ключову систему рівнянь моделі (4) чи систему двох незв’язаних рівнянь (6), (7) слід доповнити відповідними граничними умовами.

2. Постановка та розв'язування крайової задачі для нескінченного суцільного циліндра

Розглянемо нескінченний ізотропний деформівний суцільний круговий циліндр із радіусом R_0, який віднесений до циліндричної системи координат (ρ, θ, z). Вважаємо, що поверхня циліндра перебуває під впливом зовнішнього середовища, дію якого враховуємо шляхом задання на $r = R_0$ тиску p^+ і хімічного потенціалу μ^+. Тоді компоненти тензора напружень $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$, векторів переміщення $\vec{u} = (u_r, 0, 0)$ і локального зміщення маси $\vec{\Pi}_M = (\Pi_{Mr}, 0, 0)$ є функції лише радіальної координати r. У результаті ключова система рівнянь (4) набуває вигляду

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\right)u_r - \frac{\beta_1}{\Lambda}u_r = -\frac{\beta}{\Lambda}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\right)\Pi_{Mr},$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\right)\Pi_{Mr} - \frac{\beta_2}{\alpha}\Pi_{Mr} = -\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\right)u_r. \quad (8)$$

Граничні умови на поверхні циліндра $r = R_0$ такі

$$\left. -\frac{P_{(0)}}{\rho_{(0)}} + \beta\frac{d\Pi_{Mr}}{dr} + \beta\frac{1}{r}\Pi_{Mr} + \left(K_* - \frac{2}{3}G\right)\frac{1}{r}u_r + \Lambda\frac{du_r}{dr}\right|_{r=R_0} = -p^+,$$

$$\left. \mu_{(0)} - \alpha\frac{d\Pi_{Mr}}{dr} - \alpha\frac{1}{r}\Pi_{Mr} - \beta\frac{du_r}{dr} - \beta\frac{1}{r}u_r\right|_{r=R_0} = \mu^+, \quad (9)$$

де p^+, μ^+ — задані тиск і хімічний потенціал однорідного зовнішнього середовища; $\Lambda = K_* + \frac{4}{3}G$.

Граничні умови (9) слід доповнити також умовами обмеженості розв'язку в точці $r = 0$.

Зведемо взаємозв'язану систему рівнянь (8) до системи двох незв'язаних рівнянь. Запишемо її у вигляді

$$\mathbf{L}(\Lambda u_r + \beta\Pi_{Mr}) - \beta_1 u_r = 0, \quad \mathbf{L}(\beta u_r + \alpha\Pi_{Mr}) - \beta_2\Pi_{Mr} = 0. \quad (10)$$

Тут $\mathbf{L}$ — оператор, заданий таким співвідношенням $\mathbf{L} \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}$.

Якщо перше рівняння системи (10) домножити на деяку скалярну величину a та додати до другого рівняння, то в результаті отримаємо

$$(a\Lambda + \beta)\mathbf{L}\left(u_r + \frac{a\beta + \alpha}{a\Lambda + \beta}\Pi_{Mr}\right) + (-a\beta_1)\left(u_r + \frac{\beta_2}{a\beta_1}\Pi_{Mr}\right) = 0. \quad (11)$$

Вимагаємо, щоб коефіцієнти біля Π_{Mr} у співвідношенні (11) були однакові. Це відповідає умові

$$\frac{a\beta+\alpha}{a\Lambda+\beta}=\frac{\beta_2}{a\beta_1}, \tag{12}$$

з якої отримуємо таке квадратне рівняння для визначення величини a

$$\beta\beta_1 a^2+\left(\alpha\beta_1-\Lambda\beta_2\right)a-\beta\beta_2=0.$$

Корені цього рівняння є такі

$$a_1=\frac{A_1\left(1+A_2\right)}{2\beta\beta_1},\quad a_2=\frac{A_1\left(1-A_2\right)}{2\beta\beta_1}.$$

Тут $A_1=\Lambda\beta_2-\alpha\beta_1$, $A_2=\sqrt{1+\dfrac{4\beta_1\beta_2\beta^2}{A_1^2}}$.

Тоді з рівняння (11) для знаходження a_1 та a_2 одержуємо

$$\left(a_1\Lambda+\beta\right)L\left(u_r+\frac{a_1\beta+\alpha}{a_1\Lambda+\beta}\Pi_{Mr}\right)+\left(-a_1\beta_1\right)\left(u_r+\frac{\beta_2}{a_1\beta_1}\Pi_{Mr}\right)=0,$$
$$\left(a_2\Lambda+\beta\right)L\left(u_r+\frac{a_2\beta+\alpha}{a_2\Lambda+\beta}\Pi_{Mr}\right)+\left(-a_2\beta_1\right)\left(u_r+\frac{\beta_2}{a_2\beta_1}\Pi_{Mr}\right)=0. \tag{13}$$

З огляду на умову (12) приймаємо, що

$$\frac{a_1\beta+\alpha}{a_1\Lambda+\beta}=\frac{\beta_2}{a_1\beta_1}=\chi_1,\quad \frac{a_2\beta+\alpha}{a_2\Lambda+\beta}=\frac{\beta_2}{a_2\beta_1}=\chi_2.$$

Це дозволяє нам ввести дві нові функції η_1 і η_2

$$\eta_1=u_r+\chi_1\Pi_{Mr},\quad \eta_2=u_r+\chi_2\Pi_{Mr}. \tag{14}$$

У результаті система рівнянь (13) трансформується у систему двох незв'язаних рівнянь для відшукання функцій η_1 і η_2

$$\frac{d^2\eta_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\eta_1}{dr}-\left(\frac{a_1\beta_1}{a_1\Lambda+\beta}+\frac{1}{r^2}\right)\eta_1=0,$$
$$\frac{d^2\eta_2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\eta_2}{dr}-\left(\frac{a_2\beta_1}{a_2\Lambda+\beta}+\frac{1}{r^2}\right)\eta_2=0. \tag{15}$$

Рівняння (15) є модифіковані диференціальні рівняння Бесселя. Розв'язки таких рівнянь є такі

$$\eta_1=C_1I_1\left(\chi_3 r\right)+Z_1K_1\left(\chi_3 r\right),\qquad \eta_2=C_2I_1\left(\chi_4 r\right)+Z_2K_1\left(\chi_4 r\right). \tag{16}$$

Тут $I_1\left(\chi_3 r\right)$, $I_1\left(\chi_4 r\right)$ — модифіковані функції Бесселя першого роду першого порядку; $\chi_3=\sqrt{A_1\left(1+A_2\right)\beta_1/B_1}$; $\chi_4=\sqrt{A_1\left(A_2-1\right)\beta_1/B_2}$; $B_1=A_1\left(1+A_2\right)\Lambda+2\beta^2\beta_1$;

$B_2 = A_1\left(A_2 - 1\right)\Lambda - 2\beta^2\beta_1$; $C_j, Z_j\left(j = 1,2\right)$ — сталі, які визначаються з граничних умов (9) задачі й умов обмеженості розв'язку. Для суцільного циліндра функції $K_1\left(\chi_3 r\right)$ і $K_1\left(\chi_4 r\right)$ необмежено зростають, якщо $r \to 0$, тому слід прийняти, що коефіцієнти Z_1, Z_2 біля цих функцій дорівнюють нулю.

За врахування співвідношень (14) та граничних умов (9), розв'язок системи рівнянь (8) має вигляд

$$u_r\left(r\right) = \frac{\left(1 + A_2\right)C_1 I_1\left(\chi_3 r\right) + \left(A_2 - 1\right)C_2 I_1\left(\chi_4 r\right)}{2A_2},$$

$$\Pi_{Mr}\left(r\right) = \frac{\beta\beta_1\left[C_1 I_1\left(\chi_3 r\right) - C_2 I_1\left(\chi_4 r\right)\right]}{A_1 A_2}, \tag{17}$$

де
$$C_1 = \frac{2A_1 A_2}{\xi}\left[-S_2\chi_4 R_0 I_0\left(\chi_4 R_0\right)\left(p^+ - \frac{P_{(0)}}{\rho_{(0)}}\right) + \frac{1}{\beta}D_2\left(\mu_{(0)} - \mu^+\right)\right],$$

$$C_2 = -\frac{2A_1 A_2}{\xi}\left[S_1\chi_3 R_0 I_0\left(\chi_3 R_0\right)\left(p^+ - \frac{P_{(0)}}{\rho_{(0)}}\right) + \frac{1}{\beta}D_1\left(\mu_{(0)} - \mu^+\right)\right],$$

$$\xi = \chi_4 S_2 I_0\left(\chi_4 R_0\right)D_1 + \chi_3 S_1 I_0\left(\chi_3 R_0\right)D_2,$$

$$S_1 = 2\alpha\beta_1 + A_1\left(1 + A_2\right), \quad S_2 = 2\alpha\beta_1 - A_1\left(A_2 - 1\right),$$

$$D_1 = \chi_3 B_1 R_0 I_0\left(\chi_3 R_0\right) - 2GA_1\left(1 + A_2\right)I_1\left(\chi_3 R_0\right),$$

$$D_2 = \chi_4 B_2 R_0 I_0\left(\chi_4 R_0\right) - 2GA_1\left(A_2 - 1\right)I_1\left(\chi_4 R_0\right),$$

а $I_0\left(\chi_3 R_0\right)$, $I_0\left(\chi_4 R_0\right)$ — модифіковані функції Бесселя першого роду нульового порядку.

На основі співвідношень (1), (2), (5), (17) для ненульових компонент тензора напружень $\hat{\sigma}$ та хімічного потенціалу μ одержуємо

$$\sigma_{rr}\left(r\right) = -\frac{P_{(0)}}{\rho_{(0)}} + \frac{1}{2A_1 A_2}\left\{C_1\left[\chi_3 B_1 I_0\left(\chi_3 r\right) - 2GA_1\left(1 + A_2\right)\frac{1}{r}I_1\left(\chi_3 r\right)\right] + \right.$$
$$\left. + C_2\left[\chi_4 B_2 I_0\left(\chi_4 r\right) - 2GA_1\left(A_2 - 1\right)\frac{1}{r}I_1\left(\chi_4 r\right)\right]\right\},$$

$$\sigma_{\theta\theta}\left(r\right) = -\frac{P_{(0)}}{\rho_{(0)}} + \frac{1}{2A_1 A_2}\left\{C_1\left[\chi_3 B_3 I_0\left(\chi_3 r\right) + 2GA_1\left(1 + A_2\right)\frac{1}{r}I_1\left(\chi_3 r\right)\right] - \right.$$
$$\left. - C_2\left[\chi_4 B_4 I_0\left(\chi_4 r\right) - 2GA_1\left(A_2 - 1\right)\frac{1}{r}I_1\left(\chi_4 r\right)\right]\right\},$$

$$\sigma_{zz}\left(r\right) = -\frac{P_{(0)}}{\rho_{(0)}} + \frac{1}{2A_1 A_2}\left[C_1\chi_3 B_3 I_0\left(\chi_3 r\right) + C_2\chi_4 B_4 I_0\left(\chi_4 r\right)\right],$$

$$\mu = \mu_{(0)} - \frac{\beta}{2A_1A_2}\left[C_1\chi_3S_1I_0\left(\chi_3 r\right) - C_2\chi_4S_2I_0\left(\chi_4 r\right)\right].$$

Тут $B_3 = \left(K_* - \frac{2}{3}G\right)A_1\left(1 + A_2\right) + 2\beta^2\beta_1$, $B_4 = \left(K_* - \frac{2}{3}G\right)A_1\left(A_2 - 1\right) - 2\beta^2\beta_1$.

Відзначимо, що приповерхнева неоднорідність компонент тензора напружень і хімічного потенціалу характеризується двома характерними віддалями $l_1 = 1/\chi_3$ й $l_2 = 1/\chi_4$. Величини l_1 та l_2 залежать не тільки від параметра β взаємозв'язку процесів деформування та локального зміщення маси, але і від параметрів β_1, β_2, α, що характеризують дисипативні процеси та зміну хімічного потенціалу, спричинену локальним зміщенням маси, а також модулів пружності та величин $P_{(0)}$ і $\rho_{(0)}$.

Якщо знехтувати взаємовпливом процесів деформування та локального зміщення маси у рівняннях стану (1), то розв'язок сформульованої задачі суттєво спрощується і набуває вигляду

$$u_r\left(r\right) = C_1I_1\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}r\right), \quad \Pi_{Mr}\left(r\right) = C_2I_1\left(\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha}}r\right),$$

$$\sigma_{rr}\left(r\right) = -\frac{P_{(0)}}{\rho_{(0)}} + C_1\left[\sqrt{\Lambda\beta_1}I_0\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}r\right) - 2G\frac{1}{r}I_1\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}r\right)\right],$$

$$\sigma_{\theta\theta}\left(r\right) = -\frac{P_{(0)}}{\rho_{(0)}} + C_1\left[\left(K_* - \frac{2}{3}G\right)\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}I_0\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}r\right) + 2G\frac{1}{r}I_1\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}r\right)\right],$$

$$\sigma_{zz}\left(r\right) = -\frac{P_{(0)}}{\rho_{(0)}} + C_1\left(K_* - \frac{2}{3}G\right)\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}I_0\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\Lambda}}r\right), \tag{18}$$

$$\mu = \mu_{(0)} - C_2\sqrt{\alpha\beta_2}I_0\left(\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha}}r\right), \tag{19}$$

$$C_1 = -\frac{p^+ - P_{(0)}/\rho_{(0)}}{\sqrt{\Lambda\beta_1}I_0\left(\sqrt{\beta_1/\Lambda}R_0\right) - \frac{2G}{R_0}I_1\left(\sqrt{\beta_1/\Lambda}R_0\right)}, \quad C_2 = \frac{\mu_{(0)} - \mu^+}{\sqrt{\alpha\beta_2}I_0\left(\sqrt{\beta_2/\alpha}R_0\right)}.$$

Слід відзначити, що хоча в рівняннях стану (1) знехтувано взаємовпливом процесів деформування та локального зміщення маси, розподілам напружень (18) і хімічного потенціалу (19) властива приповерхнева неоднорідність, яка зумовлена протіканням дисипативних процесів. При цьому параметри $l_{1*} = \sqrt{\Lambda/\beta_1}$ та $l_{2*} = \sqrt{\alpha/\beta_2}$ є характерні віддалі таких неоднорідностей.

На рис. 1 наведено розподіл напружень $\sigma_{\theta\theta*} = \dfrac{\sigma_{\theta\theta} + P_{(0)}/\rho_{(0)}}{p^+ - P_{(0)}/\rho_{(0)}}$ у циліндрі. Криві 1-3 відповідають значенням параметра $\alpha_* = \sqrt{\beta_1/\Lambda}R_0$ = 6, 10, 20. Напруження $\sigma_{\theta\theta*}$

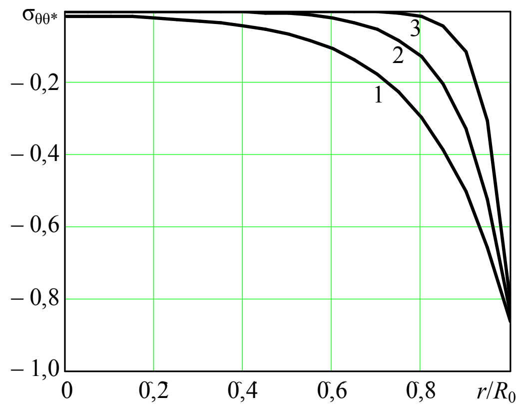

Рис. 1. Розподіл напружень $\sigma_{\theta\theta*}$ у циліндрі

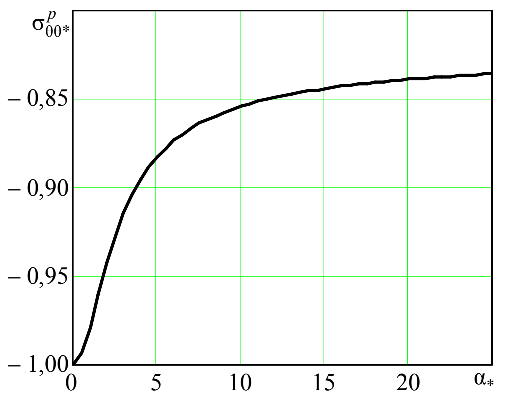

Рис. 2. Залежність поверхневих напружень $\sigma^{p}_{\theta\theta*}$ від параметра α_*

є стискувальні. Зі збільшенням величини α_* область приповерхневої неоднорідності зменшується. Із графіків видно, що поблизу поверхні неоднорідність у розподілі напружень є суттєва. З віддаленням від поверхні напруження за абсолютним значенням зменшуються і для $\alpha_* = 10$ (див. крива 2) та $\alpha_* = 20$ (див. крива 3) прямують до нуля. Для циліндрів «малих радіусів», у яких області приповерхневої неоднорідності перекриваються, $\sigma_{\theta\theta*} \neq 0$ у точці $r = 0$ циліндра (див. крива 1). Розподіл напружень σ_{zz*} схожий до розподілу $\sigma_{\theta\theta*}$. Залежність поверхневих напружень $\sigma^{p}_{\theta\theta*}$ від параметра α_* ілюструє крива на рис. 2. Бачимо, що зі зменшенням параметра α_* (радіуса циліндра R_0) поверхневі напруження $\sigma^{p}_{\theta\theta*}$ за абсолютним значенням зростають. Отже, поверхневим напруженням також властивий розмірний ефект.

Висновки. На основі математичної моделі механіки пружних систем, у якій формування приповерхневих неоднорідностей пов’язане як з дисипативними процесами, так і локальним зміщенням маси, досліджено напружено-деформований стан нескінченного суцільного ізотропного циліндра. Встановлено, що навіть за нехтування взаємовпливом процесів деформування та локального зміщення маси у рівняннях стану, компоненти тензора напружень і хімічний потенціал описують приповерхневу неоднорідність, яка зумовлена протіканням дисипативних процесів, спричинених формуванням поверхні тіла. Показано також, що поверхневим напруженням властивий розмірний ефект: зі зменшенням радіуса циліндра поверхневі напруження за абсолютним значенням зростають.

Отримані результати можуть бути використані для розрахунку та прогнозування параметрів міцності та надійності елементів конструкцій та приладів.

Література

[1] *Гиббс, Дж. В.* Термодинамика. Статистическая механика / *Дж. В. Гиббс*. — Москва: Наука, 1982. — 584 с.

[2] *Гріффітс, А. А.* Явища розриву і течіння в твердих тілах / *А. А. Гріффітс* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1993. — Т. 29, № 3. — С. 13-42.

[3] Поверхностные явления в твердых телах с учетом взаимосвязи физико-механических процессов / *Я. С. Подстригач, П. Р. Шевчук, Т. М. Онуфрик, Ю. З. Повстенко* // Физ.-хим. механика материалов. — 1975. — № 2. — С. 36-43.

[4] *Подстригач, Я. С.* Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах / *Я. С. Подстригач, Ю. З. Повстенко*. — Киев: Наук. думка, 1985. — 200 с.

[5] *Eringen, A. C.* On Nonlocal Elasticity / *A. C. Eringen, D. G. B. Edelen* / Int. J. Engng. Sci. — 1972. — Vol. 10, No 3. — P. 233-248.

[6] *Eringen, A. C.* Nonlocal Continuum Field Theories / *A. C. Eringen*. — Springer-Verlag, 2002. — 376 p.

[7] *Аэро, Е. Л.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц / *Е. Л. Аэро, Е. В. Кувшинский* // Физика твердого тела. — 1960. — Т. 2, вып. 7. — С. 1399-1409.

[8] *Rajagopal, E. S.* The existence of interfacial couples in infinitesimal elasticity / *E. S. Rajagopal* // Ann. der Physik. — 1960 — Vol. 6. — P. 192-201.

[9] *Truesdell, C. A.* Encyclopedia of Physics, Vol. III/1 / *C. A. Truesdell, R. A. Toupin*. — Berlin: Springer-Verlag, 1960. — P. 226-793.

[10] *Toupin, R. A.* Elastic materials with couple-stresses / *R. A. Toupin* // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1962. — Vol. 11. — P. 385-414.

[11] *Mindlin, R. D.* Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics / *R. D. Mindlin* // J. of Elasticity. — 1972. — Vol. 2, No 4. — P. 217-282.

[12] *Santaoja, K.* Gradient Theory from the Thermomechanics point of view / *K. Santaoja* // Engineering Fracture Mechanics. — 2004. — Vol. 71, Issues 4-6. — P. 557-566.

[13] *Lazar, M.* A note on line forces in gradient elasticity / *M. Lazar, G. A. Maugin* // Mechanics Research Communications. — 2006 — Vol. 33, Issue 5. — P. 674-680.

[14] *Нагірний, Т. С.* Локально-градієнтний підхід у термомеханіці / *Т. С Нагірний, О. Р. Грицина, К. А. Червінка* // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. — 2006. — № 3. — С. 59-64.

[15] Фізико-математичне моделювання складних систем */ Я. Бурак, Є. Чапля, Т. Нагірний* та ін.; під ред. *Я. Бурака, Є. Чаплі.* — Львів: СПОЛОМ, 2004. — 264 с.

[16] *Бурак, Я. Й.* Про один підхід до врахування приповерхневої неоднорідності в термомеханіці твердих розчинів / *Т. С. Нагірний, О. Р. Грицина* // Доп. АН України. — 1991. — № 11. — С. 47-51.

[17] *Бурак, Я. Й.* Визначальні співвідношення локально градієнтної термомеханіки / *Я. Й. Бурак* // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1987. — № 12. — С. 19-23.

[18] Математичне моделювання термомеханічних процесів у пружних тілах із врахуванням локального зміщення маси / *Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля, В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина* // Доп. НАН України. — 2007. — № 6. — С. 45-49.

[19] *Кондрат, В. Ф.* Рівняння термомеханіки деформівного твердого тіла з урахуванням необоротності локального зміщення маси / *В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2008. — Т. 51, № 1. — С. 169-177.

[20] *Бурак, Я. Й.* Про термодинамічні аспекти приповерхневих явищ у термопружних системах / *Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2006. — Т. 42, № 1. — С. 39-44.

[21] *Бурак, Я. Й.* Математична модель термомеханіки з урахуванням дисипативних процесів при формуванні приповерхневих явищ / *Я. Й. Бурак, Г. І. Мороз, З. В. Бойко* // Доп. НАН України. — 2008. — № 9. — С. 65-71.

[22] *Бурак, Я. Й.* Про енергетичний підхід і термодинамічні засади варіаційного формулювання крайових задач термомеханіки з урахуванням приповерхневих явищ / *Я. Й. Бурак, Г. І. Мороз, З. В. Бойко* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2009. — Т. 52, № 2. — С. 55-65.

[23] *Бойко, З.* Напружено-деформований стан пружного півпростору за врахування дисипативних процесів під час формування приповерхневої неоднорідності / *З. Бойко* // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. — 2009. — Вип. 9. — С. 47-54.

The near-surface inhomogeneity of the stress-strained state of a continuous cylinder taking into account dissipative processes

Zoya Boiko

Correlations of the previously proposed mathematical model of elastic deformable systems mechanics are used for study of the stress-strained state of an infinite continuous cylinder. The model describes formation of the near-surface inhomogeneities, related with both the process of local mass displacement and dissipative processes. It is established that the near-surface inhomogeneity of the stress tensor components and the chemical potential is the consequence of dissipative processes if interaction of deformation process and local mass displacement in constitutive equations is ignored. It is shown that surface stresses are characterized by the size effect.

Приповерхностная неоднородность напряженно-деформированного состояния сплошного цилиндра с учетом диссипативных процессов

Зоя Бойко

Соотношения предложенной ранее математической модели механики упругих деформируемых систем применены к изучению напряженно-деформированного состояния бесконечного сплошного цилиндра. Упомянутая модель описывает формирование приповерхностных неоднородностей, связанное как с процессом локального смещения массы, так и диссипативными процессами. Установлено, что в случае пренебрежения в уравнениях состояния взаимосвязанностью процессов деформирования и локального смещения массы, приповерхностная неоднородность компонент тензора напряжений и химического потенциала обусловлена протеканием в теле диссипативных процессов. Показано, что поверхностным напряжениям свойственен размерный эффект.

Представлено членом-кореспондентом НАН України Я. Бураком

Отримано 16.09.09