

Температурне поле та прогин півбезмежної пластинки із залежними від координати коефіцієнтами тепловіддачі

Богдан Хапко¹, Анатолій Чиж²

¹ к. ф.-м. н., Інститут прикладних проблеми механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

² Інститут прикладних проблеми механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: Chyzh_Tolik@ukt.net

(Представлено професором М. Сухорольським)

Розглянуто задачу про прогин півбезмежної пластинки, який зумовлений різницею температур зовнішнього середовища на її лицевих поверхнях і коефіцієнтами тепловіддачі, які залежать від координати. З використанням функції Гевісайда задачу про визначення температурного поля зведено до розв'язування взаємозв'язаної системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Для відшукування значень температурних характеристик побудовано числову схему розв'язування інтегральних рівнянь із використанням квадратурних формул Сімсона. Наведено числовий аналіз розподілу прогинів і температурних моментів. Проаналізовано розподіл згинних моментів і прогинів пластинки, коефіцієнти тепловіддачі якої на обох лицевих поверхнях залежать від координати.

Ключові слова: температурні характеристики, коефіцієнти тепловіддачі, інтегральні рівняння Фредгольма другого роду, згинні моменти, прогин.

Вступ. За локального нагрівання тонкостінних елементів конструкцій (в областях різної розмірності), наплавці, шліфуванні, імпульсній технології поверхневого зміцнення тощо коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях є функції від координат. Задачі термопружності шляхом граничних переходів для тіл із локально-змінними коефіцієнтами тепловіддачі досліджували у монографії [1]. Температурні поля й напруження в пластинках із кусково-постійними коефіцієнтами тепловіддачі за вузько-зонального їх нагрівання розглянуто в працях [2, 3]. У дослідженнях [1, 4, 5] вивчено термопружний стан пластинок за умови їх нагрівання у вузькій зоні торця, у тому числі, якщо зона нагрівання може рухатися. Температурне поле та спричинені ним напруження у тілах із залежними від часу та температури коефіцієнтами тепловіддачі з поверхонь досліджено в роботах [6-8]. Нагрів півбезмежної пластинки за задання на лицевих поверхнях локалізованого сталого збурення температури розглянуто в працях [9-11], а періодично розподіленого збурення температури та внутрішніх джерел тепла в [12]. У дослідженнях [13, 14] знайдено напружений стан нескінченної пластинки, яка ззовні нагрівається на кільцевих областях. Термонапружений стан прямокутної пластинки, коефіцієнти тепловіддачі якої на лицевих поверхнях змінюються за квадратичним законом, досліджено в праці [15]. Вплив зміни коефіцієнта теплообміну в області нагрівання та поза нею на напружено-

деформований стан циліндричної оболонки вивчено в монографії [16]. Слід зауважити, що у згаданих роботах, окрім [16], розглядали плосконапружений стан пластин.

У цій роботі на прикладі півбезмежної пластинки, яка перебуває під дією температури зовнішнього середовища, досліджено вплив різних значень кусково-сталих коефіцієнтів тепловіддачі з поверхонь на прогин і згинні моменти. Для визначення температурного поля використано функції Гевісайда й інтегральні рівняння Фредгольма другого роду.

1. Формулювання задачі

Розглянемо тонку півбезмежну пластинку товщини $2h$, яка на лицевих поверхнях $z = \pm h$ перебуває в умовах конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем температури t_c^+ , t_c^- відповідно. Відносні коефіцієнти тепловіддачі на цих поверхнях дорівнюють μ_1^+ і μ_1^- скрізь, окрім смуги $a_1^1 \leq x_1 \leq b_1^1$, на якій вони набувають значень μ_2^+ , μ_2^- . На краю пластинки $x_1 = 0$ задано температуру середовища T_c . Пластинка на торці $x_1 = 0$ закріплена та вільна від зовнішнього силового навантаження.

Стационарне температурне поле в пластинці за лінійного розподілу температури за товщиною описуємо взаємозв'язаною системою рівнянь [2, 16]

$$\begin{aligned} h^2 \Delta T_1(x_1) - \mu_1(x_1)[T_1(x_1) - t_1] - \mu_2(x_1)[T_2(x_1) - t_2] &= 0, \\ h^2 \Delta T_2(x_1) - 3[1 + \mu_1(x_1)][T_2(x_1) - t_2] - 3\mu_2(x_1)[T_1(x_1) - t_1] &= 3t_2 \end{aligned} \quad (1)$$

за граничних умов

$$\begin{aligned} T_1|_{x_1=0} &= T_c, & T_1|_{x_1 \rightarrow \infty} &= t_1 + r_1 t_2, \\ T_2|_{x_1=0} &= T_c^*, & T_2|_{x_1 \rightarrow \infty} &= (1 - r_2) t_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $\Delta = \partial^2 / \partial x_1^2$, а

$$\begin{aligned} \mu_{1,2}(x_1) &= \frac{h[\mu^+(x_1) \pm \mu^-(x_1)]}{2}; & \frac{h\mu^+(x_1)}{2} &= \mu_1^+ - (\mu_1^+ - \mu_2^+)H(x_1; a_1^1, b_1^1); \\ \frac{h\mu^-(x_1)}{2} &= \mu_1^- - (\mu_1^- - \mu_2^-)H(x_1; a_1^1, b_1^1); & H(x_1; a_1^1, b_1^1) &= S_-(x_1 - a_1^1) - S_+(x_1 - b_1^1); \\ t_{1,2} &= \frac{t_c^+ \pm t_c^-}{2}; & r_1 &= \frac{\mu_1^+ - \mu_1^-}{\mu_1^+ + \mu_1^- + 4\mu_1^+ \mu_1^-}; & r_2 &= \frac{\mu_1^+ + \mu_1^-}{\mu_1^+ + \mu_1^- + 4\mu_1^+ \mu_1^-}; \end{aligned}$$

$S_-(x_1 - a_1^1) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq a_1^1, \\ 0, & x_1 < a_1^1, \end{cases}$; $S_+(x_1 - b_1^1) = \begin{cases} 1, & x_1 > b_1^1, \\ 0, & x_1 \leq b_1^1 \end{cases}$ — асиметричні функції Гевісайда;

μ^+ , μ^- — коефіцієнти теплообміну з поверхонь $z = \pm h$; $T_1(x_1)$, $T_2(x_1)$ — інтегральні температурні характеристики [16, 17]. Подамо $\mu_{1,2}(x_1)$ у вигляді

$$\mu_{1,2}(x_1) = \eta_1^\pm + (\eta_2^\pm - \eta_1^\pm)H(x_1; a_1^1, b_1^1), \quad (3)$$

де $\eta_1^\pm = \mu_1^+ \pm \mu_1^-$, $\eta_2^\pm = \mu_2^+ \pm \mu_2^-$.

Введемо функції

$$\theta_1 = T_1 - t_1 - r_1 t_2, \quad \theta_2 = T_2 - t_2 + r_2 t_2 \quad (4)$$

та безрозмірну координату $x = x_1/h$. Тоді задача (1), (2) з урахуванням (3) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \Delta\theta_1(x) - \eta_1^+\theta_1(x) - \eta_1^-\theta_2(x) &= [Q_1(x) + Q_2(x)]H(x; a, b), \\ \Delta\theta_2(x) - 3(1 + \eta_1^+)\theta_2(x) - 3\eta_1^-\theta_1(x) &= [Q_3(x) + Q_4(x)]H(x; a, b), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\theta_1|_{x=0} = T_c - t_1 - r_1 t_2, \quad \theta_1|_{x \rightarrow \infty} = 0,$$

$$\theta_2|_{x=0} = T_c^* - t_2 + r_2 t_2, \quad \theta_2|_{x \rightarrow \infty} = 0,$$

де

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= (\eta_2^+ - \eta_1^+)[\theta_1(x) + r_1 t_2], & Q_2(x) &= (\eta_2^- - \eta_1^-)[\theta_2(x) - r_2 t_2], \\ Q_3(x) &= 3(\eta_2^+ - \eta_1^+)[\theta_2(x) - r_2 t_2], & Q_4(x) &= 3(\eta_2^- - \eta_1^-)[\theta_1(x) + r_1 t_2], \\ a &= a_1^1/h, & b &= b_1^1/h. \end{aligned} \quad (6)$$

Система рівнянь (5) є взаємозв'язана, в праву частину якої входять розривні функції.

2. Методика розв'язування задачі

Для знаходження розв'язку системи рівнянь (5) шукані функції θ_1 і θ_2 подамо у вигляді [16]

$$\theta_1 = \lambda_2(F_1 - \lambda_1 F_2)(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}, \quad \theta_2 = (\lambda_2 F_2 - F_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}, \quad (7)$$

де F_i ($i=1,2$) — невідомі функції. Підставивши співвідношення (7) у систему (5), для визначення функцій F_i отримаємо два диференціальні рівняння

$$\Delta F_i(x) - a_i F_i(x) = [d_i F(x)_1 + \kappa_i F_2(x) + c_i t_2]H(x; a, b), \quad i=1,2 \quad (8)$$

і граничні умови

$$F_i|_{x=0} = e_i, \quad F_i|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad (9)$$

де

$$\lambda_{1,2} = \left[3 + 2\eta_1^+ \mp \sqrt{(3 + 2\eta_1^+)^2 + 12(\eta_1^-)^2} \right] (6\eta_1^-)^{-1}; \quad a_i = \eta_1^+ + 3\eta_1^- \lambda_i; \quad i=1,2;$$

$$\begin{aligned}
 e_1 &= T_c - t_1 - r_1 t_2 - \lambda_1 (T_c^* - t_2 + r_2 t_2); \\
 e_2 &= [T_c - r_1 t_2 - \lambda_2 (T_c^* - t_2 + r_2 t_2) - t_1] \lambda_2^{-1}; \\
 d_1 &= [(\eta_2^+ - \eta_1^+) (\lambda_2 - 3\lambda_1) + (\eta_2^- - \eta_1^-) (3\lambda_1 \lambda_2 - 1)] (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}; \\
 d_2 &= [(\eta_2^+ - \eta_1^+) (-2\lambda_2) + (\eta_2^- - \eta_1^-) (3\lambda_2^2 - 1)] [(\lambda_2 - \lambda_1) \lambda_2]^{-1}; \\
 \kappa_1 &= [(\eta_2^+ - \eta_1^+) 2\lambda_1 \lambda_2 + (\eta_2^- - \eta_1^-) (\lambda_2 - 3\lambda_1^2 \lambda_2)] (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}; \\
 \kappa_2 &= [(\eta_2^+ - \eta_1^+) (-\lambda_1 \lambda_2 + 3\lambda_2^2) + (\eta_2^- - \eta_1^-) (\lambda_2 - 3\lambda_1 \lambda_2^2)] [\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)]^{-1}; \\
 c_1 &= (\eta_2^+ - \eta_1^+) (r_1 - 3\lambda_1 r_2) - (\eta_2^- - \eta_1^-) (r_2 - 3\lambda_1 r_1); \\
 c_2 &= [(\eta_2^+ - \eta_1^+) (r_1 - 3\lambda_2 r_2) - (\eta_2^- - \eta_1^-) (r_2 - 3\lambda_2 r_1)] \lambda_2^{-1}.
 \end{aligned}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (8) методом варіації сталої та задовольняючи граничні умови (9), для визначення функцій F_i одержимо систему інтегральних рівнянь

$$F_i(x) = f_i(x) + \frac{1}{2\sqrt{a_i}} \int_a^b [d_i F_1(\xi) + \kappa_i F_2(\xi)] K(a_i, x, \xi) d\xi, \quad i=1,2. \quad (10)$$

Тут

$$f_i(x) = (e_i - g_i) e^{-\sqrt{a_i} x} + g_i e^{\sqrt{a_i} x} + v_i(x), \quad g_i = \frac{c_i t_2}{2a_i} (e^{-\sqrt{a_i} b} - e^{-\sqrt{a_i} a}),$$

$$v_i(x) = \frac{1}{\sqrt{a_i}} \int_0^x c_i t_2 H(\xi; a, b) \operatorname{sh}[\sqrt{a_i}(x - \xi)] d\xi,$$

$$K(a_i, x, \xi) = -e^{-\sqrt{a_i}|x-\xi|} + e^{-\sqrt{a_i}(x+\xi)}.$$

Інтегральні рівняння (10) є рівняння Фредгольма другого роду, оскільки

$$\int_a^b \int_a^b [-e^{-a_i|x-\xi|} + e^{-a_i(x+\xi)}]^2 ds d\xi < \infty, \quad \int_a^b [f_i(x)]^2 d\xi < \infty.$$

Систему інтегральних рівнянь (10) розв'язуємо методом квадратурних формул. В основі методу лежить квадратурна формула Сімпсона [18]

$$\begin{aligned}
 \int_a^b (d_i F_1 + \kappa_i F_2) K(a_i, x, \xi) d\xi &= \sum_{j=1}^n A_j [d_i F_1(x_j) + \kappa_i F_2(x_j)] K(a_i, x, x_j) + \\
 &+ R(K(a_i, x, \xi)(d_i F_1 + \kappa_i F_2)),
 \end{aligned} \quad (11)$$

де x_j — абсциси, які ділять відрізок $[a, b]$ на $(n-1)$ -у частини; A_j — коефіцієнти, які не залежать від функції $(d_i F_1 + \kappa_i F_2) K(a_i, x, \xi)$; $R(K(a_i, x, \xi)(d_i F_1 + \kappa_i F_2))$ —

похибка заміни інтеграла сумою. Лінійні неоднорідні інтегральні рівняння (10) розглядаємо в точках поділу $x_l = a + \frac{b-a}{n-1}(l-1)$ ($l = \overline{1, n}$). У підсумку отримаємо систему $2n$ співвідношень

$$F_i(x_l) - \frac{1}{\sqrt{a_i}} \int_a^b [d_i F_1(\xi) + \kappa_i F_2(\xi)] K(x_l, \xi) d\xi = f_i(x_l), \quad l = \overline{1, n}, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Замінивши у формулах (12) інтеграли скінченними сумами згідно квадратурної формули (11) та знехтувавши малими величинами $R_l^i = R(K(a_i, x_l, \xi)(d_i F_1 + \kappa_i F_2))$, для відшукування наближених значень $\tilde{F}_i(x_l) = F_{il}$ розв'язку $F_i(x)$ рівнянь (10) у вузлах x_1, x_2, \dots, x_n одержимо таку систему $2n$ лінійних алгебраїчних рівнянь

$$F_{il} - \frac{1}{\sqrt{a_i}} \sum_{j=1}^n A_j (d_i F_{1j} + \kappa_i F_{2j}) K_{lj}^i = f_{il}, \quad l = \overline{1, n}; \quad i = 1, 2,$$

де введено позначення $K_{lj}^i = K(a_i, x_l, x_j)$, $f_{il} = f_i(x_l)$.

Підставляючи визначені значення F_{il} , $i = 1, 2$; $l = \overline{1, n}$, у формулу

$$F_i(x) = f_i(x) + \frac{1}{\sqrt{a_i}} \sum_{j=1}^n A_j (d_i F_{1j} + \kappa_i F_{2j}) K(a_i, x, x_j), \quad i = 1, 2,$$

визначаємо значення функції F_i у будь-якій точці пластинки. Відповідно температурні характеристики $T_i(x)$, $i = 1, 2$, з урахуванням співвідношень (6) і (4) знаходимо за формулами

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \frac{\lambda_2 [F_1(x) - \lambda_1 F_2(x)]}{\lambda_2 - \lambda_1} + t_1 + r_1 t_2, \\ T_2(x) &= \frac{\lambda_2 F_2(x) - F_1(x)}{\lambda_2 - \lambda_1} + (1 + r_2) t_2. \end{aligned} \quad (13)$$

3. Прогин пластинки

Прогин пластинки w , зумовлений температурним полем (13), визначаємо з диференціального рівняння [16]

$$\Delta \Delta w(x) = -A \Delta T_2(x) \quad (14)$$

і граничних умов

$$w(x)|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} + AT_2(x) \right]_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad \left[\frac{\partial^3 w(x)}{\partial x^3} + A \frac{\partial T_2(x)}{\partial x} \right]_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad (15)$$

де $A = (1 + \nu)\alpha_t h$, α_t — коефіцієнт лінійного температурного розширення, ν — коефіцієнт Пуассона.

Прогин пластинки подамо сумою $w = w^* + w_2$, де $w^* = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$ — розв'язок однорідного рівняння $\Delta \Delta w^*(x) = 0$, а w_2 — частковий розв'язок неоднорідного рівняння

$$\Delta w_2(x) = -AT_2(x). \quad (16)$$

Для знаходження розв'язку рівняння (16) чинимо так: визначаємо з системи рівнянь (1) температурний момент

$$T_2(x) = B^{-1} \left\{ \Delta [T_1(x) - CT_2(x)] + Dt_2 - [Q_1 + Q_2 - C(Q_3 + Q_4)] H(x; a, b) \right\}, \quad (17)$$

$$\text{де } B = \left[(\eta_1^-)^2 - (\eta_1^+)^2 - \eta_1^+ \right] / \eta_1^-, \quad D = \left[(\eta_1^-)^2 - (\eta_1^+)^2 \right] / \eta_1^-, \quad C = \eta_1^+ / (3\eta_1^-).$$

Підставивши (17) у рівняння (16) і проінтегрувавши його, одержуємо функцію

$$w_2 = -\frac{A}{B} \left\{ T_1 - CT_2 - Dt_2 \frac{x^2}{2} + \int_0^x \int_0^\xi [Q_1 + Q_2 - C(Q_3 + Q_4)] H(s; a, b) ds d\xi \right\}.$$

Тепер, задовольняючи граничні умови (15), знаходимо прогин пластинки

$$w(x) = -\frac{A}{B} \left\{ T_1(x) - CT_2(x) + \int_0^x \int_0^\xi [Q_1(s) + Q_2(s) - CQ_3(s) + CQ_4(s)] H(s; a, b) ds d\xi - Dt_2 \frac{x^2}{2} + \left[\frac{\partial T_1(x)}{\partial x} - C \frac{\partial T_2(x)}{\partial x} \right]_{x=0} x + T_c - CT_c^* \right\}. \quad (18)$$

Тут температурні характеристики $T_i(x)$, $i = 1, 2$, задані формулою (13).

Згинні моменти набувають значень

$$M_1 = 0, \quad M_2(x) = -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1 - \nu^2} \frac{\alpha_t (1 - \nu^2)}{h} T_2(x), \quad (19)$$

де E — модуль пружності.

4. Числові результати та їх аналіз

Розрахунки температурного моменту T_2 та прогину w проведено згідно формул (13) і (18) за таких даних: $a = 0,3$; $b = 0,6$; $T_c = 30^\circ\text{C}$; $T_c^* = 0^\circ\text{C}$; $t_1 = 20^\circ\text{C}$; $t_2 = 5^\circ\text{C}$; $\alpha_t = 1,52 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C}$; $\nu = 0,3$.

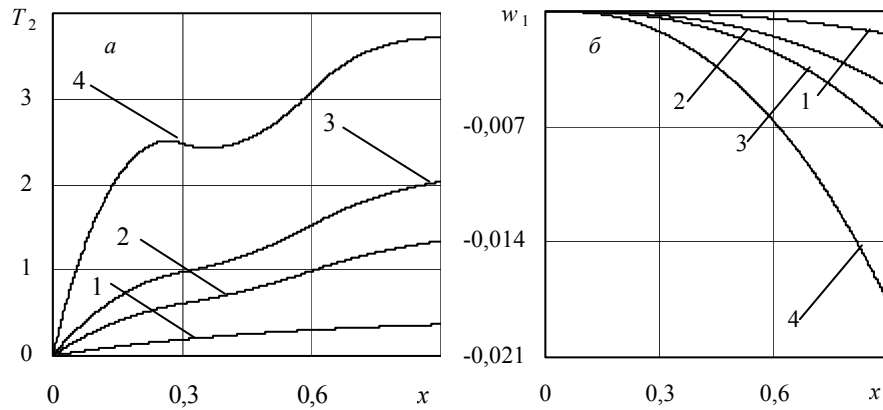


Рис. 1

На рис. 1 наведено графіки розподілу температурних моментів T_2 та прогинів $w_1 = 10^5 w$ пластинки, коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях якої набувають значень $\mu_1^+ = \mu_2^- = 0,1$. Зі збільшенням коефіцієнта тепловіддачі на смугі $0,3 \leq x \leq 0,6$ верхньої лицевої поверхні $\mu_2^+ = 0,5; 1; 5$ і поза смугою $0 \leq x < 0,3; 0,6 < x < \infty$ на нижній лицевій поверхні $\mu_1^- = 0,5; 1; 5$ (криві 2-4 відповідно), порівняно з пластинкою (рис. 1а), в якій коефіцієнти тепловіддачі однакові $\mu_2^+ = \mu_1^- = 0,1$ (крива 1), температурний момент зростає та досягає максимального значення поза смугою, а на смугі — мінімального значення. Зі зростанням аргументу x функція T_2 асимптотично прямує до заданих на нескінченності значень. На рис. 1б зображено відповідні прогини пластинки $w_1 = 10^5 w$, зумовлені температурними моментами, наведеними на рис. 1а. Зі збільшенням величини температурного моменту прогин пластинки зростає та набуває параболічної форми.

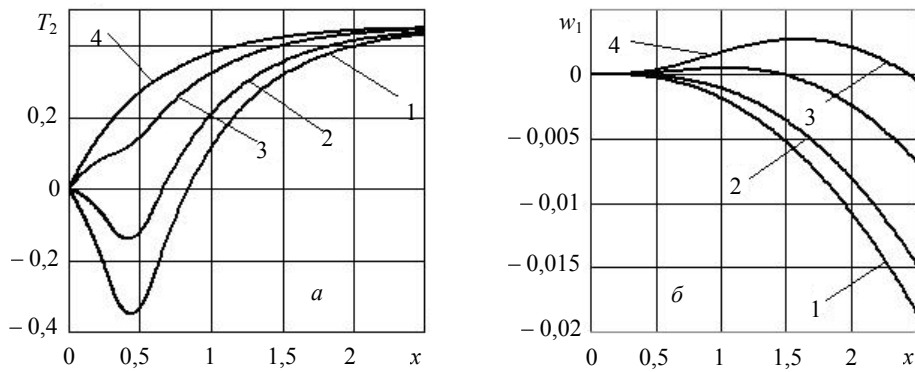


Рис. 2

Криві 1-4 на рис. 2 відповідають температурним моментам T_2 та прогинам пластинки w_1 , коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь якої набувають значень $\mu_1^+ = \mu_1^- = \mu_2^- = 0,1$, а $\mu_2^+ = 0,1; 0,5; 1,5; 2,5$. Із ростом коефіцієнта тепловіддачі μ_2^+ на смузі $0,3 \leq x \leq 0,6$ верхньої лицевій поверхні (рис. 2а), порівняно з однорідною пластинкою $\mu_2^+ = 0,1$ (крива 1), температурний момент зменшується, досягає мінімального значення на смузі й асимптотично прямує до заданого на нескінченності значення. Прогини пластинки $w_1 = 10^5 w$ (криві 1-4 на рис. 2б) спричинено наведеними на рис. 2а температурними моментами (криві 1-4). Зі збільшенням коефіцієнта тепловіддачі на смузі верхньої лицевій поверхні прогин пластинки зменшується, змінює знак, починаючи з зони смуги, оскільки на цій ділянці температура пластинки на нижній лицевій поверхні вища від температури на верхній лицевій поверхні.

5. Температурний момент і прогин за однакових коефіцієнтів тепловіддачі з лицевих поверхонь

Розглянемо випадок, коли коефіцієнти тепловіддачі з лицевих поверхонь $z = \pm h$ рівні між собою ($\mu^+ = \mu^-$) і дорівнюють μ_1^+ скрізь, окрім смуги $a \leq x \leq b$, на якій вони набувають значення μ_2^+ ($\mu_1^+ \neq \mu_2^+$). Тоді задача теплопровідності (1), (2) спрощується та розподіл інтегрального температурного моменту в пластинці виражається формулою

$$\theta_2(x) = (T_c^* - d_3 t_2) e^{-\kappa_3 x} + \frac{1}{2\kappa_3} \int_a^b Q_3(\xi) \left[e^{-\kappa_3 |x-\xi|} - e^{-\kappa_3(x+\xi)} \right] d\xi, \quad (20)$$

де

$$d_3 = \frac{2\mu_1^+}{1 + 2\mu_1^+}, \quad \kappa_3 = \sqrt{3(1 + 2\mu_1^+)}, \quad Q_3(x) = 6(\mu_2^+ - \mu_1^+) \left[\theta_2(x) - \frac{t_2}{1 + 2\mu_1^+} \right]. \quad (21)$$

Знайшовши з (21) вираз для $\theta_2(x)$, підставляємо його в ліву частину співвідношення (20) у підсумку чого для визначення функції $Q_3(x)$ отримаємо неоднорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$Q_3(x) = 6(\mu_2^+ - \mu_1^+) \left[t_2 (d_3 - d_3 e^{-\kappa_2 x} - 1) + T_c^* e^{-\kappa_2 x} \right] + \frac{3(\mu_1^+ - \mu_2^+)}{\kappa_2} \int_a^b Q_3(\xi) \left[e^{-\kappa_2 |x-\xi|} - e^{-\kappa_2(x+\xi)} \right] d\xi. \quad (22)$$

Інтегральне рівняння (22) розв'язуємо числово, використовуючи квадратурні формули Сімпсона [18]. Підставивши розв'язок інтегрального рівняння (22) у (20), після заміни

$$T_2 = \theta_2 + d_3 t_2 \quad (23)$$

знайдемо температурний момент, який спричиняє прогин пластинки

$$w(x) = \frac{A}{3(1+2\mu_1^+)} \left[-T_2(x) - 3\mu_1^+ t_2 x^2 + \int_0^x \int_0^\xi Q_3(s) H(s; a, b) ds d\xi + \frac{\partial T_2(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} x + T_c^* \right] \quad (24)$$

та згинний момент M_2 згідно подання (19).

Розрахунки згинного моменту M_2 та прогину w_1 за однакових коефіцієнтів тепловіддачі на лицевих поверхнях проведено на основі формул (23) і (24).

На рис. 3 і 4 наведено згинні моменти M_2 та прогини w_1 пластинки, у якій коефіцієнти тепловіддачі на поверхнях відповідно набувають значень $\mu_1^+ = 0,1$ і $\mu_1^+ = 5$.

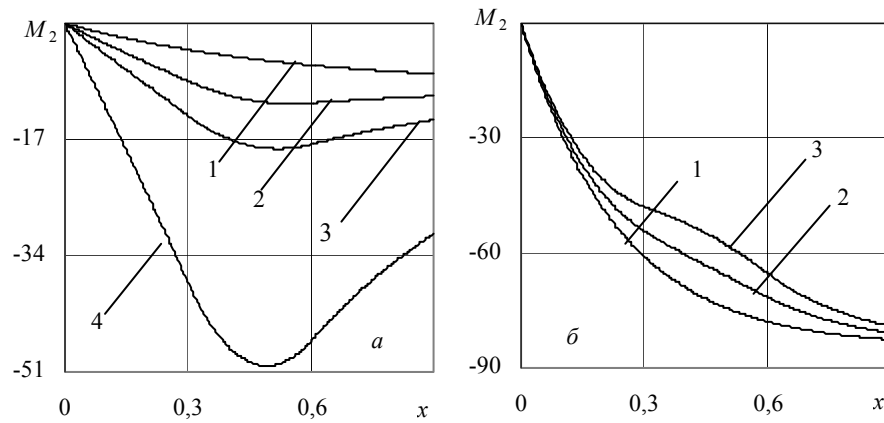


Рис. 3

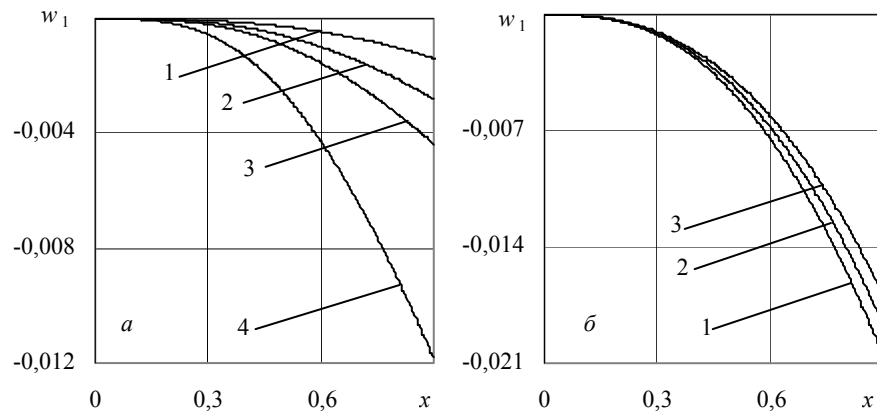


Рис. 4

Зі збільшенням коефіцієнта тепловіддачі $\mu_2^+ = 0,5; 1; 5$ (криві 2-4 на рис. 3а) на смузі $0,3 \leq x \leq 0,6$ пластинки порівняно з однорідною пластинкою $\mu_2^+ = 0,1$ (крива 1), величина згинного моменту M_2 зростає та досягає максимуму на смузі. За наведених на рис. 3а значень згинного моменту M_2 прогин w_1 пластинки (рис. 4а), порівняно з однорідною пластинкою (крива 1), зростає. Зі зменшенням коефіцієнта тепловіддачі $\mu_2^+ = 2; 0,01$ на смузі $0,3 \leq x \leq 0,6$ (криві 2 та 3 на рис. 3б), порівняно з пластинкою з однаковими коефіцієнтами тепловіддачі $\mu_2^+ = 5$ (крива 1), згинний момент на смузі зменшується, а зі зростанням аргументу — зростає до заданого значення. Зменшення величини згинного моменту M_2 (рис. 3б) на цій смузі призводить до зменшення прогину (криві 2, 3 на рис. 4б), порівняно з пластинкою з однаковими коефіцієнтами тепловіддачі (крива 1).

Висновки. Досліджено прогин півбезмежної пластинки, зумовлений різницею температур зовнішнього середовища на лицевих поверхнях, а також різними коефіцієнтами тепловіддачі на кожній із смуг цих поверхонь. Розв'язування частково виродженої системи рівнянь теплопровідності зведено до знаходження розв'язку системи взаємозв'язаних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Розроблено аналітико-числову схему розв'язування системи цих інтегральних рівнянь. Наведені графіки ілюструють, що нерівномірність тепловіддачі з лицевих поверхонь тонких пластинок суттєво впливає на розподіл у них температурних і згинних моментів, а також прогинів.

Література

- [1] Подстригач, Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. — Москва: Наука, 1984. — 368 с.
- [2] Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно, В. И. Громовык, В. Л. Лозбень. — Киев: Наук. думка, 1977. — 158 с.
- [3] Коляно, Ю. М. Температурное напряжение от объемных источников / Ю. М. Коляно, А. Н. Кулик. — Киев: Наук. думка, 1983. — 288 с.
- [4] Підстригач, Я. С. Температурне поле в тонких пластинках при змінному коефіцієнті тепловіддачі з бокових поверхонь / Я. С. Підстригач, Ю. М. Коляно // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1971. — № 1. — С. 75-78.
- [5] Грицько, Е. Г. Температурные поля и напряжения в ортотропной полубесконечной пластинке при кусочно-постоянном коэффициенте теплоотдачи с торцевой поверхности / Е. Г. Грицько // Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. — Киев: Наук. думка, 1978. — С. 173-178.
- [6] Видин Ю. В. О температурном поле неограниченной пластины при переменном коэффициенте теплообмена / Ю. В. Видин // Изв. вузов. Авиационная техника. — 1967. — № 7. — С. 65-69.
- [7] Коляно, Ю. М. Нагрев движущимся источником тепла полубесконечной пластинки с переменным коэффициентом теплоотдачи / Ю. М. Коляно, В. Л. Лозбень // Прикл. механика. — 1974. — Т. 10, № 3. — С. 42-47.
- [8] Сідляр, М. М. Визначення нестационарного температурного поля в двошаровій пластинці у випадку змінного в часі коефіцієнта тепловіддачі / М. М. Сідляр // Прикл. механіка. — 1963. — Т. 9, № 3. — С. 309-314.

- [9] Литвинова, А. Ф. Температурные напряжения в ортотропной полубесконечной пластинке, обусловленные локальным нагревом / А. Ф. Литвинова // Обобщенные функции в термоупругости. — Киев: Наук. думка, 1980. — С. 106-112.
- [10] Дидык, В. З. Двумерная задача термоупругости пластин с кусочно-постоянными коэффициентами теплоотдачи / В. З. Дидык // Математические методы в термомеханике. — Киев: Наук. думка, 1978. — С. 144-152.
- [11] Коляно, Ю. М. Температурные напряжения в пластинках с зависящими от координаты коэффициентами теплоотдачи / Ю. М. Коляно, В. З. Дидык, Б. М. Кордуба // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1976. — № 6. — С. 517-521.
- [12] Коляно, Ю. М. Метод интегральных характеристик в термоупругости пластин с кусочно-постоянными коэффициентами теплоотдачи / Ю. М. Коляно, В. З. Дидык // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1977. — № 11. — С. 1015-1018.
- [13] Кулик, А. Н. Температурные напряжения в пластинке, обусловленные нагревом по кольцевой области путем конвективного теплообмена / А. Н. Кулик, Т. А. Рутт // Математические методы в термомеханике. — Киев: Наук. думка, 1978. — С. 36-41.
- [14] Material design for reduction of thermal stress in a functionally graded material rotating disk / Y. Sugano, R. Chiba, K. Hirose, K. Takahashi // JSME Int. Journal. Ser. A. — 2004. — Vol. 47, No 2. — P. 189-197.
- [15] Sugano, Y. Transient thermal stresses in a rectangular plate due to variation of heat-transfer coefficients on upper and lower surfaces / Y. Sugano // Int. J. Engng Sci. — 1983. — Vol. 21, No 10. — P. 1203-1214.
- [16] Подстригач, Я. С. Термоупругость тонких оболочек / Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец. — Киев: Наук. думка, 1978. — 344 с.
- [17] Коляно, Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — Киев: Наук. думка, 1992. — 280 с.
- [18] Верлань, А. Ф. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — Киев: Наук. думка, 1978. — 292 с.

Temperature field and deflection of a semi-infinite plate with coordinate-dependent heat exchange coefficients

Bohdan Khapko, Anatoly Chyzh

The problem of bending of a semi-infinite plate, caused by temperature differences between the top and bottom surfaces of the plate with coordinate-dependent heat exchange coefficients, was solved. The Heaviside generalized function was used and the problem on determining temperature distribution in the plate was reduced to the coupled system of Fredholm integral equations of the second kind. Using Simpson's quadrature formulas a numerical scheme for solving integral equations and finding temperature characteristics was constructed. Numerical analysis for distribution of plate deflection and temperature moments was performed. The case of coordinate-dependent heat exchange coefficients that are equal on the top and bottom surfaces of the plate was studied and distribution of bending moments and plate deflection were analyzed.

Температурное поле и прогиб полубесконечной пластины при зависимых от координаты коэффициентах теплоотдачи

Богдан Хапко, Анатолий Чиж

Рассмотрено задачу об изгибе полубесконечной пластины, обусловленной разницей температур внешней среды на её лицевых поверхностях и зависимыми от координаты коэффи-

циентами теплоотдачи. Определение температурного поля с использованием функции Хэвисайда сведено к решению взаимосвязанной системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Для нахождения температурных характеристик с использованием квадратурных формул Симпсона построена численная схема решения интегральных уравнений. Проведен численный анализ распределения прогибов и температурных моментов. Проанализировано распределение изгибных моментов и прогибов пластины, коэффициенты теплоотдачи которой на обеих поверхностях одинаковые и зависят от координаты.

Отримано 13.05.08