

Комп'ютерне моделювання локально нелінійних задач на основі методу декомпозиції області

Іван Дияк¹, Ігор Макар²

¹ к. ф.-м. н., Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail: dyyak@lnu.edu.ua

² Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail: i_makar@lnu.edu.ua

(Представлено професором Я. Савулюю)

Розглянуто гетерогенну математичну модель теорії пластичності та теорії пружності. Запропоновано чисельний спосіб розв'язування локально нелінійних задач методом декомпозиції області. Для моделювання нелінійної поведінки матеріалу використано співвідношення теорії пластичного течіння Губера-Мізеса, які дискретизовано методом скінченних елементів. Наближений розв'язок нелінійної задачі знайдено методом Ньютона-Рафсона. У підобластях, в яких напружено-деформований стан описується лінійною теорією пружності, застосовано симетричний варіант прямого методу граничних елементів. Поєднання двох методів здійснено за допомогою ітераційних схем методу декомпозиції області. У роботі наведено результати чисельного експерименту, який демонструє працездатність розробленого алгоритму й ефективність створеного програмного забезпечення для розв'язування пружно-пластичних задач.

Ключові слова: метод декомпозиції області, прямий симетричний метод граничних елементів, метод скінченних елементів, пластичність, метод Ньютона-Рафсона.

Вступ. Комбіновані методи скінченних (МСЕ) та граничних елементів (МГЕ) — один із найпопулярніших напрямків досліджень у сучасній комп'ютерній механіці [1, 4, 9, 11-13]. Кожен із методів має свої характерні переваги та недоліки, що зумовлюють область його застосування. МСЕ ефективний для дослідження неоднорідних об'єктів і нелінійних задач, тоді як МГЕ має переваги при розв'язуванні задач для необмежених областей і областей із великими градієнтами функції, що апроксимується. МГЕ ефективніший, з точки зору обчислювальних затрат, завдяки дискретизації лише границі області, та точніший, оскільки апроксимують лише граничні умови, а диференціальні рівняння всередині області задовольняють точно, внаслідок використання фундаментальних розв'язків. Відтак, для розв'язування задач, які містять підобласті з різними фізичними чи геометричними характеристиками та властивостями, доцільно використовувати комбіновані методи скінченних і граничних елементів у рамках однієї чисельної моделі, що поєднує переваги обох методів. Це здійснюють шляхом декомпозиції розглядуваної області на декілька підобластей із врахуванням специфіки геометрії та фізико-механічних властивостей. На межі підобластей задають умови ідеального механічного контакту.

Найчастіше використовують два основні способи реалізації методу декомпозиції області (МДО), тобто методів поділу області без накладання. Прямі методи [7, 11] передбачають формування єдиної глобальної системи рівнянь для загальної області. Альтернативою є побудова ітераційних алгоритмів [1, 8, 9], у яких рівняння для підобластей розв'язуються окремо. Впродовж ітераційного процесу, граничні умови на спільній межі підобластей оновлюються, доки не виконається умова збіжності [1].

У статтях [1, 9] досліджено ефективність скінченно-граничноелементних ітераційних схем МДО для задач теорії пружності. У праці [4] розглянуто гетерогенну чисельну схему для задач пластичності, які розв'язуються методом змінних пружних параметрів. Метою цієї роботи є використання чисельних алгоритмів на основі МДО для розв'язування задач із врахуванням фізичної нелінійності матеріалу на основі теорії течіння [2]. Скінченно-елементна модель задачі теорії пластичного течіння побудована з використанням методу Ньютона-Рафсона. У підобластях із пружними характеристиками застосовано симетричний варіант прямого методу граничних елементів. Реалізовано послідовну схему Діріхле-Неймана [9], яка є найзручнішою для врахування природи обох методів. Наведено результати чисельного експерименту.

1. Метод декомпозиції області

МДО дозволяє застосовувати різні чисельні методи для окремих підобластей, використовувати переваги паралельних обчислень і технології об'єктно-орієнтованого програмування, що робить цей підхід одним із найефективніших для розв'язування складних різномасштабних задач [11-13].

У даній роботі використано ітераційні схеми МДО [1, 8, 9] для розв'язування пружно-пластичних задач із використанням скінченно-граничноелементних апроксимацій. У такій гетерогенній чисельній моделі МСЕ використовується у підобластях із високою концентрацією напружень, де є прогнозоване пластичне течіння матеріалу. Для підобластей, у яких напружено-деформований стан описується лінійною теорією пружності, застосовується симетричний варіант прямого МГЕ. Такий підхід є ефективний, оскільки забезпечує використання переваг кожного з методів у своїй підобласті.

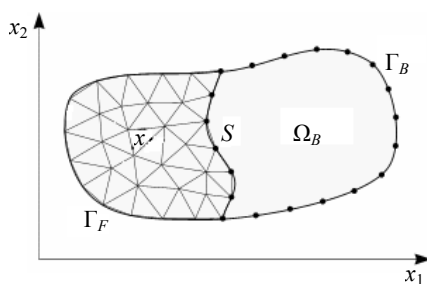


Рис. 1. Поділ області на підобласті для МСЕ та МГЕ

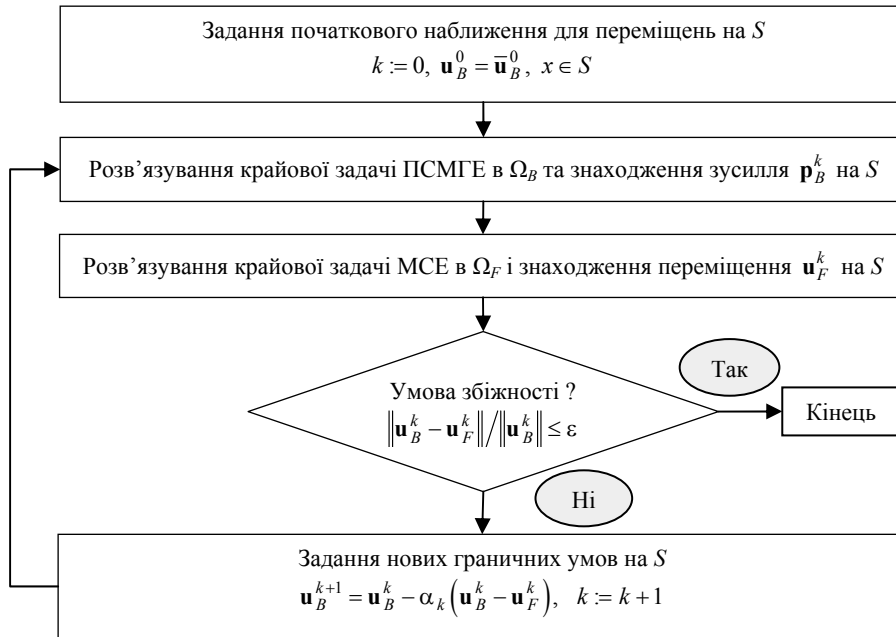


Рис. 2. Схема Діріхле-Неймана МДО

Розглядаємо задачу гетерогенного моделювання, в якій для підобласті Ω_F використовуємо співвідношення теорії пластичного течіння, а для Ω_B — граничні інтегральні рівняння теорії пружності (рис. 1). На спільній границі S задано умови ідеального механічного контакту. Застосувавши МСЕ та СПМГЕ до розв'язування задач у Ω_F та Ω_B , відповідно, на кожній ітерації МДО знаходимо нев'язки переміщень (чи напружень) на S і задаємо нові граничні умови для підобластей. Процес продовжується до досягнення бажаної точності.

На рис. 2 наведено блок-схему алгоритму розв'язування задач про пластичну деформацію об'єкта з використанням послідовної схеми Діріхле-Неймана МДО [9]. Зауважимо, що підобласті для МСЕ та МГЕ є визначені апіорі.

У роботах [1, 13] досліджено збіжність ітераційних схем МДО, запропоновано способи вибору параметра релаксації α_k .

2. Скінченно-елементна модель для задачі теорії пластичного течіння. Метод Ньютона-Рафсона

Для моделювання фізично нелінійної поведінки розглядаємо деформівне тверде тіло, яке займає область $\Omega_F \subset R^2$ із границею Γ_N і перебуває під дією масових \mathbf{f} і поверхневих \mathbf{h} сил, що спричиняють внутрішні напруження $\boldsymbol{\sigma}$, переміщення $\delta \mathbf{d}$ та деформації $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$. За принципом віртуальних робіт [10] маємо

$$\int_{\Omega_F} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_F - \int_{\Omega_F} \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f} d\Omega_F - \int_{\Gamma_N} \delta \mathbf{d}^T \mathbf{h} d\Gamma_N = 0. \quad (1)$$

Застосувавши апроксимацію МСЕ, отримаємо

$$\int_{\Omega_F} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{N}^T \mathbf{f}) d\Omega_F - \int_{\Gamma_N} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{h} d\Gamma_N = 0, \quad (2)$$

де $\delta \mathbf{d} = \mathbf{N} \delta \mathbf{u}$, $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}$, \mathbf{N} — матриця базисних функцій, \mathbf{B} — матриця диференціювання переміщень. Оскільки (2) виконується для довільних $\delta \mathbf{u}^T$, то

$$\int_{\Omega_F} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_F - \left(\int_{\Omega_F} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega_F + \int_{\Gamma_N} \mathbf{N}^T \mathbf{h} d\Gamma_N \right) = 0. \quad (3)$$

Внаслідок фізичної нелінійності матеріалу, напруження $\boldsymbol{\sigma}$ є, взагалі кажучи, нелінійна функція деформацій $\boldsymbol{\varepsilon}$ і, як наслідок, рівняння рівноваги (3) є нелінійні. У теорії пластичного течіння приймають лінійний зв'язок між нескінченно малими приростами напружень і деформацій [2, 3, 10]

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4)$$

де \mathbf{D}_{ep} — матриця пружно-пластичності, вигляд якої сконкретизуємо нижче. Розглядаємо асоціативний закон пластичного течіння з використанням умови пластичності фон Мізеса. Поверхня течіння описується функцією Мізеса [3]

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 3J_2 - \sigma_y^2 = 0, \quad (5)$$

де J_2 — другий інваріант девіатора тензора напружень; σ_y — напруження течіння, відоме для конкретного матеріалу. За виконання рівності (5) у даній точці тіла виникають пластичні деформації. Для пружної області $f(\boldsymbol{\sigma}) < 0$. Дослідження проведено без урахування зміцнення матеріалу.

Побудова аналітичних розв'язків задач про пластичне течіння у загальному випадку є надзвичайно складна проблема. На відміну від пружного, пластичний стан матеріалу залежить не лише від значення кінцевої величини навантаження, а також від всієї передісторії навантаження. У пластичній області приріст повної деформації складається з приросту пружної та пластичної деформацій [8], тобто

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (6)$$

Приймаємо, що пружні деформації задовольняють співвідношення закону Гука: $d\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{E} d\boldsymbol{\sigma}$, де \mathbf{E} — матриця пружності.

Приріст пластичних деформацій визначається рівняннями асоціативного закону течіння [3]

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (7)$$

де $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ — приріст пластичних деформацій, $d\lambda$ — пластичний множник. Напрямок пластичного течіння «асоціюється» з поверхнею течіння, а саме — є перпендику-

лярий до $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$. Пластичний множник $d\lambda$ визначаємо з умови сумісності $df = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T d\boldsymbol{\sigma} = 0$.

Використавши (7) і (6), можна записати

$$d\boldsymbol{\sigma} = \left[\mathbf{E} - \frac{\left(\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) \left(\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \right] d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (8)$$

Докладніше теорія пластичного течіння викладена у роботах [2, 3].

Для чисельного розв'язування задач теорії пластичного течіння найчастіше використовують ітераційні методи [8, 10], у яких послідовними наближеннями задовольняється умова рівноваги (3), записана у формі вектора нев'язки внутрішніх і зовнішніх сил

$$\boldsymbol{\Psi} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{h} d\Gamma \right) = \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}_{ext}. \quad (9)$$

Напруження $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ є нелінійна функція переміщень. Застосуємо метод Ньютона-Рафсона до розв'язування нелінійного рівняння

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Отримаємо ітераційний процес: $\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \Delta \mathbf{u}^i$. Використавши (9), а також зв'язок між приростами напружень і деформацій (4), $\Delta \mathbf{u}^i$ на i -ій ітерації визначаємо з рівняння

$$\mathbf{K}_T^i \Delta \mathbf{u}^i = \mathbf{F}_{int}^i - \mathbf{F}_{ext} = \boldsymbol{\Psi}^i, \quad (11)$$

де $\mathbf{K}_T^i = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{ep}^i \mathbf{B} d\Omega$ — матриця дотичної жорсткості. За знайденим приростом переміщень обчислюємо відповідні значення напружень у тілі. Це здійснюємо за алгоритмом радіального повернення на поверхню течіння [10]. Еквівалентні внутрішні вузлові сили обчислюємо за формулою: $\mathbf{F}_{int}^{i+1} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{i+1} d\Omega$. Далі формується вектор нев'язки $\boldsymbol{\Psi}^{i+1}$. Норма вектора нев'язки $\|\boldsymbol{\Psi}^{i+1}\|$ повинна бути достатньо малою величиною для зупинки ітераційного процесу.

Під час чисельного розв'язування практичних задач, як правило, розглядають покроковий процес навантаження тіла силами \mathbf{f}_n та \mathbf{h}_n , де n — номер кроку. Процес починається з деякого рівноважного стану, за який природно вибрати стан нульових внутрішніх переміщень за відсутності зовнішніх сил. На кожному наступному кроці ітераційного процесу методу Ньютона-Рафсона визначаємо

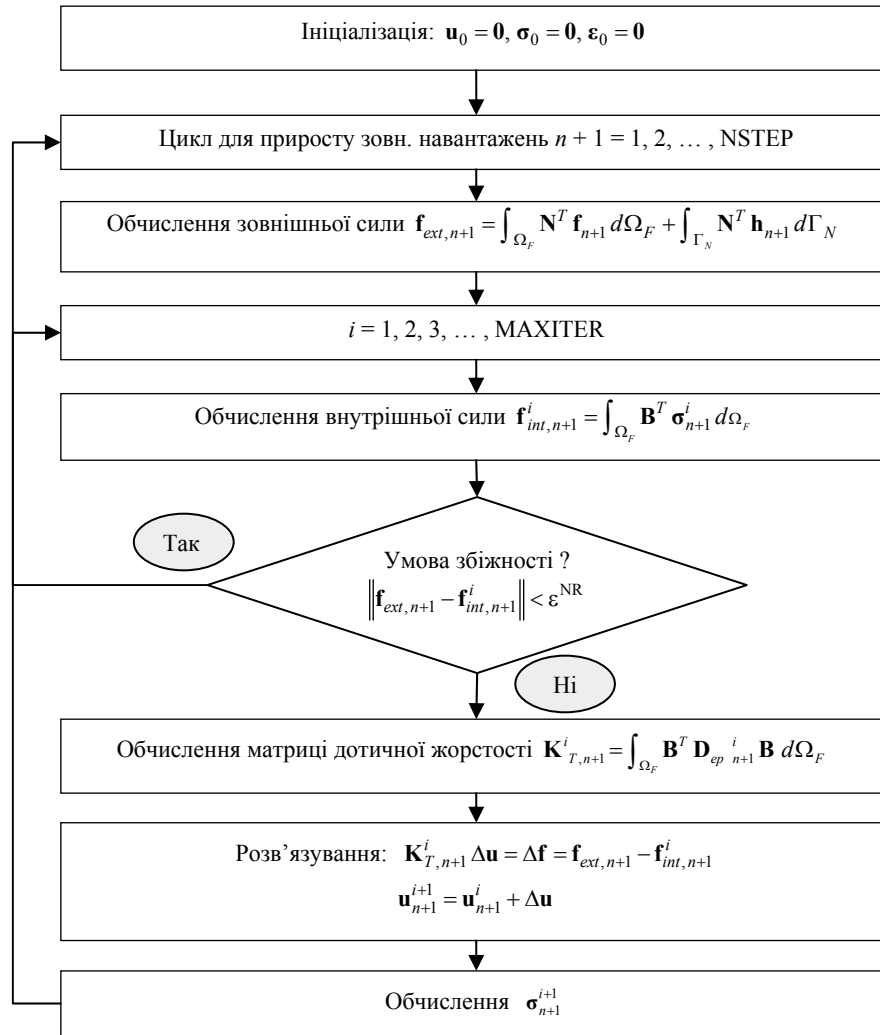


Рис. 3. Алгоритм розв'язування нелінійної задачі методом Ньютона-Рафсона

внутрішні переміщення та напруження, які відповідають рівноважному стану системи. Чисельні експерименти підтверджують, що така процедура забезпечує збіжність методу Ньютона-Рафсона за невелику кількість ітерацій (3-4 ітерації для відносної точності $\varepsilon^{NR} = 10^{-3}$). Описаний алгоритм розв'язування нелінійної задачі зображено на рис. 3. У використаних позначеннях нижній індекс, $n + 1$, позначає номер кроку для зовнішніх сил, а верхній, $i + 1$ — номер ітерації методу Ньютона-Рафсона.

3. Симетричний прямий метод граничних елементів (СПМГЕ)

Для розв'язування задачі лінійної теорії пружності розглянемо побудову симетричного варіанта прямого МГЕ. СПМГЕ є ефективний, оскільки приводить до СЛАР із симетричною матрицею.

Граничне інтегральне рівняння для задачі теорії пружності має вигляд [11]

$$u_k(\mathbf{P}) = \int_{\Gamma} G_{kj}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \tau_j(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} - \int_{\Gamma} F_{kj}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) u_j(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q}, \quad (12)$$

де $u_j(\mathbf{Q})$ і $\tau_j(\mathbf{Q})$ — переміщення та навантаження відповідно, $U_{kj}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ — фундаментальний розв'язок для переміщень, $T_{kj}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ — фундаментальний розв'язок для зусиль, $k, j = 1, 2$. Граничне інтегральне рівняння (12) вірне для внутрішніх і граничних точок [11]. Продиференціюємо інтегральне рівняння для переміщень (12) відносно \mathbf{P} , припустивши, що \mathbf{P} є внутрішня точка

$$u_{k,L}(\mathbf{P}) = \int_{\Gamma} S_{kjL}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \tau_j(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} - \int_{\Gamma} W_{kjL}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) u_j(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q}, \quad (13)$$

де $S_{kjL} = G_{kj,L}$, $W_{kjL} = F_{kj,L}$, $k, j, L = 1, 2$.

Граничне інтегральне рівняння для зусиль отримуємо з комбінації рівнянь (13) для часткових похідних від переміщень

$$\tau_k(\mathbf{P}) = \int_{\Gamma} S_{kj}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) u_j(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} - \int_{\Gamma} W_{kj}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \tau_j(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q}, \quad (14)$$

де S_{kj} , W_{kj} — лінійні комбінації S_{kjL} і W_{kjL} відповідно. Рівняння (14) є точне для внутрішніх точок \mathbf{P} . У роботі [11] доведено його справедливості у випадку, якщо $\mathbf{P} \in \Gamma$.

Для розв'язування рівнянь (13) і (14) використаємо метод Бубнова-Гальоркіна. За вагові функції вибираємо ті ж базисні функції ψ_i , що і для апроксимації переміщень і зусиль на границі. Отримаємо таку систему парних граничних інтегральних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma} \psi_l(\mathbf{P}) u_k(\mathbf{P}) d\mathbf{P} + \int_{\Gamma} \psi_l \int_{\Gamma} F_{kj}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) u_j(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} d\mathbf{P} - \\ - \int_{\Gamma} \psi_l \int_{\Gamma} G_{kj}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \tau_j(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} d\mathbf{P} = 0, \\ \int_{\Gamma} \psi_l(\mathbf{P}) \tau_k(\mathbf{P}) d\mathbf{P} + \int_{\Gamma} \psi_l \int_{\Gamma} S_{kj}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) u_j(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} d\mathbf{P} - \\ - \int_{\Gamma} \psi_l \int_{\Gamma} W_{kj}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \tau_j(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} d\mathbf{P} = 0. \end{array} \right. \quad (15)$$

Для отримання симетричної матриці коефіцієнтів СЛАР перше рівняння в (15) використовуємо на частині границі Γ_u , де відомі переміщення, а друге — на частині границі Γ_τ , де задані зусилля. Вважаємо, що для коректно сформульованої задачі $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_\tau$, $\Gamma_u \cap \Gamma_\tau = \emptyset$.

Отриману систему інтегральних рівнянь запишемо у матричній формі $\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\boldsymbol{\tau}$ або в блочному вигляді

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{bv} \\ \mathbf{u}_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}_* \\ \boldsymbol{\tau}_{bv} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Перший рядок представляє граничні інтегральні рівняння (15), які визначені на Γ_u , другий — гіперсингулярні граничні інтегральні рівняння на Γ_τ . Індекс «bv» означає, що величина є відома, а «*» — шукана. Приведемо систему рівнянь (16) до вигляду $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ та домножимо гіперсингулярні рівняння на -1 . Маємо

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{G}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & -\mathbf{H}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}_* \\ \mathbf{u}_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{H}_{11}\mathbf{u}_{bv} + \mathbf{G}_{12}\boldsymbol{\tau}_{bv} \\ \mathbf{H}_{21}\mathbf{u}_{bv} - \mathbf{G}_{21}\boldsymbol{\tau}_{bv} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Завдяки симетричним властивостям ядер \mathbf{G} , \mathbf{F} , \mathbf{S} , \mathbf{W} й описаному вище способі дискретизації на основі методу Бубнова-Гальоркіна отримуємо симетричну матрицю коефіцієнтів $(\mathbf{G}_{11} = \mathbf{G}_{11}^T, \mathbf{H}_{22} = \mathbf{H}_{22}^T, \mathbf{H}_{12} = \mathbf{G}_{21}^T)$.

Під час формування матриці СЛАР СМГЕ необхідно ефективно обчислювати подвійні гіперсингулярні інтеграли. Для їх обчислення використовуємо схеми чисельного інтегрування, які описано у [5].

4. Результати чисельного експерименту

Ітераційну схему МДО (рис. 2) застосовано до розв'язування задачі про плоску пластичну деформацію об'єкта, зображеного на рис. 4. Рівномірне нормальне навантаження $p = 3 \text{ кН/м}^2$. З лівого краю задано умови жорсткого защемлення. Механічні характеристики матеріалу: $\nu = 0,3$; $E = 21000 \text{ кН/м}^2$; $\sigma_T = 24 \text{ кН/м}^2$.

Розв'язавши задачу теорії пластичного течіння в усій області $\Omega = \Omega_F \cup \Omega_B$ отримано розподіл пластичних зон. На рис. 5 зображено ізолінії величини $\sqrt{3J_2}/\sigma_T$, яка дорівнює одиниці в точці тіла, що перейшла в пластичний стан.

Тут J_2 — другий інваріант тензора девіатора напружень. Як видно, у пластичний стан переходить частина тіла з лівого краю. Тому, доцільно здійснити поділ області на Ω_F та Ω_B як показано на рис. 4.

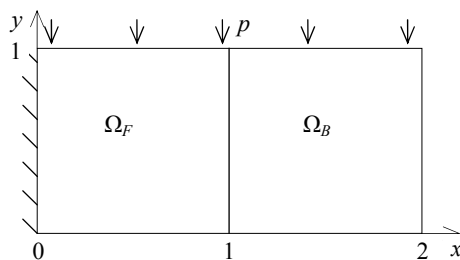


Рис. 4. Геометрична схема задачі

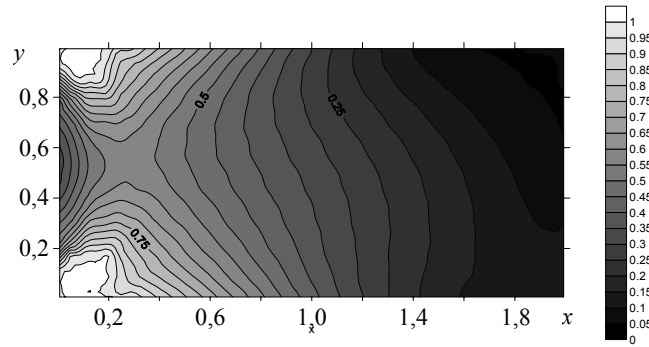


Рис. 5. Розподіл пластичних зон

За початкові наближення МДО вибиралися $\bar{u}_B^0 = (0,0)^T$. У підобласті Ω_F використовувалася скінченно-елементна сітка з 128 квадратичних трикутних елементів, а в Ω_B — сітка з $16 \times 16 \times 16 \times 16$ граничних елементів і лінійною апроксимацією переміщень і зусиль. Для МДО вибрано відносну точність $\varepsilon = 10^{-4}$, для методу Ньютона-Рафсона — $\varepsilon^{NR} = 10^{-3}$. У МСЕ використано 256 квадратичних

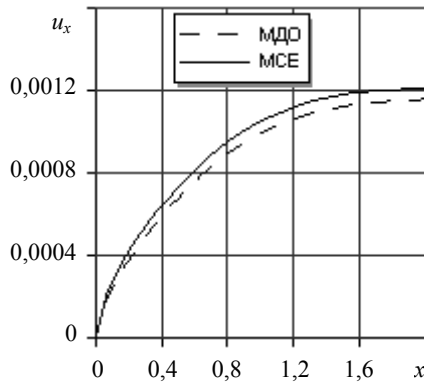


Рис. 6. Розподіл переміщення $u_x, y = 1$

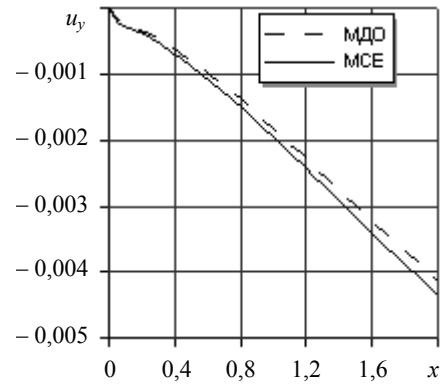


Рис. 7. Розподіл переміщення $u_y, y = 1$

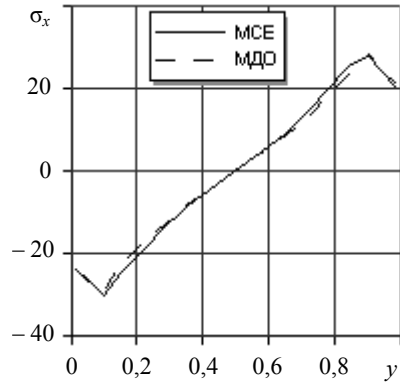


Рис. 8. Розподіл напруження $\sigma_x, x = 0,11$

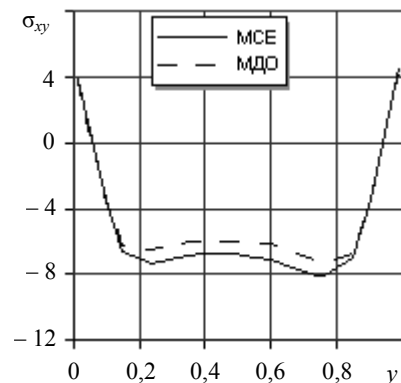


Рис. 9. Розподіл напруження $\sigma_{xy}, x = 0,11$

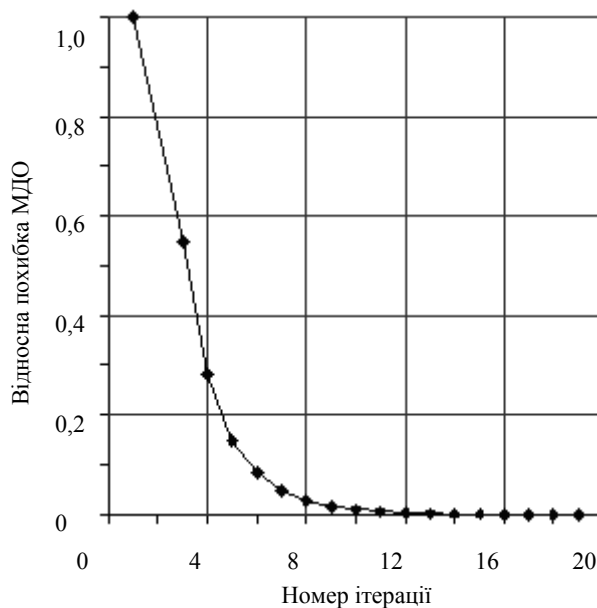


Рис. 10. Збіжність МДО

трикутників у всій області Ω . На рис. 6 і 7 зображено графіки переміщень u_x та u_y у перетині $y = 1$, на рис. 8 і 9 — напружень σ_x і σ_{xy} у перетині $x = 0,11$.

Наведені вище графіки засвідчують, що результати, отримані МДО та МСЕ, добре узгоджуються між собою. Крива на рис. 10 ілюструє збіжність ітераційного процесу МДО. Бачимо, що використана ітераційна схема МДО володіє стійким характером збіжності. Точність $\epsilon = 10^{-4}$ досягнуто за 19 ітерацій у разі статичного вибору параметра релаксації. Варто відзначити, що використання гетерогенної моделі дозволяє значно зменшити завантаженість оперативної пам'яті та центрального процесора при розв'язуванні задач про пластичне деформування [8].

Висновки. Гетерогенні математичні моделі дозволяють ефективно розв'язувати складні задачі математичної фізики, оскільки враховують специфічні фізичні та геометричні властивості підобластей, і використовують гібридні апроксимації різними чисельними методами. У роботі запропоновано розв'язування задач про пластичне деформування з використанням схем МДО. Наведений чисельний приклад підтверджує добру збіжність ітераційного процесу. Подальші дослідження буде спрямовано на вдосконалення обчислювальної ефективності алгоритму МДО, який, у даному випадку, є значно трудомісткіший, ніж у випадку розв'язування задач теорії пружності, оскільки матриця дотичної жорсткості в МСЕ обчислюється декілька разів на кожній ітерації МДО в ході ітерацій методу Ньютона-Рафсона. Застосування змінного параметра релаксації ітераційного алгоритму та передумовлювача дозволило б зменшити процесорний час виконання програми.

Література

- [1] Дияк, І. Числова ефективність гібридних скінченно-граничноелементних апроксимацій задач теорії пружності на підставі методу декомпозиції області / І. Дияк, І. Макар, І. Прокопишин // Вісник Львівського університету. Сер. прикладна математика та інформатика. — 2007. — № 12. — С. 93-100.
- [2] Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. — Москва: Наука, 1969. — 420 с.
- [3] Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. — Москва: Машиностроение, 1975. — 400 с.
- [4] Савула, Я. Г. Гетерогенна чисельна схема методу декомпозиції області для дослідження задач пластичності / Я. Г. Савула, І. І. Дияк, О. І. Дудаш // Математичні методи та фіз.-мех. поля. — 2002. — Т. 43. — С. 85-90.
- [5] Numerical Integration Schemes for Evaluation the (hyper) Singular Integrals in 2D BEM / A. Aimi, A. Carini, M. Diligenti, G. Monegato // Computational Mechanics. — 1998. — Vol. 22. — P. 1-12.
- [6] Dubois-Pelerin, Y. Object Oriented Finite Element Programming. III. An Efficient Implementation in C++ / Y. Dubois-Pelerin, T. Zimmermann // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1993. — Vol. 108. — P. 165-183.
- [7] Elleithy, W. Analysis of Problems in Elasto-Plasticity via an Adaptive FEM-BEM Coupling Method / W. Elleithy // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2008. — Vol. 197, Issues 45-48. — P. 3687-3701.
- [8] Elleithy, W. M. Interface Relaxation FEM-BEM Coupling Method for Elasto-Plastic Analysis / W. M. Elleithy, M. Tanaka, A. Guzik // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2004. — Vol. 28, Issue 7. — P. 849-857.
- [9] El-Gebeily, M. Convergence of Domain Decomposition Finite Element-boundary Element Coupling Methods / M. El-Gebeily, W. Elleithy, H. J. Al-Gahtani // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2002. — Vol. 191. — P. 4851-4867.
- [10] Crisfield, M. A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures / M. A. Crisfield. — Chichester: John Wiley & Sons, 2000. — P. 362.
- [11] Hsiao, G. C. Hybrid Coupled Finite-boundary Element Methods for Elliptic Systems of Second Order / G. C. Hsiao, E. Schnack, W. L. Wendland // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2000. — Vol. 190. — P. 431-485.
- [12] Coupled Boundary and Finite Element Analysis of a Special Class of Two-dimensional Problems of the Theory of Elasticity / Y. Savula, H. Mang, I. Dyyak, N. Pauk // Computers & Structures. — 2000. — Vol. 75. — P. 157-165.
- [13] Toselli, A. Domain Decomposition Methods — Algorithms and Theory / A. Toselli, O. Widlund. — Berlin: Springer-Verlag, 2005. — P. 450.

Computer modelling of locally nonlinear problems using domain decomposition method

Ivan Dyyak, Ihor Makar

A heterogeneous model of the theory of plasticity and the theory of elasticity is considered. Numerical method for solving locally nonlinear problems by the domain decomposition method is proposed. Nonlinear material behavior is modeled using Huber-Mises flow theory of plasticity. The finite element method and the Newton-Raphson procedure are used to solve nonlinear problem. Symmetric Galerkin boundary element method is utilized in linear elastic subdomains. Coupling of both methods is performed by iterative schemes of the domain decomposition method. Numerical experiment is included to demonstrate the operability of proposed algorithm and the effectiveness of developed computer program for solving elastic-plastic problems.

Компьютерное моделирование локально нелинейных задач на основе метода декомпозиции области

Иван Дьяк, Игорь Макар

Рассмотрена гетерогенная математическая модель теории пластичности и теории упругости. Предлагается численный способ решения локально нелинейных задач методом декомпозиции области. Для моделирования нелинейного поведения материала использованы соотношения теории пластического течения Губера-Мизеса, для дискретизации которых используется метод конечных элементов. Приближенное решение нелинейной задачи получено методом Ньютона-Рафсона. В подобластях, где напряженно-деформированное состояние описывается уравнениями линейной теории упругости, применяется симметрический вариант прямого метода граничных элементов. Объединение обеих методов осуществляется с помощью итерационных схем метода декомпозиции области. В работе приведены результаты численного эксперимента, демонстрирующего работоспособность разработанного алгоритма и эффективность созданного программного обеспечения решения задач упругопластичности.

Отримано 10.05.08