УДК 330.45

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОЦІНКА ВТРАТ У ВИПАДКУ ДЕФОЛТУ ПОЗИЧАЛЬНИКА БАНКУ

БОГДАН КИШАКЕВИЧ,
кандидат економічних наук, доцент,
завідувач кафедри комунікативних технологій
Дрогобицького державного педагогічного університету ім. Івана Франка

У статті проаналізовано основні підходи до моделювання втрат у випадку дефолту Loss-Given-Default (LGD). Обґрунтовано необхідність урахування кореляції між LGD та ймовірністю дефолту probability of default (PD) в LGD-моделях. Розглянуто модель узагальненої бета-регресії для випадкових значень LGD із пробіт- та логіт-функціями зв'язку.

Ключові слова: *втрати у випадку дефолту, узагальнена бета-регресія, LGD-моделі, пробіт-функція, логіт-функція, кредитний ризик, internal rating-based (IRB).*

Постановка проблеми. У багатьох моделях кредитного ризику передбачається, що втрати у випадку дефолту (*Loss-Given-Default*) є константою, і тим самим ігнорується той факт, що *Loss-Given-Default* (далі - *LGD*) сильно залежить від економічних циклів, а отже, є важливим чинником регулювання кредитного ризику портфеля. Емпіричні факти такої залежності *LCD* наведено в роботах Альтмана (2003) та Moody's (2003). Останнім часом дослідниками здійснено декілька спроб змоделювати взаємозв'язок між *probability of default* (далі - *PD*) та *LGD*, проте майже всі вони мали спільний недолік, який полягав у тому, що врахування такого взаємозв'язку давало результати, які суперечили емпіричним даним та логічній обґрунтованості. Через те й зараз актуальними залишаються проблеми, пов'язані з розробкою моделей оцінки *LCD*, які б мали зрозумілу економічну інтерпретацію, що дозволить збільшити рівень їх застосовування на ринку фінансових послуг.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Сьогодні розроблено цілу низку моделей оцінки *LGD*. Дж. Фрай у 2000 році запропонував однофакторну модель, у якій *LGD* є нормально розподіленим і є залежним від систематичного фактора Y, який характеризує *PD*.

$$LGD = \mu + \sigma\xi,\ \xi = \sqrt{\tilde{\rho}}\mathrm{Y} + \sqrt{1-\tilde{\rho}}\varepsilon\,.$$

де ε та ξ є випадковими змінними зі стандартним нормальним розподілом. Параметри μ та σ можуть інтерпретуватись як очікуване значення *LGD* та волатильність *LGD* відповідно. Проте в цій моделі *LGD* є необмеженою на *R* і, отже, може бути від'ємною. Для гарантування невід'ємності *LGD* С. В. Пихтін застосовував логнормальний розподіл для *LGD*:

$$LGD = (1 - e^{\mu+\sigma\xi})^{+}\,.$$

Андерсон та Сіденіус для моделювання *LGD* застосували пробіт-функції:

$$LGD = \Phi(\mu + \sigma\xi)\,,$$

де Φ - це *cdf* стандартного нормального розподілу.

У моделі Дульманна-Траппа (2004), Рьоша-Шьоля (2005) використано логіт-функції:

$$LGD = \frac{1}{1+\exp(\mu+\sigma\xi)}\,.$$

У всіх трьох моделях гарантується, що *LGD* лежить в інтервалі [0,1]. Проте параметри μ та σ не мають тут зрозумілої економічної інтерпретації, і, на жаль, фінансисти на практиці віддають перевагу моделям зі сталим значенням *LGD* і рідко враховують такі важливі чинники, як кореляції між *LGD* та *PD*.

Мета статті - обґрунтувати необхідність урахування кореляції *LGD* та *PD* при визначенні величини втрат кредитного портфеля, розглянути можливість застосування пробіт- та логіт-функцій зв'язку в різних модифікаціях узагальненої бета-регресії для *LGD*.

Виклад основного матеріалу. Як відомо, Базельський комітет надав банкам можливість вибору із двох альтернативних підходів до розрахунку мінімального рівня капіталу:

1) стандартний підхід (*standardized approach*) - на основі методики Базельських домовленостей 1988 р. із модифікованою шкалою зважування активів щодо ризику залежно від зовнішнього рейтингу контрагента;

2) підхід на основі внутрішніх рейтингів (*internal rating-based approach - IRB approach*) - розмір капіталу розраховується на основі власних оцінок чотирьох складових кредитного ризику: імовірності дефолту (*probability of default - PD*), величини прийнятого ризику (*exposure at default - EAD*), втрат у випадку дефолту (*loss given defaul - LGD*) та терміну закінчення угоди (*maturity - M*).

При такому підході втрати портфеля із n позичальників матимуть вигляд [1, с. 133]:

$$L = \sum_{i=1}^{n} EAD_i LGD_i D_i \ ,$$

де D_i - індикатор дефолту: $p_i = P(D_i = 1)$;

EAD (*Exposure-at-Default*) - сума, що піддається ризику;

LGD (*Loss-Given-Default*) - частка *EAD*, яка буде втрачена у випадку дефолту, *LGD* ~ [0,1].

У рамках підходу на основі внутрішніх рейтингів при визначенні величини *LGD* банкам дозволяється враховувати наявність забезпечення по зобов'язаннях у формі застави фінансових цінностей, а також інших видів додаткового забезпечення, які визнаються в рамках підходу на основі внутрішніх рейтингів, включаючи дебіторську заборгованість, житлову та комерційну нерухомість та інші види забезпечення, які задовольняють певні вимоги. Наявність забезпечення у формі фінансових активів дозволяє скорегувати величину *LGD* за формулою:

$$LGD^* = \max(0, LGD\frac{EAD^*}{EAD}),$$

де *LGD** - рівень безповоротних втрат при дефолті із урахуванням забезпечення;

LGD - рівень безповоротних втрат при дефолті "за замовчуванням" (без урахування забезпечення);

*EAD** - сума, піддана ризику із урахуванням забезпечення;

EAD - поточна сума, піддана ризику без урахування забезпечення (тобто сума наданої позики, вартість цінних паперів під заставою або наданих у кредит) [2, с. 426].

Згідно зі статтею 87 № 6, 7 *Capital Requirements Directive (CRT)* банки повинні самостійно проводити оцінку *PD* та *LGD*. Така оцінка має включати аналіз стійкості та точності моделі. Хоча аналіз моделей оцінки *PD* проводиться досить інтенсивно в науковій літературі, моделі оцінки *LGD* досліджуються дуже рідко. Це при тому, що розмір капіталу на покриття банківських ризиків є більш чутливим до змін саме *LGD*, ніж *PD*. Саме тому аналіз *LGD*-моделей фактично є ключовим моментом оцінки кредитного ризику портфеля. На рис. 1. показано зміну еластичності *LGD* та *PD* у випадку непередбачуваних втрат. Еластичність *LGD* є константою і завжди дорівнює 1. Проте еластичність *PD* $(0 \le PD \le 0,5)$ є значно меншою для всіх категорій, а отже, зважені на ризик активи реагуватимуть значно чутливіше на зміни *LGD* [3, с. 2]. Усе це підкреслює необхідність детального аналізу моделей оцінки втрат при дефолті *LGD*.

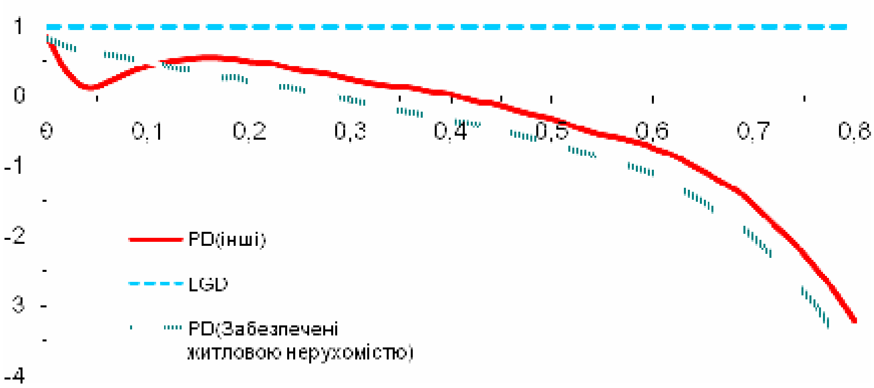

Рис. 1. Порівняння еластичності PD і LGD.

Найбільшої популярності набув метод, при якому рівень відшкодування втрат *RR* (*recovery rate*) (*RR = 1-LGD*) моделюється як випадкова величина на основі припущення про існування бета-розподілу. Гізе у 2006 році та Брише з Гонсалесом у 2008 змоделювали *LGD* з допомогою композиції бета-розподілів:

$$LGD \sim Beta(\alpha(Y), \beta(Y)) \ . \qquad (1)$$

Щільність бета-розподілу має вигляд:

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & якщо\, x \in (0,1) \\ 0, & якщо\, x \notin (0,1) \end{cases}$$

де *G* (*gamma*) - гама-функція;

$\alpha > 0$, $\beta > 0$ - параметри.

Бета-розподіл вдало підходить для моделювання втрат у випадку дефолту (*LGD*), оскільки змінна в цьому випадку знаходиться в межах 0 та 1. Така функціональна форма є надзвичайно гнучкою, її графік може набувати різного вигляду. Він є симетричним, якщо $\alpha = \beta$, асиметричним в інших випадках, може мати вигляд горба або бути схожим на літеру U [4, с. 104]. Бета-розподіл *LGD* реалізовано в моделях *KMV Portfolio Manager, CreditMetrics*.

Проте α та β є лише параметрами форми розподілу і не мають чіткої економічної інтерпретації. За допомогою параметризації бета-розподілу можна одержати різні види так званої узагальненої бета-регресії *GBR* (*generalized beta regression*) для випадкової величини *LGD*, які мають кращі властивості асиметрії та гетероскедастичності (залежності дисперсії від другої випадкової величини) та параметри зі зрозумілою економічною інтерпретацією.

Як відомо, математичне очікування та дисперсія бета-змінної *X* є такими:

$$\mu = E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad (2)$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{\mu(1-\mu)}{\alpha+\beta+1}. \qquad (3)$$

При $\varphi = \alpha + \beta$ параметром розсіювання можна вважати φ в тому сенсі, що при заданому μ варіація залежить від величини φ. Тоді параметри α та β можуть бути виражені через математичне очікування та дисперсію:

$$\alpha = \mu\varphi, \quad \beta = (1-\mu)\varphi. \qquad (4)$$

Таким чином, бета-розподіл може бути однозначно визначений через свою дисперсію та математичне очікування.

Підхід на основі застосування узагальненої бета-регресії базується на таких положеннях:

1) припускається, що *LGD* є умовно бета-розподіленим на окремих коваріантах;

2) бета-розподіл параметризовано своїм математичним очікуванням та дисперсією.

Базова модель бета-регресії, запропонована Феррарі та Нето (2004) і вдосконалена Хуангом та Остерлі [5], моделює лише математичне очікування μ та вважає параметр дисперсії за параметр збурення. Ця модель матиме такі компоненти:

- лінійний предикатор η:

$$\eta = a\zeta. \qquad (5)$$

Тут ζ - вектор пояснювальних змінних, у якому перший елемент повинен бути 1; a - вектор відповідних коефіцієнтів регресії.

- монотонна диференційована функція зв'язку g

$$g(\mu) = \eta, \qquad (6)$$

де $\mu = E\,[LGD]$.

У ролі можливих коваріантів у лінійному предикаторі можуть виступати рівень пріоритету, забезпечення кредиту (застава), вид діяльності позичальника, тривалість економічних циклів тощо [5, с. 6]. Безперечно, що всі ці чинники матимуть значний вплив на величину LGD. Обернена до g функція, яка є відображенням $R \to [0,1]$, дасть нам середнє значення *LGD*. Застосуємо для цього в ролі функцій зв'язку відомі функції логіт $\mu = \frac{e^{\eta}}{1+e^{\eta}}$ та пробіт $\mu = \Phi(\eta)$. Для зручності позначимо такий підхід до моделювання *LGD* на основі узагальненої регресії через *GBR* (*generalized beta regression*). Найпростішим випадком такої моделі є однофакторна модель, коли $\zeta = (1, X)^T$, де X є простим фактором, який визначає процес дефолту позичальника.

Розглянемо один із варіантів моделі, коли середнє значення та дисперсія спільно розподілені *JGBR*. Дисперсія тоді може бути записана як $h(\varphi) = b\zeta$, , де h - функція зв'язку. Досягти додатності φ можна, якщо

$$\varphi = e^{b\zeta}. \qquad (7)$$

Для отримання параметрів узагальненої бета-регресії використаємо метод найменших квадратів. Припустимо, що ми маємо статистичні дані про *LGD* за *T* років. Позначимо через K_t кількість позичальників, яким оголошено дефолт через t років і через $\lambda_{t,k}$ - *LGD* для *k-го* позичальника з дефолтом, $t=1,\dots,T$, $k=1\dots K_t$. Значення простого фактора X_t можуть бути одержані з моделі дефолту й історичних даних та повинні розглядатись як відомі фіксовані величини в *LGD-моделі*.

Таким чином, ми повинні обчислити такі параметри: для *GBR* - a, φ, а для *JGBR* - a, b. Тут a є вектором коефіцієнтів лінійного предикатора (5), b - вектором коефіцієнтів лінійного предикатора (7), φ - параметр відхилення. Для застосування методу найменших квадратів нам достатньо знати середнє значення *LGD* та його волатильність (дисперсію), які можуть бути одержані з емпіричних даних $\lambda_{t,k}$:

$$LGD_t = \frac{1}{K_t}\sum_{k=1}^{K_t}\lambda_{t,k},$$

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{K_t}\sum_{k=1}^{K_t}\lambda_{t,k}^2 - LGD_t^2.$$

Параметр a може бути одержаний за допомогою використання лінійної регресії середнього значення *LGD* - $g(\mu_t)$ на Y_t та інших коваріантах:

$$g(m_t) = \hat{a}\zeta_t + \tau_t,$$

де τ_t - залишковий член.

Отже,

$$\hat{\mu}_t = g^{-1}(\hat{a}\zeta_t). \qquad (8)$$

Використаємо прогнозні значення $\hat{\mu}_t$ для оцінки параметра b. Із (4) отримаємо:

$$\varphi_t = \frac{\hat{\mu}_t(1-\hat{\mu}_t)}{\sigma_t^2} - 1.$$

Оцінником методу моментів параметра φ буде:

$$\hat{\varphi}_t = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varphi_t.$$

Коефіцієнт b може бути обчислений за допомогою лінійної регресії трансформованої дисперсії:

$$h(\varphi_t) = \hat{b}\zeta_t + \varepsilon_t.$$

Для оцінки параметрів отриманої регресії скористаємось емпіричними даними про річну частоту дефолтів, кількість дефолтів, середнє значення *LGD* та волатильність *LGD* протягом 1982-2005 років з *Altman-NYU Salomon Center Corporate Bond Default Master Database* (табл. 1). Для визначення ймовірності дефолту скористаємось моделлю дефолта Васічека, у якій передбачено, що всі позичальники мають однакові ймовірність дефолту та кореляцію активів. У роботі [6, с. 9] за допомогою методу максимальної правдоподібності отримано такі оцінки для кореляції активів та ймовірності дефолту:

$$\hat{\rho}^{ml} = \frac{Var[\delta]}{1+Var[\delta]},$$

$$\hat{P}^{ml} = \Phi\left(\frac{\overline{\delta}}{\sqrt{1+Var[\delta]}}\right),$$

де $\overline{\delta} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\delta_t$, $Var[\delta] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\delta_t - (\overline{\delta})^2$ та $\delta_t = \Phi^{-1}(p_t)$. Тут p_t - річна частота дефолту за t рік. У результаті одержуємо, що $\hat{\rho}^{ml} = 0{,}0547$, $\hat{P}^{ml} = 0{,}0152$.

Згідно з [6, с. 8],

$$p_t = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\hat{P}^{ml}) - \sqrt{\hat{\rho}^{ml}}\,\overline{X}_t}{\sqrt{1-\hat{\rho}^{ml}}}\right).$$

Звідси знаходимо вираз для обчислення значення фактора X_t для року t:

$$X_t = \frac{\Phi^{-1}(\hat{P}^{ml}) - \sqrt{1-\hat{\rho}^{ml}}\,\Phi^{-1}(p_t)}{\sqrt{\hat{\rho}^{ml}}}.$$

Таблиця 1. - Емпіричні дані LGD

Рік	P_t	$LGD_{сер}$	σ_t	Рік	P_t	$LGD_{сер}$	σ_t
1982	1,18 %	60,49 %	14,90 %	1994	0,61 %	54,46 %	20,46 %
1983	0,75 %	51,07 %	23,53 %	1995	1,01 %	57,10 %	25,25 %
1984	0,90 %	51,19 %	17,38 %	1996	0,49 %	58,10 %	24,68 %
1985	1,10 %	54,59 %	21,87 %	1997	0,62 %	46,54 %	25,53 %
1986	1,71 %	63,91 %	18,82 %	1998	1,31 %	58,90 %	24,56 %
1987	0,94 %	46,64 %	26,94 %	1999	2,15 %	71,01 %	20,40 %
1988	1,42 %	63,43 %	17,97 %	2000	2,36 %	72,49 %	23,36 %
1989	1,67 %	56,54 %	28,78 %	2001	3,78 %	76,66 %	17,87 %
1990	2,71 %	74,76 %	22,28 %	2002	3,60 %	69,97 %	17,18 %
1991	3,26 %	59,95 %	26,09 %	2003	1,92 %	62,67 %	23,98 %
1992	1,37 %	45,55 %	23,38 %	2004	0,73 %	52,19 %	24,10 %
1993	0,55 %	62,46 %	20,11 %	2005	0,55 %	41,37 %	23,46 %

*На основі джерела [4].

На рисунку 2 показано діаграму розсіювання фактора X_t, який характеризує дефолт. Діаграма підтверджує важливість цього фактора ризику при оцінці середнього значення *LGD*. З огляду на залежність між середнім значенням *LGD* та X_t, яка близька до лінійної, у нашій *LGD-моделі* доцільно розглянути лише один фактор X_t.

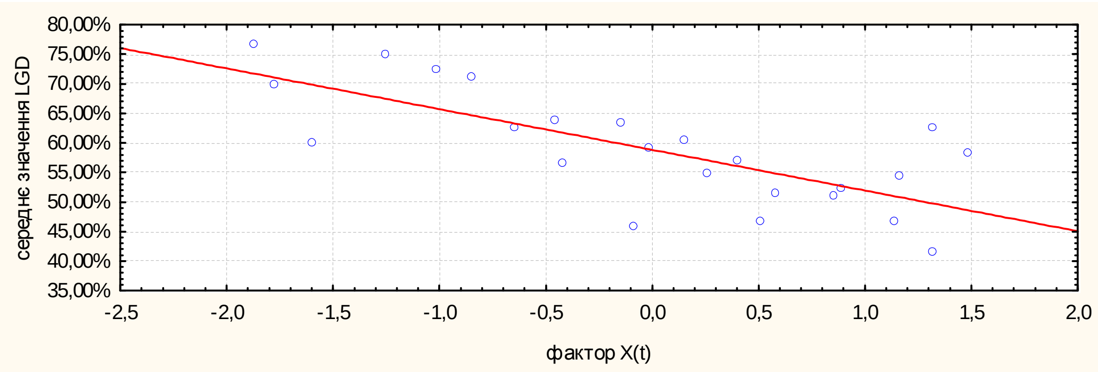

Рис. 2. Діаграма розсіювання фактора X_t.

Середнє значення *LGD* апроксимуємо спочатку за допомогою логіт-функції: $\mu = \frac{1}{1+e^{-(a_1+a_2x)}}$. Для порівняння використаємо потім пробіт-функцію $\mu = \Phi(a_1 + a_2x)$. Оцінки параметрів регресії, виконані за допомогою методу найменших квадратів у пакеті *Statistica 8*, подано в таблиці 2.

Таблиця 2. - Оцінка параметрів регресії

Параметри регресії	*GBR*		*JGBR*	
	Логіт-функція	Пробіт-функція	Логіт-функція	Пробіт-функція
a_1	0,372534	0,230768	0,372534	0,230768
a_2	-0,299000	-0,184087	-0,299000	-0,184087
φ	4,1874			
b_1			1,3495	1,3511
b_2			-0,0015	-0,0036

Аналіз параметрів лінійної регресії показує, що *GBR-модель* має допустимі значення коефіцієнта детермінації для логіт- та пробіт-функцій зв'язку й усі параметри a_1 та a_2 є статистично значущими згідно з *t-критерієм Стьюдента*. *JGBR-модель*, яка також розглядається в деяких наукових працях як можливий варіант *LGD-моделі*, має неприпустимо малий коефіцієнт детермінації, і, крім того, параметр регресії b_2 не є статистично значущим, а отже, застосування такої моделі, на відміну від GBR-моделі, не є коректним.

Висновки

Незважаючи на появу нових підходів до моделювання *LGD*, для практики сучасного фінансового ризик-менеджменту характерне нехтування залежностей між різними *LGD* та між *PD* і *LGD*. Як правило, використовують сталі значення *LGD* (моделі Васічека та *CreditRisk+*), що значно спрощує обчислювальну процедуру, але, як показано в статті, призводить до спотворених результатів через неврахування кореляції між *PD* і *LGD*. На підставі наведених статистичних даних робимо висновок, що розмір капіталу на покриття банківських ризиків є більш чутливим до змін саме *LGD*, а не *PD*.

Розглянута в роботі модель узагальненої бета-регресії (*GBR*) є однофакторною, і в ній враховано всі вищезгадані недоліки. Перевагами цієї моделі є проста економічна інтерпретація, гнучкість у моделюванні випадкового значення *LGD* через використання різних коваріантів, можливість застосування різних ефективних числових методів, таких як апроксимація нормальним значенням, метод перевалу. Оцінка параметрів отриманої регресії показала, що *GBR* модель має статистично значущі параметри a_1 та a_2 як для пробіт-, так і для логіт-функцій зв'язку, проте використання *JGBR-різновиду* моделі *GBR* є недоцільним через дуже малі значення коефіцієнта детермінації такої моделі.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Hillebrand M. Modeling and Estimating Dependent Loss Given Default. Risk / M. Hillebrand // Risk. - № 19 (9). - С. 120-125 [Електронний ресурс]. - Режим доступу : http://www-m4.ma.tum.de/pers/mhi/hillebrand_lgd.pdf.
2. Энциклопедия финансового риск-менеджмента / [под ред. А. А. Лобанова, А. С. Чугунова]. - [4-е изд.]. - М. : Альпина Бізнес Букс, 2009. - 932 с.
3. Stefan Hlawatsch. A Framework for LGD Validation of Retail Portfolios / Stefan Hlawatsch, Peter Reichling // FEMM Working paper. - 2009. - No 25. - 29 с. [Електронний ресурс]. - Режим доступу : http://www.ww.uni-agdeburg.de/fwwdeka/femm/a2009_Dateien/2009_25.pdf.
4. Грін В. Г. Економетричний аналіз / В. Г. Грін ; [переклад з англ. А. Олійник, Р. Ткачук]. - К. : Основи, 2005. - С. 1197.
5. Huang X. Generalized Beta Regression Models for Random Loss-Given-Default / X. Huang, C. Oosterlee // Delft University of Technology Report 08-10 - 2008 [Електронний ресурс]. - Режим доступу : http://center.uvt.nl/staff/schumach/paperXinzheng HuangLunteren09.pdf.
6. Dullmann K. Systematic risk in recovery rates - an empirical analysis of US corporate credit exposures / K. Dullmann, M. Trapp // Deutsche Bundesbank Discussion Paper Series 2: Banking and Financial Supervision. - 2004. - No 02 [Електронний ресурс]. - Режим доступу : http://www.bundesbank.de/download/bankenaufsicht/dkp/200402dkp_b.pdf.

B. Kyshakevych

MODELING AND ESTIMATION OF LOSS GIVEN DEFAULT OF BANC-BORROWER

The main approaches of LGD modeling were analyzed. Necessity of consideration of correlation between LGD and PD was shown. The generalized beta-regression model for LGD with probit and logit link functions was examined.

Key words: *loss given default, generalized beta regression model, LGD-models, probit-function, logit-function, expected loss of portfolio.*

Надійшла до редакції 23.04.2010