

Б.І.Гайвась, Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України

КЛЮЧОВА СИСТЕМА РІВНЯНЬ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ СУШІННЯ ПОРИСТИХ ТІЛ. Частина 2

A mathematical model is constructed for drying processes of porous bodies with allowance for inter phase and chemical transformations of their components. The porous body is modelling in the three-phase multicomponent thermodynamical system. The usage of effective thermal, mechanical and diffusive characteristics with combination of experimental data allows to investigate the drying processes.

Побудовано математичну модель процесу сушіння вологих пористих тіл з врахуванням фазових та хімічних перетворень компонентів. Пористе тіло моделюється трифазною багатокомпонентною термодинамічною системою. Введення ефективних механотермо-дифузійних характеристик в поєднанні з експериментальними даними дає змогу досліджувати процеси сушіння.

Ключові слова: пористість, ефективний тензор напружень, тензор деформацій, фазові та хімічні перетворення.

Вступ: В роботі [1] побудовані рівняння стану капілярно-пористого середовища, які використаємо для побудови ключової системи рівнянь процесу сушіння. У даній роботі побудована модель процесу сушіння, яка в рамках одноконтинуумних термодинамічних наближень враховує дані про характеристики окремих фаз та компонент системи.

Трифазне середовище повинно задовольняти рівнянню, яке пов'язує пористість, насиченість рідиною та парою і вимірювані в експерименті ефективні характеристики пористого тіла в процесі деформації. Підсумуємо закон Гука за внутрішніми індексами і врахуємо, що перший інваріант тензора напружень дорівнює тиску, взятому з протилежним знаком. При цьому з закону Гука для фіктивних напружень знайдемо

$$P_0 = P_n + \frac{P_f}{\alpha_0}, \quad P_0 = -\frac{1}{3} \sigma_0^{kk}, \quad P_f = -\frac{1}{3} \sigma_f^{kk},$$

$$(1 - \alpha_0 v_f^{(\sigma)}) P_n - P_0 = \left(\lambda_f^{(\sigma)} + \frac{2}{3} \mu_f^{(\sigma)} \right) \varepsilon_0^{kk} - \alpha_t^{(0)*} t - \sum_k^{K_0} a_{(c)k}^{(0)*} c_k^{(0)}. \quad (1)$$

Усереднений по об'єму тіла тиск неперервної фази $P_n = \Pi[\alpha P^{(1)} + (1 - \alpha) P^{(2)}]$, а скелету $P_0 = \alpha_0 P^{(0)} = (1 - \Pi) P^{(0)}$, коефіцієнти температурного та концентраційного розширення є функціями температури і насиченості вологою α та визначаються з експериментальних даних. $P^{(i)}$ -

істинні тиски рідини та пари. Співвідношення (1) дає зв'язок між пористістю, насиченістю вологою та усередненими ефективними характеристиками пористого матеріалу. Диференціюючи дане рівняння по часу з використанням балансових співвідношень, отримуємо рівняння сумісності трифазної багатокомпонентної системи в процесі деформування.

Закони збереження сформулюємо для виділеної довільної області афінного простору X і запишемо з використанням конфігураційних і кінематичних характеристик континууму центрів мас K .

Балансові рівняння. Рівняння балансу маси компонент системи має вигляд [2-4]

$$\frac{d\rho_k^{(j)}}{d\tau} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_k^{(j)} - \rho_k^j \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_k^{(j)} + I_k^{(j)} \quad (2)$$

де $\vec{J}_k^{(j)} = \rho_k^{(j)}(\vec{v}_k^{(j)} - \vec{v}^{(j)})$ - дифузійний потік компоненти k відносно точок континууму центрів мас $K^{(j)}$, $\vec{v}^{(j)} = \sum_k C_k^{(j)} \mathbf{v}_k^{(j)}$ - швидкість точок цього

континууму, $d/d\tau = \partial/\partial\tau + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ - повна похідна за часом, $C_k^{(j)} = \frac{\rho_k^{(j)}}{\rho}$, $\vec{\nabla}$ -

оператор Гамільтона, $I_k^{(j)}$ - потужність виробництва маси компоненти k j -ої фази у зв'язку з внутріфазовими перетвореннями (хімічними реакціями), а також обміном маси між фазами в процесі випаровування та деформації. Верхній індекс $j = 0, 1, 2$ відзначає номер фази, причому індексом 0 позначені компоненти скелету, 1 - рідини, 2 - пароповітряної суміші, відповідно. Рівняння балансу маси компонент (2) можна подати у вигляді закону збереження повної маси і рівняння балансу концентрацій [2-3]

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad \left(\sum_j \sum_k I_k^{(j)} = 0 \right), \quad \rho \frac{dC_k^{(j)}}{d\tau} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_k^{(j)} + I_k^{(j)}. \quad (3)$$

В трифазній системі число міжфазних переходів дорівнює 3! Якщо між компонентами відбуваються хімічні реакції, то густини джерел компонентів не перетворюються в нуль. Закони збереження маси при хімічних перетвореннях, що описуються R реакціями мають вигляд $\sum_{l=1}^K \nu_{kj}^l M_k = 0$ ($j = 1, 2, \dots, R$), де

M_k - молярні маси, ν_{kj}^l - стехіометричні коефіцієнти, які використовуються в хімії. Густина джерел $I_k^{(j)}$ виражаються через швидкості $J_l^{(j)}$ l -ої реакції

так: $I_k^{(j)} = \sum_{l=1}^R \nu_{kl}^{(j)} J_l^{(j)}$. Питання про незалежність реакцій розв'язується

дослідженням рангу матриці стехіометричних коефіцієнтів [4, 9,10].

Рівняння балансу імпульсу формулюється для макроелемента в цілому

$$\rho \frac{d\bar{v}}{d\tau} = \bar{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \sum_j \sum_k \rho_k^{(j)} \bar{f}_k^{(j)}, \quad (4)$$

де $\bar{f}_k^{(j)}$ - віднесена до компоненти k j -ої фази питома зовнішня потенціальна ($\bar{f}_k^{(j)} = -\bar{\nabla} \psi_k^{(j)}$) і консервативна ($\partial \psi_k^{(j)} / \partial \tau = 0$) сила, $\psi_k^{(j)}$ - потенціальна енергія одиниці маси компоненти k . При цьому рівняння балансу імпульсу для окремих фаз є

$$\rho^{(j)} \frac{d\bar{v}^{(j)}}{d\tau} = \bar{\nabla} \cdot \hat{\sigma}^{(j)} + \bar{\pi}^{(j)} + \rho^{(j)} \bar{b}^{(j)}. \quad (5)$$

Тут $\hat{\sigma}^{(j)}$ - тензор напружень Коші, обумовлений взаємодією між фазами; $\bar{b}^{(j)}$ - масові сили (пропорційні до об'єму вибраної області), віднесені до j -ої фази; $\bar{\pi}^{(j)}$ - сили іншої природи, які не зводяться до сил тиску $\bar{\nabla} \cdot \hat{\sigma}^{(j)}$ чи масових сил $\bar{b}^{(j)}$.

Зазначимо, що експериментально, як правило, визначаються сумарні сили, тобто $\sum_j (\bar{\nabla} \cdot \hat{\sigma}^{(j)} + \bar{\pi}^{(j)})$. При цьому вважається, що сили $\bar{\pi}^{(j)}$ визначають сили опору, які діють на фази з боку інших фаз системи, ефекти приєднаної маси, тощо.

Означимо, потенціальну енергію ψ і кінетичну енергію e_k виразами

$$\rho \psi = \sum_j \sum_k \rho_k^{(j)} \psi_k^{(j)}, \quad \rho e_k = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \rho_k^{(j)} \bar{v}_k^{(j)2}. \quad (6)$$

Повну енергію системи означимо виразом $e = \rho \left(u + \psi + \frac{v^2}{2} \right)$, де ρu - внутрішня, $\rho \psi$ - потенціальна і $\rho v^2/2$ - кінетична енергії центру мас системи (фізично малого макроелемента $\delta K^* \in K^*$).

Закон збереження енергії має вигляд

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{J}_e \quad (7)$$

де потік повної енергії подається з фізичних міркувань

$$\bar{J}_e = \rho \left(u + \psi + \frac{v^2}{2} \right) \bar{v} + \bar{J}_Q - \hat{\sigma} \cdot \bar{v} + \sum_j \sum_k \mu_k^{(j)} \bar{J}_k^{(j)} + \sum_j \sum_k \psi_k^{(j)} \bar{J}_k^{(j)}. \quad (8)$$

Якщо скористатись рівнянням балансу імпульсу (4) для макроелемента в цілому, то рівняння балансу кінетичної енергії буде [11]

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{v}^2}{2} \right) = \bar{\nabla} \cdot (\bar{v} \cdot \hat{\sigma}) - \hat{\sigma} : \bar{\nabla} \otimes \bar{v} + \sum_j \sum_k \bar{v} \cdot \left(\rho_k^{(j)} \bar{f}_k^{n(j)} \right). \quad (9)$$

Тензор напружень $\hat{\sigma}$ дорівнює тензору тиску, взятому з протилежним знаком $\hat{\sigma} = -\hat{P}$. Для однорідних ізотропних в'язких систем повний механічний тензор тиску має вигляд $\hat{P} = p\delta + \hat{P}^\nu$, де p - гідростатичний тиск, \hat{P}^ν ($Grad \bar{v}$) –тензор в'язкого тиску. Якщо розкласти \hat{P}^ν на симетричну P^{0s} і антисиметричну частини $P^{\nu\alpha}$, то $\hat{P}^\nu = p^\nu \hat{\delta} + P^{0s} + P^{\nu\alpha}$.

Наслідком рівняння балансу маси окремих компонент (2) і закону збереження повної маси (3) є рівняння балансу потенціальної енергії

$$\rho \frac{d\Psi}{dt} = -\bar{\nabla} \cdot \left(\sum_j \sum_k \Psi_k^{(j)} \bar{J}_k^{(j)} \right) + \sum_j \sum_k \bar{J}_k^{(j)} \cdot \bar{f}_k^{r(j)} + \sum_j \sum_k \Psi_k^{(j)} I_k^{(j)}, \quad (10)$$

де, як раніше, використано позначення $\bar{f}_k^{r(j)} = \bar{f}_k^{n(j)} - f_n^{n(j)}$,

$$\Psi_k^{r(j)} = \Psi_k^{n(j)} - \Psi_n^{n(j)} \quad k = \overline{1, K_j - 1}, \text{ де } n - \text{ номер базової компоненти.}$$

Тоді з рівняння збереження повної енергії (7-8) і балансових рівнянь для кінетичної (9) та потенціальної (10) енергій, відповідно до означення повної енергії, для внутрішньої енергії знайдемо

$$\rho \frac{du}{dt} = -\bar{\nabla} \cdot \left(\bar{J}_Q + \sum_j \sum_k \mu_k^{(j)} \bar{J}_k^{(j)} \right) + \hat{\sigma} : \bar{\nabla} \otimes \bar{v} + \sum_j \sum_k \bar{J}_k^{(j)} \cdot \bar{f}_k^{r(j)} + \sum_j \sum_k \Psi_k^{(j)} I_k^{(j)}, \quad (11)$$

$$k = \overline{1, K_j - 1}.$$

З рівняння балансу внутрішньої енергії (11) шляхом відповідних граничних переходів [4, 5] до квазістатичних процесів отримуємо рівняння Гіббса і таке рівняння балансу ентропії

$$\rho \frac{ds}{dt} + \bar{\nabla} \cdot \frac{J_q}{T} - \frac{1}{T} \sum_{j=0}^2 \sum_{k=1}^{K_j} \mu_k^{(j)} \nabla \cdot \bar{J}_k^{(j)} = \frac{1}{T} \left\{ \sum_{j=0}^2 \sum_{i=1}^R \sum_{k=1}^{K_j} \mu_k^{(j)} \nu_{ki}^{(j)} J_i - J_Q \cdot \left(\frac{\bar{\nabla} T}{T} \right) + \sum_{j=0}^2 \sum_{k=1}^{K_j} \bar{J}_k^{(j)} \left[F_k^{(j)} - T \bar{\nabla} \left(\frac{\mu_k^{(j)}}{T} \right) \right] - p^\nu \bar{\nabla} \bar{v} - P^{0vs} \left(\bar{\nabla} \bar{v} \right)^s - P^{\nu\alpha} (\bar{\nabla} \times \bar{v} - 2\bar{\omega}) \right\}.$$

Третій член цієї рівності представляє потік ентропії, викликаний між фазними силами. В праці [9] показано, що взаємодія між скелетом, рідиною і газом в пористому матеріалі являє собою не тільки дифузійні сили, викликані обміном мас в середовищі, зв'язані з гідравлічним опором проникненню компонент через пори і залежні від відносної швидкості компонент, а також сили, викликані неоднорідністю об'ємної пористості і густини компонент, які

є наслідком локальних змін густини компонент неперервної фази. Інтенсивність змін маси пропорційна швидкості змін ділатації скелету. Член

$$p^{\nu} \bar{\nabla} \bar{v} \text{ обумовлює явища, пов'язані з об'ємною в'язкістю, } P^{0 \nu s} \left(\bar{\nabla} \bar{v} \right)^s$$

викликає явища в'язкого зсуву, $P^{\nu \alpha} (\bar{\nabla} \times \bar{v} - 2\bar{\omega})$ - незворотні процеси в системі, де не виконується закон збереження моменту кількості руху.

$$\text{Густина потоку ентропії при цьому дорівнює } \bar{J}_s = \frac{\bar{J}_Q - \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 A_{kl}^{(ji)} \bar{J}_{kl}^{(ji)}}{T},$$

$\bar{J}_k^{(j)} = -\bar{J}_k^{(j)}$, що впливає з рівняння балансу маси, а виробництво ентропії

$$T\sigma_s = \bar{J}_Q \cdot \bar{X}_Q + \sum_j \sum_k \bar{J}_k^{(j)} \cdot \bar{X}_k^{(j)} + p^{\nu} X^{\nu} + P^{\nu s} \hat{X}_v^s - P^{\nu \alpha} \bar{X}_v^{\alpha} + \sum_{i=1}^R A_i J_i. \quad (12)$$

Якщо реакції не відбуваються, то $J_i = 0$. Тут

$$\bar{X}_Q = -\frac{\bar{\nabla} T}{T}, \bar{X}_k^{(j)} = \bar{f}_k^{(j)} - \bar{\nabla} \mu_k^{(j)} - \frac{d_{kj} (v_k^{(j)} - v^{(j)})}{dt}, k = \bar{1}, K-1, \quad (13)$$

- термодинамічні сили, спряжені до потоку тепла \bar{J}_Q і масових потоків \bar{J}_k ;

$$A_{kl}^{(ji)} = \sum_{i=1}^{K_i} \sum_{k=1}^{K_j} (\mu_k^{(j)} - \mu_l^{(i)}), A_i = -\sum_{j=0}^2 \sum_{k=1}^{K_j} \mu_k^{(j)} v_{ki}^{(j)} \quad (14)$$

$A_{kl}^{(ji)}$ - рушійна сила міжфазових переходів, A_i - хімічна спорідненість. У випадку однокомпонентних твердої та рідкої фаз $J_1^{(0i)} = J_1^{(20)} = J_2^{20} = 0$, $J_1^{(12)} = -J_1^{(21)}$ - потік, який відповідає за між фазовий перехід рідина-пара. $J_s = [J_Q - (\mu_1^{(1)} - \mu_1^{(2)}) \bar{J}^{12}] / T$, $A_i = 0$. Слід відмітити, що у випадку хімічно активної системи велике значення відіграє варіантність [10, 11], яка вказує на число незалежних змінних інтенсивних властивостей і дозволяє досліджувати системи за неповними даними.

У випадку відсутності реакцій, якщо у вирази (13), (14) для термодинамічних сил $\bar{X}_k^{(j)}$, $A_k^{(j)}$ підставити відповідні формули

$$\begin{aligned} \mu_k^{(j)} &= \mu_k^{(j)0} + a_{(t)k}^{(j)} t - \frac{K}{\rho} a_{(c)k}^{(j)} \varepsilon + \sum_i \sum_l a_{kl}^{ij} c_l^{(i)} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial G}{\partial C_k^{(j)}} \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial (K - 2G/3)}{\partial C_k^{(j)}} \varepsilon^2 - \frac{\partial (K\alpha_t)}{\partial C_k^{(j)}} \varepsilon t - \frac{\partial (Ka_{(c)k})}{\partial C_k^{(j)}} \varepsilon c_k^{(j)} \right] - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{\gamma} r_{k\gamma} \frac{\partial c_{k\gamma}^{ij}}{\partial C_k^{(j)}} \end{aligned}$$

для хімічних потенціалів $\mu_k^{(j)}$, отримані в роботі [1], то прийдемо до виразів

$$\begin{aligned} \bar{X}_k^{(j)} &= \bar{f}_k^{(j)} - \hat{a}_{(r)k}^{(j)} \cdot \bar{\nabla} t - \hat{a}_{(c)k}^{(j)} : \bar{\nabla} \otimes \hat{\varepsilon}_0 - \\ &- \sum_i \sum_l d_{kl}^{ij} \bar{\nabla} c_l^i - t \bar{\nabla} \cdot \hat{a}_{(r)k}^{(j)} - \hat{\varepsilon}_0 : \bar{\nabla} \otimes \hat{a}_{(c)k}^{(j)} - \sum_i \sum_l c_l^i \bar{\nabla} d_{kl}^{ij} \end{aligned} \quad (15)$$

або для ізотропного середовища

$$\bar{X}_k^{(j)} = \bar{f}_k^{(j)} - a_{(0)k}^{(j)} \bar{\nabla} t - \frac{K}{\rho} a_{(c)k}^{(j)} \bar{\nabla} \varepsilon - \sum_i \sum_l d_{kl}^{ij} \bar{\nabla} c_l^i - t \bar{\nabla} a_{(r)k}^{(j)} - \varepsilon \bar{\nabla} a_{(c)k}^{(j)} - \sum_i \sum_l c_l^i \bar{\nabla} d_{kl}^{ij} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} i A_{kl}^{(ji)} &= \sum_i \sum_l \left(\mu_k^{0(j)} - \mu_l^{0(i)} \right) + \sum_r \sum_g \overline{d_{k1g}^{jir}} \cdot c_g^{(r)} + \overline{a_{(r)kl}^{(ji)}} t + \overline{a_{(c)kl}^{(ji)}} \varepsilon_1 + \\ &+ \left[\overline{a_{(\varepsilon_2)kl}^{(ji)}} \varepsilon_2 + \overline{a_{(\varepsilon_1^2)kl}^{(ji)}} \varepsilon_1^2 + \overline{a_{(\varepsilon_{(1)l})kl}^{(ji)}} \varepsilon_1 t + \overline{a_{(c_k \varepsilon_1)kl}^{(ji)}} \varepsilon_1 c_k^{(j)} \right] + L_{A_1 k l}^{(ji)}, \end{aligned}$$

де

$$\overline{a_{(r)k}^{(ji)}} = a_{(r)k}^{(j)} - a_{(r)l}^{(i)}, \quad \overline{a_{(c)k}^{(ji)}} = a_{(c)k}^{(j)} - a_{(c)l}^{(i)}, \quad t = \varepsilon_2, \varepsilon_1^2, \varepsilon_{(1)l}, c_k \varepsilon_1,$$

$$\overline{a_{(\varepsilon_2)kl}^{(ji)}} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial G}{\partial C_k^{(j)}} - \frac{\partial G}{\partial C_l^{(i)}} \right), \quad \overline{a_{(\varepsilon_1^2)kl}^{(ji)}} = \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial \left(K - \frac{2}{3} G \right)}{\partial C_k^{(j)}} - \frac{\partial \left(K - \frac{2}{3} G \right)}{\partial C_l^{(i)}} \right),$$

$$\overline{a_{(\varepsilon_1 t)kl}^{(ji)}} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial K \alpha_t}{\partial C_k^{(j)}} - \frac{\partial K \alpha_t}{\partial C_l^{(i)}} \right), \quad \overline{a_{(c_k \varepsilon_1)kl}^{(ji)}} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \left(K a_{(c)k}^{(j)} \right)}{\partial C_k^{(j)}} - \frac{\partial \left(K a_{(c)k}^{(i)} \right)}{\partial C_l^{(i)}} \right),$$

$$L_{A_1 k l}^{(ji)} = -\frac{1}{2\rho} \left(\sum_i \sum_\gamma r_{k\gamma}^{ji} \frac{\partial c_{k\gamma}^{ji}}{\partial C_k^{(j)}} - \sum_j \sum_\gamma r_{l\gamma}^{ij} \frac{\partial c_{l\gamma}^{ij}}{\partial C_l^{(i)}} \right).$$

Тут прийнято позначення роботи [1]. Дані коефіцієнти визначають залежності пружних властивостей скелету від концентрації вологи в тілі та взаємодії компонентів, а, значить, і від структурних характеристик матеріалу.

Якщо не враховувати прилипання неперервної фази до твердого скелету, та явище конденсації, то для гомогенних рідкої і газоподібної фаз

$$A^{(12)} = \bar{a}_{(r)l} - \frac{K}{\rho} \bar{a}_{(c)l} \varepsilon_1 + \sum_l \bar{d}_l c_l + a_{\varepsilon_2} \varepsilon_2 + a_{\varepsilon_1} \varepsilon_1^2 - a_{\varepsilon_1 t} \varepsilon_1 t - \sum_k a_{(c)k} \varepsilon_1 c_k + a_1. \quad (17)$$

Тут врахована умова рівноваги і використано такі позначення

$$\begin{aligned} \bar{a}_{(r)} &= a_{(r)}^{(1)} - a_{(r)}^{(2)}, \quad \bar{a}_{(c)} = a_{(c)}^{(1)} - a_{(c)}^{(2)}, \quad \bar{d}_l = d_l^{(1)} - d_l^{(2)}, \\ a_{\varepsilon_2} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial G}{\partial C^{(1)}} - \frac{\partial G}{\partial C^{(2)}} \right); \quad a_{\varepsilon_1} = \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial (K - 2G/3)}{\partial C^{(1)}} - \frac{\partial (K - 2G/3)}{\partial C^{(2)}} \right); \\ a_{\varepsilon_1 t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (K a_{(r)}^{(2)})}{\partial C^{(2)}} - \frac{\partial (K a_{(r)}^{(3)})}{\partial C^{(3)}} \right); \quad a_{c_k \varepsilon_1} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (K a_{(c)}^{(1)})}{\partial C^{(1)}} - \frac{\partial (K a_{(c)}^{(2)})}{\partial C^{(2)}} \right); \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(r_{12} \frac{\partial c_{12}}{\partial C^{(1)}} - r_{21} \frac{\partial c_{21}}{\partial C^{(2)}} \right). \quad (18)$$

Коли врахувати, що при даному виборі незалежних функцій

$$\vec{\nabla}(\ast) = \frac{\partial(\ast)}{\partial t} \vec{\nabla} t + \frac{\partial(\ast)}{\partial \varepsilon} \vec{\nabla} \varepsilon + \sum_i \sum_l \frac{\partial(\ast)}{\partial C_l^{(i)}} \vec{\nabla} C_l^{(i)}, \quad (19)$$

то для термодинамічних сил отримаємо

$$\vec{X}_k^{(j)} = \vec{f}'_k - \vec{a}_{(t)k} \vec{\nabla} t - \frac{K}{\rho} \vec{a}_{(c)k} \vec{\nabla} \varepsilon - \sum_i \sum_l \vec{a}_{kl}^{ji} \vec{\nabla} c_l^i, \quad (20)$$

де

$$\begin{aligned} \vec{a}_{kl}^{jj} &= a_{kl}^{jj} + t \frac{\partial a_{(t)k}^{(j)}}{\partial C_l^{(i)}} + \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{\partial (K a_{(c)k}^{(j)})}{\partial C_l^{(i)}} + c_l^{(i)} \frac{\partial a_{kl}^{(ji)}}{\partial C_l^{(i)}}, \\ \vec{a}_{(t)k}^{(j)} &= a_{(t)k}^{(j)} + t \frac{\partial a_{(t)k}^{(j)}}{\partial T} + \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{\partial (K a_{(c)k}^{(j)})}{\partial T} + \sum_i \sum_l c_l^i \frac{\partial a_{kl}^{(ji)}}{\partial T}, \\ \frac{K}{\rho} \vec{a}_{(c)k}^{(j)} &= \frac{K}{\rho} a_{(c)k}^{(j)} + t \frac{\partial a_{(t)k}^{(j)}}{\partial \varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{\partial (K a_{(c)k}^{(j)})}{\partial \varepsilon} + \sum_i \sum_l c_l^i \frac{\partial a_{kl}^{ji}}{\partial \varepsilon}. \end{aligned} \quad (21)$$

Зазначимо, що коли $k \neq l$, $j \neq i$ то $\partial a_{(t)k}^{(j)} / \partial C_l^{(i)} = 0$, $\partial (K a_{(c)k}^{(j)}) / \partial C_l^{(i)} = 0$.

Аналогічні співвідношення можуть бути отримані для анізотропного тіла, тобто

$$\vec{X}_k = \vec{f}'_k - \hat{a}_{(t)k} \cdot \vec{\nabla} t - \hat{a}_{(c)k} : \vec{\nabla} \otimes \hat{\varepsilon}_0 - \sum_l \vec{a}_{kl} \vec{\nabla} c_l. \quad (22)$$

Перейдемо до формулювання кінетичних рівнянь. Прийmemo, що потоки є функціями термодинамічних сил

$$\vec{J}_Q = \vec{J}_Q(\vec{X}_Q, \{\vec{X}_k\}_k, \{A_k\}), \quad \vec{J}_k^{(j)} = \vec{J}_k^{(j)}(\vec{X}_Q, \{\vec{X}_k^{(j)}\}_k, \{A_k^{(j)}\}), \quad I_k^{(j)} = I_k^{(j)}(\vec{X}_Q, \{\vec{X}_k^{(j)}\}_k, \{A_k^{(j)}\}). \quad (23)$$

При цьому виконується умова невід'ємності виробництва ентропії, тобто $\sigma_S \geq 0$, яка є наслідком другого закону термодинаміки [3-5].

Постулюємо, що залежності (23) є лінійними, а саме

$$\begin{aligned} \vec{J}_Q &= \hat{L}_{QQ} \cdot \vec{X}_Q + \sum_j \sum_k \hat{L}_{Qk}^{(j)} \cdot \vec{X}_k^{(j)} + \sum_k \vec{B}_{Qk}^{(j)} A_k^{(j)}, \\ \vec{J}_k^{(j)} &= \hat{L}_{kQ}^{(j)} \cdot \vec{X}_Q + \sum_i \sum_l \hat{L}_{kl}^{(ji)} \cdot \vec{X}_l^{(i)} + \sum_i \sum_l \vec{B}_{kl}^{(ji)} A_l^{(i)}, \\ I_k^{(j)} &= \vec{B}_{kQ}^{(j)} \cdot \vec{X}_Q + \sum_l \vec{B}_{kl}^{(ji)} \cdot \vec{X}_l^{(i)} + \sum_l \hat{L}_{(A)kl}^{(j)} A_l^{(i)}. \end{aligned} \quad (24)$$

для анізотропного тіла або з врахуванням принципу Кюрі [4]

$$\begin{aligned} \vec{J}_Q &= L_{QQ} \vec{X}_Q + \sum_j \sum_k L_{Qk} \vec{X}_k^{(j)}, \\ \vec{J}_k^{(j)} &= L_{kQ}^{(j)} \vec{X}_Q + \sum_i \sum_l L_{kl}^{(ji)} \vec{X}_l^{(i)}, \quad I_k^{(j)} = \sum_i \sum_l L_{kl}^{(ji)} A_l^{(i)}. \end{aligned} \quad (25)$$

для ізотропного середовища.

Якщо скористатись виразами для термодинамічних сил і відповідними рівняннями стану, то кінетичні співвідношення для ізотропного тіла запишемо у формі

$$\begin{aligned} \vec{J}_Q &= -k\vec{\nabla}t + \sum_j \sum_k q_k^{(j)} \vec{J}_k^{(j)}, \\ \vec{J}_k^{(j)} &= -\sum_i \sum_l L_{kl}^{(ij)} \vec{\nabla} \psi_l^{(j)} - \rho_0 D_{(t)k}^{(j)} \vec{\nabla}t + \rho_0 D_{(\varepsilon)k} \vec{\nabla}\varepsilon - \rho_0 \sum_r \sum_g D_{kg}^{(jr)} \vec{\nabla} c_g^{(r)}, \\ I_k^{(j)} &= \left[\tilde{D}_{(t)k}^{(j)} t + \tilde{D}_{(\varepsilon_1)k}^{(j)} \varepsilon_1 + \tilde{D}_{(\varepsilon_2)k}^{(j)} \varepsilon_2 + \tilde{D}_{(\varepsilon_1^2)k} \varepsilon_1^2 + \sum_i \sum_l \tilde{D}_{(c_l^i)\varepsilon_1 k}^{(j)} \varepsilon_1 c_l^{(i)} + \tilde{D}_{(\varepsilon_1 t)k}^{(j)} \varepsilon_1 t \right] + \\ &+ \sum_i \sum_l D_{kl}^{(ji)} c_l^{(i)} + \tilde{D}_k^{(j)} A_1. \end{aligned} \quad (26)$$

Тут використано позначення:

$$D_{(t)k}^{(j)} = \left(L_{kQ}^{(j)} / T + \sum_i \sum_l L_{kl}^{(ij)} \tilde{a}_{(t)l}^{(i)} \right) / \rho_0 - \text{коефіцієнт впливу температурного}$$

поля на дифузійні потоки;

$$D_{kg}^{jr} = \sum_i \sum_l L_{kr}^{ij} \tilde{a}_{lg}^{ir} - \text{коефіцієнт дифузії;}$$

$$D_{(\varepsilon)k}^{(j)} = K \sum_i \sum_l L_{kl}^{ij} \tilde{a}_{(c)l}^i / \rho_0 - \text{коефіцієнт впливу градієнта поля об'ємної}$$

деформації на масові потоки;

$$k = \frac{1}{T} \left(L_{QQ} - \sum_j \sum_k q_k^{(j)} L_{kQ}^{(j)} \right) - \text{коефіцієнт теплопровідності;}$$

$$q_k^{(j)} - \text{множники, що визначаються з співвідношень } L_{Ql}^{(j)} = \sum_j \sum_k L_{kl}^{jj} q_k^{(j)}, \text{ і}$$

їх трактують як теплоту, яка переноситься при дифузії окремих компонент [4-5];

$$D_{kg}^{(jr)} = \sum_i \sum_l L_{kl}^{(ij)} a_{lg}^{ir}, \quad D_{(z)k}^{(j)} = \sum_i \sum_l L_{kl}^{(ij)} a_{(z)l}^i - \text{коефіцієнти, які визначають}$$

вплив локальних змін температури, деформації і концентрацій на процеси фазових перетворень.

Якщо тепер підставити записані формули (26) для термодинамічних потоків у балансіві рівняння моделі, в якій тверда, рідка фази припускаються однокомпонентними, а газова фаза - двокомпонентною, то отримаємо ключову систему рівнянь для визначення концентрацій, переміщень та температури трьохфазного середовища (при цьому індекси компонент пропустимо, а індекси фаз опустимо вниз і не врахуємо ефекту зацімлення повітря), яка може служити моделлю сушіння пористого середовища

$$\rho \frac{dc_k}{d\tau} = \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_l D_{kl} \vec{\nabla} c_l + D_{(t)k} \vec{\nabla} t - D_{(\varepsilon)k} \vec{\nabla} \varepsilon \right) + \sum_l L_{kl} \vec{\nabla} \psi'_l + \delta_k J_k,$$

$$\rho \frac{d^2 \vec{u}}{d\tau^2} = \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} - \rho \sum_l C_l \vec{\nabla} \psi''_l,$$

$$\rho \frac{d}{d\tau} \left\{ \left(\frac{C_v}{T} - \frac{\partial(K\alpha_l)}{\partial T} \right) t - \sum_k a_{(t)k} c_k - \frac{\alpha K}{\rho} \varepsilon_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial G}{\partial T} \varepsilon_2 + \frac{\partial(K-2G/3)}{\partial T} \varepsilon_1^2 - \sum_k \frac{\partial(Ka_{(c)k})}{\partial T} c_k \varepsilon_1 \right] \right\} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{-k \vec{\nabla} t + \sum q_k \vec{J}_k}{T} \right).$$

Тут $\delta_0 = 0, \delta_1 = -\delta_2 = 1, \delta_3 = 0$, $\rho = (g/g_0)^{1/2} \rho_0$, $a_{(t)k}$ - коефіцієнти температурної залежності хімічних потенціалів, $a_{(c)k}$ - концентраційна зміна напружень, a_l - ефективний коефіцієнт температурної залежності компонент тензора напружень. Знехтуємо геометричною і фізичною нелінійністю та термопружним та термодифузійним розсіянням енергії, вважаємо, що відсутні джерела зовнішніх масових сил. Прийдемо до системи рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [C_{ef} \rho_0 T + r_0 \Pi (1 - \alpha) \rho_v^0] = \vec{\nabla} \cdot \left[k \vec{\nabla} T - r_0 \vec{J}_v - \sum_{i=L,v,a} C_{pi} \vec{J}_i \right], \text{ де індексом } 0$$

позначено скелет, L - рідку фазу, v - пару, a - повітря. В дальнішому g - індекс газової фази. Врахуємо, що газова фаза - (повітря + пара) гомогенна.

Просумуємо рівняння масопереносу для рідкої і парової фаз з врахуванням об'ємного вмісту фаз. Отримаємо

$$\Pi \frac{\partial}{\partial \tau} [(\rho_L^0 - \rho_v^0) \alpha + \rho_v^0] + \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}_L + \vec{J}_v) = 0. \quad \text{Тут} \quad \alpha = \frac{V_L}{V_L + V_g}. \quad \text{Рівняння}$$

масопереносу для повітря має вигляд $\Pi \frac{\partial}{\partial \tau} [(1 - \alpha) \rho_a^0] + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_a = 0$. Вважаємо газ

ідеальним: $P = \left(\frac{\rho_v^0}{M_v} + \frac{\rho_a^0}{M_a} \right) RT$, де M_a, M_v - молекулярні маси, R, T - газова

стала і абсолютна температура. В виразах для потоку рідини врахуємо дифузійну, фільтраційну та термодифузійну складові, для газових потоків

дифузійну та фільтраційну складові: $\vec{J}_L = -D_L \left(\Pi \rho_L^0 \vec{\nabla} \alpha + \rho_0 \tilde{\delta} \vec{\nabla} T \right) - KK_L \frac{\rho_L^0}{\mu_L} \vec{\nabla} P$;

$$\vec{J}_v = -KK_g \frac{\rho_v^0}{\mu_{ef}} \vec{\nabla} P_g - (1 - \alpha) \Pi D_{ef} \rho_g^0 \vec{\nabla} \frac{\rho_v^0}{\rho_g^0}; \quad \vec{J}_a = -KK_g \frac{\rho_a^0}{\mu_{ef}} \vec{\nabla} P_g + (1 - \alpha) \Pi D_{ef} \rho_g^0 \vec{\nabla} \frac{\rho_v^0}{\rho_g^0}.$$

Таким чином приходимо до системи рівнянь для визначення температури, відносної вологості та густини повітря в процесі сушіння.

Коефіцієнти моделі для довільних пористих тіл визначаються, як правило, експериментально. При цьому ефективні коефіцієнти відносної проникливості, дифузії, теплопровідності є функціями відносної насиченості вологою [6-8]. Ефективні коефіцієнти теплопровідності ϵ , крім цього, функціями температури.

Висновки. Отримана система взаємозв'язаних нелінійних диференціальних рівнянь, яка разом з рівняннями стану, описує процес сушіння шару деформівного дисперсного середовища, що представляє собою капілярнопористий або щільної упаковки зернистий матеріал. При формулюванні моделі використано термодинамічні співвідношення теорії сумішів.

1. *Гайвась Б.І.* Про опис локального стану капілярно-пористих та щільно упакованих зернистих матеріалів в процесі сушіння. Частина 1. // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАН України. Вип 57. – К.: 2010. – С.95-105.
2. *Низматуллин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. – М: Наука, 1978. – 336 с.
3. *Пригожин И.* Введение в термодинамику необратимых процессов. – М: Изд-во иностр. лит., 1960. – 127 с.
4. *Дьярмати И* Неравновесная термодинамика. –М: Мир, 1974. -304 с.
5. *Бурак Я.Й., Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів. – Київ: Наук.думка, 2006. – 272 с.
6. *Оснач Н.А.* Проницаемость и проводимость древесины. –М: Наука, 1964. – 181 с.
7. *Харук Е.В.* Проницаемость древесины газами и жидкостями. АН СССР. - Новосибирск: Наука, 1976. – 187 с.
8. *S Ben Nasrallah and P Perre/* Detailed study of a model of heat and mass transfer during convective drying of porous media. Int. J.Heat Mass Transfer. – 1988. vol.31.- № 5. -P. 957-967.
9. *Гайвась Б.І., Гайвась І.В.* Математичне моделювання сил фазової взаємодії в вологому пористому середовищі з врахуванням фазових переходів. Вісник Держуніверситету <<Львівська політехніка>>. Прикладна математика, -№364, - 1999. – С.148-155.
10. *Первухин О.К., Жаров В.Т.* Термодинамическое исследование фазового равновесия жидкость-пар в системах с химическими реакциями. //Вопросы термодинамики гетерогенных систем и теории поверхностных явлений. -1979. –в.5. – С. 3-29.
11. *Мариничев А.Н., Жаров В.Т., Сторонкин А.В.* О применении правила фаз к гетерогенным системам различного типа.// Вопросы термодинамики гетерогенных систем и теории поверхностных явлений. -1973. –в.2. – С. 3-20.

Поступила 25.10.2010р.