

Варіаційний метод розв'язування оберненої бігармонічної задачі в прямокутнику

Василь Чекурін¹, Леся Постолак²

¹ д. ф.-м. н., професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, Україна, e-mail: chekurin@iapmm.lviv.ua; Політехніка Лодзька, вул. Жеромського, 116, Лодзь, 90-924, Польща

² Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, Україна

Запропоновано варіаційний метод розв'язування оберненої бігармонічної задачі. Розглядається прямокутник $(-a < x < a) \cup (-1 < y < 1)$, на бічних сторонах $x = \pm a$ якого діють неоднорідні крайові умови, що априорі невідомі. На сторонах $y = \pm 1$, натомість, задано по чотири умови — однорідні умови для шуканої функції Φ та її нормальної похідної $\partial\Phi/\partial y$, а також неоднорідні умови $L_u\Phi|_{y=\pm 1} = \xi(x)$ і $L_v\Phi|_{y=\pm 1} = \eta(x)$, де L_u, L_v — лінійні інтегро-диференціальні оператори, $\xi(x), \eta(x)$ — задані функції. Розв'язок задачі подано у вигляді розвинення за незалежними повними системами бігармонічних функцій, що тотожно задовольняють однорідні умови на сторонах $y = \pm 1$. Введено квадратичний функціонал, який за нормою L_2 визначає відхилення розв'язку задачі від заданих на сторонах $y = \pm 1$ неоднорідних умов. Умови мінімуму функціонала приводять до безмежної системи лінійних рівнянь стосовно коефіцієнтів розвинення розв'язку. Розглянуто приклад застосування розробленого методу для визначення двовимірного напружено-деформованого стану тіла прямокутного перерізу за даними вимірювань нормальної та дотичної компонент вектора переміщень на його поверхні.

Ключові слова: бігармонічні задачі, обернені задачі, варіаційні методи, напружено-деформований стан, неруйнівні методи

Вступ. Бігармонічні задачі для двовимірних плоских областей виникають у різних наукових дисциплінах, зокрема, в плоскій теорії пружності [1, 2], теорії пластин [1], гідромеханіці [3]. Класичне формулювання [4] прямої задачі для бігармонічного рівняння

$$\frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

передбачає задання на межі $\partial\mathcal{D}$ області \mathcal{D} значень шуканої функції та її нормальної похідної

$$\Phi|_{\partial\mathcal{D}} = m(s), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}|_{\partial\mathcal{D}} = t(s). \quad (2)$$

Тут s — дійсний параметр, що визначає довільну точку $(x, y) \in \partial\mathcal{D}$ на кривій $\partial\mathcal{D}$; $m(s), t(s)$ — задані функції.

Так сформульована бігармонічна задача є коректна, тобто вона має єдиний розв'язок, неперервний у замкненій області $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$. Для забезпечення виконання умов (2) контур $\partial\mathcal{D}$, очевидно, повинен бути достатньо гладкий.

Разом із тим у багатьох застосуваннях важливими є задачі для областей із кутовими точками [5]. У таких задачах доводиться відходити від вимог неперервності, а за певних умов і обмеженості розв'язку в цих точках. Звичайно, це не може бути причиною відмови від розгляду подібних неklasичних бігармонічних задач, адже вони, здебільш, доволі точно моделюють конкретні фізичні об'єкти, а поведінка їх розв'язків в околах кутових точок цілком узгоджується з відомими фізичними уявленнями та результатами експериментальних досліджень.

Інший тип неklasичних бігармонічних задач виникає внаслідок застосування крайових умов, відмінних від умов (2). Крайові умови в математичних моделях є відображення певних фізичних закономірностей, які визначають взаємодію об'єкта з довкіллям через його поверхню. Ці закономірності можна виражати математично в термінах різних фізичних параметрів. Так, наприклад, у теорії пружності розглядають формулювання крайових задач, у яких на межі області задано компоненти вектора переміщень чи вектора напружень, або ж мішані задачі [2]. Зводячи їх до бігармонічних шляхом використання функції напружень [2], отримуємо крайові умови, істотно відмінні від (2). Із трьох названих, лише граничні умови другого роду можна звести до виду (2).

Окремим класом є обернені бігармонічні задачі. Для рівнянь виду (1) можна розглядати лише один тип обернених задач — із невизначеними крайовими умовами. Це задачі, в яких умови, що діють на межі $\partial\mathcal{D}$, невідомі цілком, задані лише частково або ж визначені лише на частині контуру $\partial\mathcal{D}$. Оскільки такі задачі є недо-означені, то для побудови розв'язку їх слід доповнити іншими даними. Зокрема, важливе практичне значення мають дані, які можна отримати шляхом фізичних вимірювань параметрів стану об'єкта, який моделюють. У статті [6] запропоновано варіаційне формулювання оберненої задачі для півбезмежної прямокутної області $(0 < x < \infty) \cup (-1 < y < 1)$, на сторонах $y = \pm 1$ якої задано однорідні умови на вісь y (2), а на торці $x = 0$ діють неоднорідні умови, які невідомі. Як додаткові дані

у цій задачі використано значення інтеграла $\int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} dy$, задані для різних значень змінної x .

Задача виникає за неруйнівного визначення двовимірного напружено-деформованого стану призматичного тіла на основі даних, отриманих із використанням методу фотопружності. Для її розв'язування функцію $\Phi(x, y)$ у праці [6] подають у вигляді розвинення за повними системами бігармонічних функцій, які тотожно задовольняють задані однорідні умови на сторонах $y = \pm 1$. Збудовано функціонал, який за квадратичною нормою визначає відхилення розв'язку

від заданих значень інтеграла $\int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} dy$. Умови мінімуму цього функціонала приводять до безмежної системи алгебраїчних рівнянь стосовно коефіцієнтів розв'язку $\Phi(x, y)$.

Метою цієї роботи є розвиток методу, запропонованого в [6], для випадку скінченної прямокутної області та числове дослідження ефективності його застосування для розв'язування обернених задач визначення двовимірного напружено-деформованого стану тіл відповідної геометрії на основі даних вимірювання параметрів поля переміщень на його поверхні.

1. Формулювання оберненої задачі

Розглянемо тривимірне тверде тіло \mathcal{B} , що займає область \mathcal{V} , утворену трансляцією плоскої двовимірної області $\mathcal{D}(x, y)$ вздовж деякого відрізка осі Oz , нормальної до площини xOy . Нехай довжина l цього відрізка значно перевищує діаметр D області \mathcal{D} . Якщо на бічній поверхні тіла задані умови навантаження та/чи закріплення, які не залежать від координати Oz , то у значній частині тіла \mathcal{B} , за винятком малих крайових областей, розміри яких у напрямку осі Oz є суцільні з діаметром D , реалізується двовимірний напружено-деформований стан плоскої деформації [2]. Наслідком трансляційної інваріантності напружено-деформованого стану стосовно осі Oz є те, що лише компоненти тензорів напружень $\sigma_{xx}(x, y), \sigma_{yy}(x, y), \sigma_{xy}(x, y) = \sigma_{yx}(x, y), \sigma_{zz} = -\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ і деформацій $\varepsilon_{xx}(x, y), \varepsilon_{yy}(x, y), \varepsilon_{xy}(x, y) = \varepsilon_{yx}(x, y)$ відмінні від нуля. Решта компонент цих тензорів тотожно дорівнюють нулю. Тут ν — коефіцієнт Пуассона матеріалу.

За таких умов компоненти тензорів напружень і деформацій задовольняють у відкритій області $\mathcal{D}(x, y)$ такі диференціальні рівняння [2]

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (4)$$

Беручи до уваги співвідношення, що пов'язують компоненти тензора деформації з компонентами тензора напружень [2],

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[(1 - \nu^2) \sigma_{xx} - \nu(1 + \nu) \sigma_{yy} \right], \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left[(1 - \nu^2) \sigma_{yy} - \nu(1 + \nu) \sigma_{xx} \right],$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{(1 + \nu) \sigma_{xy}}{E}, \quad (5)$$

(де E — модуль Юнга матеріалу), можемо переписати рівняння (4) стосовно компонент тензора напружень [2]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (6)$$

Отримали систему трьох рівнянь (3), (6), які визначають у відкритій області \mathcal{D} три невідомі функції $\sigma_{xx}(x, y)$, $\sigma_{yy}(x, y)$ і $\sigma_{xy}(x, y) = \sigma_{yx}(x, y)$.

Якщо ввести функцію напружень [2] $\Phi(x, y)$ таку, що

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad (7)$$

то рівняння (3) задовольнятимуться тотожно, а з (6) отримаємо бігармонічне рівняння (1).

Поведінка функцій $\sigma_{xx}(x, y)$, $\sigma_{yy}(x, y)$ і $\sigma_{xy}(x, y)$ на межі $\partial\mathcal{D}$ області \mathcal{D} визначається, як зазначалося, взаємодією тіла з зовнішніми об'єктами. Зокрема, якщо відомий розподіл поверхневих сил $\mathbf{p}(s) = \{p_x(s), p_y(s)\}$, що діють на тіло ззовні, то функція $\Phi(x, y)$ справджуватиме на межі $\partial\mathcal{D}$ умови (2), в яких функції $m(s)$ і $t(s)$ визначаються через компоненти поверхневих сил $p_x(s), p_y(s)$ [2].

Інші крайові умови на функцію $\Phi(x, y)$ отримаємо у випадку, коли на поверхні $\partial\mathcal{B}$ тіла \mathcal{B} задано компоненти вектора переміщень [1] $u_x|_{\partial\mathcal{B}} = u(s)$, $u_y|_{\partial\mathcal{B}} = v(s)$, де $u(s)$, $v(s)$ — задані функції. Враховуючи співвідношення, які пов'язують компоненти тензора деформації та вектора переміщень [2]

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad (8)$$

співвідношення пружності (5) і формули (7), отримуємо такі подання для компонент переміщень через функцію $\Phi(x, y)$

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{(1-\nu^2)}{E} \int \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} dx - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} + u_0(y), \\ u_y &= \frac{(1-\nu^2)}{E} \int \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} dy - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} + v_0(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Тут $u_0(y)$, $v_0(x)$ — невизначені лінійні функції, які слід вибрати так, щоб знайдене в результаті розв'язування задачі поле переміщень $(u_x(x, y), u_y(x, y))$ не містило трансляції та повороту тіла \mathcal{B} як абсолютно жорсткого [2].

Формули (9) визначають і крайові умови, яким слід підпорядкувати функцію $\Phi(x, y)$ у випадку, коли на поверхні $\partial\mathcal{B}$ тіла \mathcal{B} задано компоненти вектора переміщень.

Нехай тіло \mathcal{B} має прямокутний переріз: $\mathcal{D}(x, y) = (-a < x < a) \cup (-1 < y < 1)$. Тіло перебуває у рівноважному напружено-деформованому стані, зумовленому самозрівноваженими априорі невідомими $p_x(y), p_y(y), y \in (-1, 1)$ силами чи переміщеннями $u(y), v(y)$, що діють на гранях $x = \pm a$. Натомість відомо, що грані $y = \pm 1$ є вільні від зовнішніх навантажень. Окрім того, задані функції $\xi^+(x)$, $\xi^-(x)$ і $\eta^+(x)$, $\eta^-(x)$, які визначають компоненти вектора переміщень u_x та u_y на гранях $y = 1$ і $y = -1$ відповідно. Ці функції можна встановити шляхом фізичних вимірювань, наприклад, використовуючи метод голографічної спекл-інтерферометрії [7]. Необхідно визначити напружено-деформований стан тіла, тобто встановити функції $\sigma_{xx}(x, y), \sigma_{yy}(x, y), \sigma_{xy}(x, y), \varepsilon_{xx}(x, y), \varepsilon_{yy}(x, y), \varepsilon_{xy}(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)$ у тілі \mathcal{B} та на його поверхні $\partial\mathcal{B}$.

Відповідно до цього сформулюємо обернену бігармонічну задачу: знайти функцію $\Phi(x, y)$, яка у відкритій прямокутній області \mathcal{D} задовольняє рівняння (1), а на її сторонах $y = \pm 1$ умови

$$\Phi|_{y=\pm 1} = 0, \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right|_{y=\pm 1} = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{(1-v^2)}{E} \int \left. \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \right|_{y=\pm 1} dx - \frac{v(1+v)}{E} \left. \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right|_{y=\pm 1} + u_0 = \xi^\pm(x), \\ \frac{(1-v^2)}{E} \int \left. \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \right|_{y=\pm 1} dy - \frac{v(1+v)}{E} \left. \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right|_{y=\pm 1} + v_0(x) = \eta^\pm(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Розв'язавши цю задачу, за формулами (7)-(9) знайдемо параметри напружено-деформованого стану в тілі \mathcal{B} , а за ними визначимо умови навантаження, які діють на гранях $x = \pm a$.

Зазначимо, що сформульована задача є некоректно поставлена, оскільки крайові умови на сторонах $x = \pm a$ прямокутника є невідомі, а на кожній зі сторін $y = \pm 1$ задано по чотири умови замість двох. Відповідна їй задача теорії пружності є обернена, оскільки прикладені до граней $x = \pm a$ навантаження невідомі, натомість задано деякі параметри, спричиненого ними напружено-деформованого стану, які використовуються як вхідні дані.

Розв'язок цієї задачі дозволяє встановити напружено-деформований стан об'єкта та відновити навантаження, що його зумовлюють.

2. Варіаційний метод розв'язування задачі

Зазначимо, що сформульовану задачу (1), (10), (11) можна звести до розв'язування двох незалежних задач — симетричної й антисиметричної стосовно серединної

лінії прямокутника $y = 0$. Для кожної з них достатньо задовольнити крайові умови (10), (11) лише на одній стороні

$$\Phi|_{y=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=1} = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{(1-v^2)}{E} \int \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right|_{y=1} dx - \frac{v(1+v)}{E} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{y=1} + u_0 = \xi(x), \\ \frac{(1-v^2)}{E} \int \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_{y=1} dy - \frac{v(1+v)}{E} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=1} + v_0(x) = \eta(x), \end{aligned} \quad (13)$$

що дозволяє істотно знизити громіздкість кожної з цих двох задач.

Функції правих частин у крайових умовах (13) для симетричної задачі визначаємо формулами

$$\xi(x) = \frac{1}{2} [\xi^+(x) + \xi^-(x)], \quad \eta(x) = \frac{1}{2} [\eta^+(x) - \eta^-(x)], \quad (14)$$

а для антисиметричної —

$$\xi(x) = \frac{1}{2} [\xi^+(x) - \xi^-(x)], \quad \eta(x) = \frac{1}{2} [\eta^+(x) + \eta^-(x)]. \quad (15)$$

Легко переконатися, що сума розв'язків симетричної й антисиметричної задач дає розв'язок задачі (1), (10), (11).

Для розв'язування сформульованої задачі подамо її розв'язок у вигляді [8]

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \sum_k \sum_{\mu=1}^2 \left\{ C_k^{(\mu)} \exp[-\gamma_k^{(\mu)}(x+a)] + D_k^{(\mu)} \exp[\gamma_k^{(\mu)}(x-a)] \right\} F_k^{(\mu)}. \quad (16)$$

Тут використано позначення $C_k^{(1)} = C_k$, $C_k^{(2)} = \bar{C}_k$, $D_k^{(1)} = D_k$, $D_k^{(2)} = \bar{D}_k$, C_k , D_k — невизначені комплексні сталі (риска над буквою вказує на операцію комплексного спряження); $\gamma_k^{(1)} = \gamma_k$, $\gamma_k^{(2)} = \bar{\gamma}_k$, γ_k — комплексні корені рівнянь

$$\begin{aligned} \sin(2\gamma_k) + 2\gamma_k = 0 \quad (\text{симетрія}), \\ \sin(2\gamma_k) - 2\gamma_k = 0 \quad (\text{антисиметрія}), \end{aligned} \quad (17)$$

$F_k^{(1)} = F_k(y)$, $F_k^{(2)} = \bar{F}_k(y)$, $F_k(y)$ — комплекснозначні функції дійсного аргументу

$$\begin{aligned} F_k(y) = \kappa_k \cos(\gamma_k y) + \gamma_k y \sin(\gamma_k y), \quad \kappa_k = -\gamma_k \operatorname{tg} \gamma_k \quad (\text{симетрія}), \\ F_k(y) = \kappa_k \sin(\gamma_k y) + \gamma_k y \cos(\gamma_k y), \quad \kappa_k = -\gamma_k \operatorname{ctg} \gamma_k \quad (\text{антисиметрія}). \end{aligned} \quad (18)$$

Функція $\Phi(x, y)$ у поданні (16) задовольняє рівняння (1) та однорідні умови (12) за будь-яких значень коефіцієнтів C_k , D_k . Тож для встановлення розв'язку

задачі залишилося підпорядкувати його крайовим умовам (13), вибираючи належним чином коефіцієнти C_k, D_k . Для цього використаємо функціонал

$$F_1 = \int_{-a}^a \left\{ \left[u_x \Big|_{y=1} - \xi(x) \right]^2 + \left[u_y \Big|_{y=1} - \eta(x) \right]^2 \right\} dx, \quad (19)$$

де $u_x(x, y)$ і $u_y(x, y)$ виражаються через $\Phi(x, y)$ згідно формул (9).

Функціонал (19) визначає відхилення за квадратичною нормою розв'язку $\Phi(x, y)$ від заданих умов (13). Підставляючи в функціонал (19) подання розв'язку (16) і застосовуючи до нього необхідні умови мінімуму

$$\frac{\partial F}{\partial C_k} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{C}_k} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial D_k} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{D}_k} = 0, \quad (20)$$

отримуємо безмежну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) стосовно безмежних послідовностей коефіцієнтів $C_k, \bar{C}_k, D_k, \bar{D}_k, k = 1, \dots$

$$\left. \begin{aligned} \sum_k \sum_{\mu=1}^2 \left[M_{mk}^{(\lambda, \mu)} C_k^{(\mu)} + N_{mk}^{(\lambda, \mu)} D_k^{(\mu)} \right] &= K_m^{(\lambda)} \\ \sum_k \sum_{\mu=1}^2 \left[O_{mk}^{(\lambda, \mu)} C_k^{(\mu)} + P_{mk}^{(\lambda, \mu)} D_k^{(\mu)} \right] &= L_m^{(\lambda)} \end{aligned} \right\}, \quad \lambda = 1, 2. \quad (21)$$

Коефіцієнти цієї системи знаходимо через корені трансцендентних рівнянь (17), а праві частини — ще й через функції крайових умов $\xi(x)$ і $\eta(x)$. Наведемо їх тут для випадку симетрії

$$M_{mk}^{(\lambda, \mu)} = \frac{1 - e_k^{(\mu)} e_m^{(\lambda)}}{2 \left[\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)} \right]} \left[u_{1k}^{(\mu)} u_{1m}^{(\lambda)} + v_{1k}^{(\mu)} v_{1m}^{(\lambda)} \right] - \frac{u_{1k}^{(\mu)} u_{1m}^{(\lambda)}}{4a \gamma_k^{(\mu)} \gamma_m^{(\lambda)}} \left[1 - e_k^{(\mu)} \right] \left[1 - e_m^{(\lambda)} \right], \quad (22)$$

$$\begin{aligned} N_{mk}^{(\lambda, \mu)} &= \frac{e_k^{(\mu)} - e_m^{(\lambda)}}{2 \left[\gamma_m^{(\lambda)} - \gamma_k^{(\mu)} \right]} \left[u_{1k}^{(\mu)} u_{1m}^{(\lambda)} + v_{1k}^{(\mu)} v_{1m}^{(\lambda)} \right] - \\ &- \frac{u_{1k}^{(\mu)} u_{1m}^{(\lambda)}}{4a \gamma_k^{(\mu)} \gamma_m^{(\lambda)}} \left[1 - e_k^{(\mu)} \right] \left[1 - e_m^{(\lambda)} \right], \quad k \neq m, \end{aligned} \quad (23)$$

$$N_{mm}^{(\lambda, \lambda)} = a e_m^{(\mu)} \left[\left(u_{1m}^{(\mu)} \right)^2 + \left(v_{1m}^{(\lambda)} \right)^2 \right] - \frac{\left(u_{1m}^{(\mu)} \right)^2 \left(1 - e_m^{(\lambda)} \right)^2}{4a \left(\gamma_m^{(\lambda)} \right)^2}, \quad (24)$$

$$P_{mk}^{(\lambda, \mu)} = M_{mk}^{(\lambda, \mu)}, \quad O_{mk}^{(\lambda, \mu)} = N_{mk}^{(\lambda, \mu)}, \quad (25)$$

$$K_m^{(\lambda)} = \int_{-a}^a \exp \left[-\gamma_m^{(\lambda)} (x + a) \right] \left[\eta(x) v_{1m}^{(\lambda)} + \xi(x) u_{1m}^{(\lambda)} \right] dx -$$

$$-\frac{u_{1m}^{(\lambda)}}{2a} \int_{-a}^a \exp[-\gamma_m^{(\lambda)}(x+a)] dx \int_{-a}^a \xi(x) dx, \quad (26)$$

$$L_m^{(\lambda)} = \int_{-a}^a \exp[\gamma_m^{(\lambda)}(x-a)] [\eta(x)v_{1m}^{(\lambda)} + \xi(x)u_{1m}^{(\lambda)}] dx - \\ - \frac{u_{1m}^{(\lambda)}}{2a} \int_{-a}^a \exp[\gamma_m^{(\lambda)}(x-a)] dx \int_{-a}^a \xi(x) dx. \quad (27)$$

У формулах (22)-(27) використано позначення $u_{1k}^{(\mu)} = -2\gamma_k^{(\mu)} \cos(\gamma_k^{(\mu)})$, $v_{1k}^{(\mu)} = 2\gamma_k^{(\mu)} \sin(\gamma_k^{(\mu)})$, $e_k^1 = \exp(-2a\gamma_k)$, $e_k^2 = \exp(-2a\bar{\gamma}_k)$.

Таким чином, знаходження розв'язку оберненої задачі (1), (10), (11) зведено до розв'язування безмежної СЛАР (21).

3. Моделювання вхідних даних

Функції $\xi^\pm(x)$ і $\eta^\pm(x)$, які є вхідними даними для оберненої задачі, можна отримати, як зазначалося раніше, шляхом фізичних вимірювань компонент вектора переміщень на поверхні реальних об'єктів. Проте, для дослідження ефективності запропонованого методу можна застосувати числовий експеримент для моделювання цих даних. Для цього необхідно розв'язати відповідну пряму задачу, що моделює реальні умови навантаження тіла, та за її розв'язком обчислити компоненти переміщень $u_x|_{y=\pm 1}$ та $u_y|_{y=\pm 1}$, які діють на сторонах $y = \pm 1$ прямокутника, як функції координати x . Одержані так залежності можна використовувати як функції $\xi^\pm(x)$ і $\eta^\pm(x)$. Щоб врахувати вплив випадкових похибок на процес вимірювання, можна застосувати метод статистичного моделювання [9]. Цей підхід дозволяє на основі розрахованих залежностей $v^\pm(x) = u_x(x, y)|_{y=\pm 1}$, $u^\pm(x) = u_y(x, y)|_{y=\pm 1}$ отримувати з наперед заданими параметрами статистичного розкиду реалізації випадкових полів $\xi^\pm(x)$ і $\eta^\pm(x)$, що моделюють виміряні з відповідною точністю дані.

Розглянемо для прикладу пряму задачу двовимірної теорії пружності для тіла прямокутного поперечного перерізу за умов навантаження

$$u_x|_{x=-a} = u(y), \quad u_y|_{x=-a} = v(y), \quad \sigma_{xx}|_{x=a} = \sigma(y), \quad \sigma_{xy}|_{x=a} = \tau(y), \quad (28)$$

$$\sigma_{yy}|_{y=\pm 1} = \sigma_{xy}|_{y=\pm 1} = 0, \quad (29)$$

де $u(y)$, $v(y)$, $\sigma(y)$, $\tau(y)$ — задані функції.

Симетрична задача такого типу виникає, зокрема, в дослідженні концентрації напружень у тілі, грань $x = -a$ якого є жорстко закріплена, а до протилежної грані прикладені розподілені нормальні сили $p(y)$ [8]. У цьому випадку

$$\begin{aligned}
 u(y) &= 0, & v(y) &= \left(\frac{\nu}{E}\right)Py, & \sigma(y) &= p(y) - P, \\
 \tau(y) &= 0, & P &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p(y) dy.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Варіаційний метод розв'язування прямих бігармонічних задач для прямокутника розглянуто у статті [8]. За цим методом шуканий розв'язок подають у вигляді (16), який справджує крайові умови (29), а умови (28) задовольняють за нормою L_2 , шляхом мінімізації середньоквадратичного відхилення розв'язку від функцій прямих частин рівностей (28). Із цією метою використовували функціонал

$$\begin{aligned}
 F &= \int_{-1}^1 \left\{ \left[\sigma_{xx}|_{x=a} - \sigma(y) \right]^2 + \left[\sigma_{xy}|_{x=a} - \tau(y) \right]^2 + \right. \\
 &+ \left. \left[u_x|_{x=0} - u(y) \right]^2 + \left[u_y|_{x=0} - v(y) \right]^2 \right\} dy.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Застосовуючи до функціонала (31) умови (20) і беручи до уваги формули (7), (9), (16), прийдемо до безмежної СЛАР виду (21), у якій

$$\begin{aligned}
 M_{mk}^{(\lambda\mu)} &= \frac{4\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)} \left[\left(\gamma_k^{(\mu)}\right)^2 \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)} - \left(\gamma_m^{(\lambda)}\right)^2 \cos^2 \gamma_k^{(\mu)} \right]}{\left(\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)}\right) \left(\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)}\right)^3 \cos \gamma_k^{(\mu)} \cos \gamma_m^{(\lambda)}} \times \\
 &\times \left\{ (1+\nu) \left[(1+\nu)\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)} + \left(\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)}\right)^2 \right] + \right. \\
 &+ \exp \left[-2a \left(\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)}\right) \right] \left(\gamma_k^{(\mu)}\right)^2 \left(\gamma_m^{(\lambda)}\right)^2 \left. \right\} + \\
 &+ \frac{4\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)} \sin \left(\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)}\right)}{\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)}} - \frac{4\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)} \nu^2}{\cos \gamma_k^{(\mu)} \cos \gamma_m^{(\lambda)}}, \\
 M_{mm}^{(\lambda\lambda)} &= \frac{2}{3} \left(\gamma_m^{(\lambda)}\right)^4 \exp \left(-4a\gamma_m^{(\lambda)}\right) \left[3 \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)} - \left(\gamma_m^{(\lambda)}\right)^2 \right] + \\
 &+ 2 \left(\gamma_m^{(\lambda)}\right)^2 \left\{ \frac{1}{3} \left[6 - (1+\nu)^2 \left(\gamma_m^{(\lambda)}\right)^2 \right] - \frac{2\nu^2}{\cos^2 \gamma_m^{(\lambda)}} \right\}, \\
 N_{mk}^{(\lambda\mu)} &= \frac{4\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)} \left[\left(\gamma_k^{(\mu)}\right)^2 \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)} - \left(\gamma_m^{(\lambda)}\right)^2 \cos^2 \gamma_k^{(\mu)} \right]}{\left(\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)}\right)^3 \left(\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)}\right)^3 \cos \gamma_k^{(\mu)} \cos \gamma_m^{(\lambda)}} \times \\
 &\times \left\{ (1+\nu) \exp \left(-2a\gamma_k^{(\mu)}\right) \left(\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)}\right)^2 \left[(1+\nu)\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)} + \left(\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)}\right)^2 \right] - \right.
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
 & -\exp(-2a\gamma_m^{(\lambda)})\left(\gamma_k^{(\mu)}\right)^2\left(\gamma_m^{(\lambda)}\right)^2\left(\gamma_k^{(\mu)}-\gamma_m^{(\lambda)}\right)^2\left\}+ \right. \\
 & \left. +4\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)}\exp(-2a\gamma_k^{(\mu)})\left[\frac{\sin\left(\gamma_k^{(\mu)}-\gamma_m^{(\lambda)}\right)}{\gamma_k^{(\mu)}-\gamma_m^{(\lambda)}}-\frac{v^2}{\cos\gamma_k^{(\mu)}\cos\gamma_m^{(\lambda)}}\right], \right. \\
 & N_{mm}^{(\lambda\lambda)}=\left(\gamma_m^{(\lambda)}\right)^2\exp(-2a\gamma_m^{(\lambda)})\times \\
 & \times\left\{\left(\gamma_m^{(\lambda)}\right)^2\cos^2\gamma_m^{(\lambda)}+\frac{2}{3}\left[6-(1+v)^2\left(\gamma_m^{(\lambda)}\right)^2\right]-\frac{4v^2}{\cos^2\gamma_m^{(\lambda)}}\right\}, \tag{33}
 \end{aligned}$$

$$O_{mk}^{(\lambda\mu)}=N_{km}^{(\lambda\mu)}, \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
 P_{mk}^{(\lambda\mu)} & =\frac{4\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)}\left[\left(\gamma_k^{(\mu)}\right)^2\cos^2\gamma_m^{(\lambda)}-\left(\gamma_m^{(\lambda)}\right)^2\cos^2\gamma_k^{(\mu)}\right]}{\left(\gamma_k^{(\mu)}+\gamma_m^{(\lambda)}\right)\left(\gamma_k^{(\mu)}-\gamma_m^{(\lambda)}\right)^3\cos\gamma_k^{(\mu)}\cos\gamma_m^{(\lambda)}}\times \\
 & \times\left\{\left(1+v\right)\exp\left[-2a\left(\gamma_k^{(\mu)}+\gamma_m^{(\lambda)}\right)\right]\left[\left(1+v\right)\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)}+\left(\gamma_k^{(\mu)}-\gamma_m^{(\lambda)}\right)^2\right]+ \right. \\
 & \left. +\left(\gamma_k^{(\mu)}\right)^2\left(\gamma_m^{(\lambda)}\right)^2\right\}+4\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)}\exp\left[-2a\left(\gamma_k^{(\mu)}+\gamma_m^{(\lambda)}\right)\right]\times \\
 & \times\left[\frac{\sin\left(\gamma_k^{(\mu)}-\gamma_m^{(\lambda)}\right)}{\gamma_k^{(\mu)}-\gamma_m^{(\lambda)}}-\frac{v^2}{\cos\gamma_k^{(\mu)}\cos\gamma_m^{(\lambda)}}\right], \\
 P_{mm}^{(\lambda\lambda)} & =\frac{2}{3}\left(\gamma_m^{(\lambda)}\right)^4\left[3\cos^2\gamma_m^{(\lambda)}-\left(\gamma_m^{(\lambda)}\right)^2\right]+ \\
 & +2\left(\gamma_m^{(\lambda)}\right)^2\exp(-4a\gamma_m^{(\lambda)})\left[\frac{6-(1+v)^2\left(\gamma_m^{(\lambda)}\right)^2}{3}-\frac{2v^2}{\cos^2\gamma_m^{(\lambda)}}\right], \tag{35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_m^{(\lambda)} & =\int_{-1}^1\left[\exp(-2a\gamma_m^{(\lambda)})\left(\sigma(y)F_m^{(\lambda)''}+\gamma_m^{(\lambda)}\tau(y)F_m^{(\lambda)'}\right)+ \right. \\
 & \left. +u(y)u_m^{(\lambda)}+v(y)v_m^{(\lambda)}\right]dy-\frac{1}{2}\int_{-1}^1u(y)dy\int_{-1}^1u_m^{(\lambda)}dy, \\
 L_m^{(\lambda)} & =\int_{-1}^1\left[\sigma(y)F_m^{(\lambda)''}-\gamma_m^{(\lambda)}\tau(y)F_m^{(\lambda)'}+\exp(-2a\gamma_m^{(\lambda)})\left(u(y)u_m^{(\lambda)}+v(y)v_m^{(\lambda)}\right)\right]dy- \\
 & -\frac{1}{2}\exp(-2a\gamma_m^{(\lambda)})\int_{-1}^1u(y)dy\int_{-1}^1u_m^{(\lambda)}dy. \tag{36}
 \end{aligned}$$

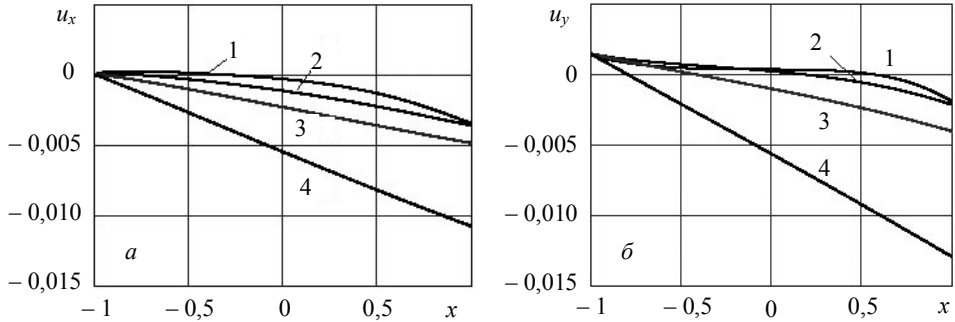


Рис. 1. Розподіли нормальних (а) та дотичних (б) переміщень на поверхні $y = 1$ для різних значень половинної ширини прямокутника: $a = 1; 0,5; 0,25; 0,125$ (криві 1-4 відповідно)

Таким чином, задавшись функціями $u(y)$, $v(y)$, $\sigma(y)$, $\tau(y)$ можемо розв'язати пряму задачу теорії пружності та за отриманим розв'язком обчислити компоненти вектора переміщень u_x , u_y на поверхні $y = 1$, зумовлені прикладеним навантаженням.

Систему (21) для прямої задачі розв'язували методом редукції [9], обмежившись при цьому скінченною кількістю N членів розвинення в сумі (16). Середньоквадратичну точність отриманого розв'язку оцінювали за значенням функціонала (31). Проведеними числовими дослідженнями встановили, що для $N = 20$ середньоквадратична похибка розв'язку, обчислена за нев'язкою заданих на сторонах $x = \pm a$ крайових умов, не перевищує $2 \cdot 10^{-3}$. Навантаження вибирали у вигляді $p(y) = \sigma_0(3/2 y^2 + 1/2)$, для якого $P = \sigma_0$, $\sigma(y) = \sigma_0(3y^2 - 1)/2$.

На рис. 1 показано розраховані за розв'язком прямої задачі для $\sigma_0 = 0,005E$ залежності нормованих на a компонент переміщень на поверхні $y = 1$ від безрозмірної координати.

Розв'язування прямих задач дозволяє дослідити множини вхідних даних оберненої задачі та вплив на них геометрії об'єкта й умов навантаження. Зокрема, наведені на рис. 1 графіки показують, що значення параметрів, які використовуються як вхідні дані для оберненої задачі, є достатні для їх вимірювання фізичними методами, істотно залежать від координати x і змінюються зі зміною геометрії області. Тому їх можна використовувати як достатньо інформативні параметри для оберненої задачі.

4. Числове дослідження розв'язку оберненої задачі

Для розв'язування оберненої задачі (1), (12), (13) як вхідні дані використовували залежності $\xi(x) = u_x(x, y)|_{y=1}$, $\eta(x) = u_y(x, y)|_{y=1}$, розраховані за розв'язком прямої задачі. Ця задача є істотно недоозначена, оскільки за двома заданими функціями $\xi(x)$ і $\eta(x)$, слід визначити чотири невідомі функції $\sigma(y)$, $\tau(y)$, $u(y)$, $v(y)$.

Для підвищення інформативності вхідних даних можна використовувати додаткову апіорну інформацію. Наприклад, нехай додатково відомо, що $\tau(y) = 0$ і $u(y) = 0$, або відоме навантаження $\sigma(y), \tau(y)$, прикладене до сторони $x = a$. У такому разі замість F_1 використаємо такі функціонали

$$F_2 = \int_{-a}^a \left[\left(u_x|_{y=1} - \xi(x) \right)^2 + \left(u_y|_{y=1} - \eta(x) \right)^2 \right] dx + \\ + a^2 \int_{-1}^1 \left[\left(\sigma_{xy}|_{x=a} \right)^2 + \left(u_x|_{x=-a} \right)^2 \right] dy, \quad (37)$$

$$F_3 = \int_{-a}^a \left[\left(u_x|_{y=1} - \xi(x) \right)^2 + \left(u_y|_{y=1} - \eta(x) \right)^2 \right] dx + \\ + a^2 \int_{-1}^1 \left[\left(\sigma_{xx}|_{x=a} - \sigma(y) \right)^2 + \left(\sigma_{xy}|_{x=a} - \tau(y) \right)^2 \right] dy. \quad (38)$$

Систему (21) розв'язували методом редукції та досліджували залежність точності отриманого числового розв'язку від утримуваних у розвиненні (16) кількості доданків N . Точність розв'язку оцінювали двома способами — за значеннями функціоналів (37), (38)

$$\delta_{\text{inv}} = \frac{1}{8a\sigma_0} \sqrt{F_\lambda}, \quad \lambda = 1, 2, 3, \quad (39)$$

та за «істинною похибкою»

$$\delta_{\text{true}} = \frac{1}{8\sigma_0} \left\{ \int_{-1}^1 \left[\left(\sigma_{xx}^{\text{inv}}|_{x=a} - \sigma(y) \right)^2 + \left(\sigma_{xy}^{\text{inv}}|_{x=a} - \tau(y) \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(u_x^{\text{inv}}|_{x=-a} - u(y) \right)^2 + \left(u_y^{\text{inv}}|_{x=-a} - v(y) \right)^2 \right] dy \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (40)$$

Тут $\sigma_{xx}^{\text{inv}}, \sigma_{xy}^{\text{inv}}$ та $u_x^{\text{inv}}, u_y^{\text{inv}}$ — компоненти тензора напружень і вектора переміщень, визначені за формулами (7), (9) на основі розв'язку $\Phi(x, y)$ оберненої задачі.

Ця похибка визначає середньоквадратичне відхилення розв'язку оберненої задачі на сторонах $x = \pm a$ прямокутника від крайових умов, які використовували у прямій задачі.

Результати проведених числових експериментів подано у таблиці.

Точність розв'язку оберненої задачі спочатку зростає зі зростанням кількості доданків у розвиненні (16), а відтак зменшується, що є проявом обчислювальної нестійкості. Тож, існує певне граничне значення точності, яку можна досягнути, застосовуючи запропонований метод. Це значення залежить від умов,

Таблиця

	N	1		2		3		4	
		δ_{inv}	δ_{true}	δ_{inv}	δ_{true}	δ_{inv}	δ_{true}	δ_{inv}	δ_{true}
F_1	$a = 0,5$	0,004	0,033	0,001	0,029	0,000	0,124	0,000	0,840
	$a = 1$	0,003	0,024	0,001	0,015	0,000	0,042	0,000	0,154
F_2	$a = 0,5$	0,042	0,034	0,021	0,025	0,023	0,026	0,024	0,032
	$a = 1$	0,025	0,020	0,004	0,008	0,002	0,005	0,001	0,007
F_3	$a = 0,5$	0,038	0,024	0,006	0,018	0,003	0,016	0,002	0,133
	$a = 1$	0,034	0,020	0,005	0,012	0,003	0,025	0,001	0,060

що діють на сторонах $x = \pm a$. У прикладі, який досліджували, внаслідок розривності функцій крайових умов кутові точки $x = -a, y = \pm 1$ є сингулярні для шуканого розв'язку, що спричинює обчислювальну нестійкість вже для $N = 3$, а відтак і порівняно низьку граничну точність. В інших задачах, у яких функції крайових умов є більш гладкі, ця нестійкість проявляється за більших значень N , завдяки чому граничне значення точності буде значно вище. Це питання досліджено у статті [6]. Граничну точність можна підвищити, використовуючи додаткову апіорну чи апостеріорну інформацію. Це ілюструють розрахунки, проведені для функціоналів F_2 та F_3 .

Реальна точність відтворення напружено-деформованого стану на основі емпіричних даних залежатиме ще й від похибок вимірювання. Методику проведення числових досліджень впливу випадкових похибок, неминучих під час фізичних вимірювань, на точність розв'язування обернених задач запропоновано у праці [9].

Висновки. Сформульовано некоректно поставлену бігармонічну задачу у прямокутнику, яка виникає в задачах відновлення двовимірного напружено-деформованого стану тіл прямокутного перерізу за даними вимірювань компонент переміщень на його поверхні. Розроблено варіаційний метод розв'язування цієї задачі, який приводить до безмежної лінійної системи алгебраїчних рівнянь, аналогічної тій, що виникає під час розв'язування відповідної прямої задачі варіаційним методом, запропонованим авторами раніше [8]. Завдяки цьому числова реалізація оберненої задачі вимагає обчислювальних затрат того ж порядку, що й пряма. Це створює перспективи застосування методу для розроблення математичного забезпечення програмних систем реального часу, призначених, наприклад, для моніторингу напружено-деформованого стану інженерних об'єктів.

Запропонований варіаційний підхід є доволі універсальний, його можна розвинути й для випадків вхідних даних інших типів, отриманих із застосуванням відомих фізичних методів відбору інформації про параметри напружено-деформованого стану твердих тіл. Наприклад, застосовуючи п'єзомагнітний метод, можна вимірювати розподіл різниці головних напружень на поверхні тіла, а за допомогою методу акустопружності — визначати середньоінтегральні параметри напружено-деформованого стану вздовж деяких напрямків у тілі [10] і т. д. Використовуючи ці дані прийдемо до інших типів некоректно поставлених бігармонічних задач, розв'язок яких можна шукати у вигляді подання (16).

Література

- [1] Уфлянд, Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. — Ленинград, 1968. — 576 с.
- [2] Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. — Москва: Наука, 1975. — 508 с.
- [3] Мелешко, В. В. Змішування в'язкої рідини у прямокутній порожнині / В. В. Мелешко, Г. Я. Ф. ван Хейст // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2006. — Т. 49, № 1. — С. 43-52.
- [4] Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — Москва: Наука, 1972. — 735 с.
- [5] Гринченко, В. Т. О локальных особенностях в математических моделях физических полей / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 1998. — Т. 41, № 1. — С. 12-34.
- [6] Чекурин, В. Ф. Вариационный метод решения прямых и обратных задач теории упругости для полубесконечной полосы / В. Ф. Чекурин // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* — 1999. — № 2. — С. 58-70.
- [7] Розробка технології і апаратури для діагностики конструкцій з металевих та композиційних матеріалів на основі методу електронної широкорафії / Л. М. Лобанов, В. А. Півторак, В. В. Савицький, І. В. Киянець // *Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин.* — Київ: ІАЕ ім. Є. О. Патона НАНУ, 2006. — С. 67-72.
- [8] Чекурин, В. Ф. Варіаційний метод розв'язування бігармонічних задач для прямокутної області / В. Ф. Чекурин, Л. І. Постолакі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2008. — Т. 51, № 1. — С. 88-98.
- [9] Чекурин, В. Ф. Обратная задача неразрушающего контроля уровня закалки листового стекла / В. Ф. Чекурин // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* — 1998. — № 3. — С. 86-97.
- [10] Чекурин, В. Ф. Пружні збурення в неоднорідно деформованих твердих тілах / В. Ф. Чекурин, О. З. Кравчишин. — Львів: «Сполом». — 2008. — 154 с.

Variational method for solving of inverse biharmonic problems in rectangle

Vasyl Chekurin

A variational method for solving inverse biharmonic problem has been introduced. The rectangle $(-a < x < a) \cup (-1 < y < 1)$ has been considered. The inhomogeneous boundary conditions acting on the pair of opposite rectangle legs $x = \pm a$ are a priori unknown. On each leg of the other pair $y = \pm 1$ four boundary conditions are given: the homogeneous conditions for the desired function Φ and their normal derivative $\partial\Phi/\partial y$ and the conditions $L_u\Phi|_{y=\pm 1} = \xi(x)$, $L_v\Phi|_{y=\pm 1} = \eta(x)$, where L_u, L_v — linear integro-differential operators, $\xi(x), \eta(x)$ — given functions. The solution is represented as expansion in terms of full systems of biharmonic functions each of which satisfies identically the given homogeneous conditions on the legs $y = \pm 1$. The quadratic functional determining in the L_2 norm the deviation of the solution from the given on the legs $y = \pm 1$ inhomogeneous conditions has been built. The functional minimum conditions lead to infinite system of linear algebraic equations. As an example the method has been applied to determine 2-D stress-strained state of rectangular cross-section solid on the base of data gathered by measuring of the displacements on the body surface.

Вариационный метод решения обратной бигармонической задачи в прямоугольнике

Василь Чекурин, Леся Постолаки

Предложен вариационный метод решения обратной бигармонической задачи. Рассматривается прямоугольник $(-a < x < a) \cup (-1 < y < 1)$, на боковых сторонах $x = \pm a$ которого действуют априори неизвестные неоднородные граничные условия. Вместе с тем на каждой из сторон $y = \pm 1$ задано четыре граничных условия: однородные условия для искомой функции Φ и ее нормальной производной $\partial\Phi/\partial y$, а также неоднородные условия вида $L_u\Phi|_{y=\pm 1} = \xi(x)$ и $L_v\Phi|_{y=\pm 1} = \eta(x)$, где L_u, L_v — линейные интегро-дифференциальные операторы, $\xi(x), \eta(x)$ — заданные функции. Решение задачи представляется в виде разложения по полным системам бигармонических функций, тождественно удовлетворяющих заданные на сторонах $y = \pm 1$ однородные условия. Построен квадратичский функционал, который определяет в норме L_2 отклонение решения задачи от заданных на сторонах $y = \pm 1$ неоднородных условий. Условия минимума этого функционала приводят к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения решения. Рассмотрен пример применения разработанного метода для определения двумерного напряженно-деформированного состояния тела прямоугольного сечения по данным измерений нормальной и тангенциальной компонент вектора перемещений на его поверхности.

Отримано 31.03.09