

**Поперечні коливання трансверсально-ізотропної
циліндричної оболонки з круговим отвором**Михайло Сухорольський¹, Тетяна Шопа²¹ д. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: sukhorolsky@lviv.net² Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: tetyana.sh@gmail.com

Розглядається задача про власні та вимушені коливання циліндричної шарнірно опертої трансверсально-ізотропної оболонки з круговим отвором у разі задання різних крайових умов на отворі. Напружено-деформований стан описується модифікованими рівняннями теорії оболонок Тимошенка. Числовий розв'язок задачі побудовано непрямим методом граничних інтегральних рівнянь, який ґрунтується на послідовнісному зображенні сингулярних розв'язків. Досліджено вплив величини радіуса отвору на власні частоти оболонки при різних значеннях коефіцієнта Пуассона.

Ключові слова: циліндрична трансверсально-ізотропна оболонка, модель Тимошенка, метод граничних інтегральних рівнянь, секвенціальний підхід, узагальнений метод Фур'є, дельтоподібні функції.

Вступ. Задачі про коливання циліндричних оболонок з отворами, вирізами та вклученнями мають широке застосування в інженерній практиці. У роботі А. L. Poore, А. Varut, Е. Madenci [2] розглянуто задачу про вільні коливання ламінованої циліндричної оболонки з круговим вирізом, досліджено вплив радіуса вирізу, радіуса оболонки та товщини ламінованого покриття на частоти коливань. У роботі S. Toda, К. Komatsu [3] методом Релея-Рітца досліджено частоти власних коливань оболонки з круговим підкріпленим отвором і результати порівняно з експериментальними даними. У праці V. Ramamurti, J. Pattabiraman [4] розглянуто задачу про коливання циліндричної оболонки з прямокутним вирізом, розв'язок якої побудовано методом скінчених елементів.

У даній роботі для дослідження коливань оболонки з круговим отвором використано модифіковані рівняння теорії оболонок Тимошенка. Задачу зведено до системи інтегральних рівнянь, які ґрунтуються на зображенні функції Гріна відповідної крайової задачі у вигляді границь послідовностей узагальнених частинних сум тригонометричних рядів.

1. Математична модель деформування оболонки

Рівняння теорії оболонок Тимошенка для трансверсально-ізотропного випадку, що враховують нормальну компоненту інерційної сили, мають вигляд [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i &= -m_i \quad (i=1,2), \\ \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{11} + k_2 N_{22}) - 2h\delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -q_3; \\ \frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} - k_i Q_i &= -q_i, \\ M_{ii} &= D \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + \nu \frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_j} \right), \quad M_{ij} = M_{ji} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j} \right), \\ N_{ii} &= B \left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + \nu \frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_j} + (k_i + \nu k_j) w \right], \quad N_{ij} = N_{ji} = B(1-\nu)/2 \left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j} \right), \\ Q_i &= \Lambda \left(\gamma_i + \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - k_i u_i \right) \quad (i, j=1,2, i \neq j), \end{aligned} \quad (1)$$

де $D = 2h^3 E / [3(1 - \nu^2)]$; $B = 2hE / (1 - \nu)$; $\Lambda = 5hG' / 3$, ν — характеристики матеріалу; $\alpha_1, \alpha_2 = R\varphi$ — координати; $k_1 = 0, k_2 = 1/R$; $2h$ — товщина оболонки, а R — радіус її серединної поверхні; ρ — густина матеріалу; $w, \gamma_1, \gamma_2, u_1, u_2$ — прогин, кути повороту нормалі до серединної поверхні та компоненти вектора переміщення; Q_i, M_{ij}, N_{ij} — внутрішні зусилля; q_i, m_i — зовнішнє навантаження.

Переміщення довільної точки оболонки визначають за формулами

$$u_i = \gamma_i \alpha_3 \quad (i=1,2), \quad u_3 = w, \quad (3)$$

де α_3 — товщинна координата.

Модифіковані рівняння деформування оболонки одержимо з системи (1)-(3), приймаючи нехтовно малими жорсткі повороти елемента оболонки відносно нормалі до серединної поверхні. Згідно з [1] вводимо у вирази для величин $M_{12}, M_{21}, N_{12}, N_{21}$ допоміжні функції H, T (реакції на повороти) та малі параметри $\beta_1 = 1/D, \beta_2 = 1/B$,

$$\begin{aligned} M_{ij} &= 2D \frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j} + (-1)^j H, \quad N_{ij} = 2B \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} + (-1)^j T, \quad i \neq j, \quad i, j=1,2, \\ \beta_1 H &= \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2}, \quad \beta_2 T = \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Система рівнянь, що відповідає рівнянням (1), (2) з урахуванням співвідношень (4) та $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0$, відповідає модифікованій моделі Тимошенка. При цьому останні два рівняння системи (4) набудуть вигляду $\partial \gamma_2 / \partial \alpha_1 - \partial \gamma_1 / \partial \alpha_2 = 0, \partial u_2 / \partial \alpha_1 - \partial u_1 / \partial \alpha_2 = 0$. Вони задовольняються шляхом введення потенціалів кутів повороту й осевих переміщень

$$\gamma_i = -\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i}, \quad u_i = -\frac{\partial u}{\partial \alpha_i}, \quad \gamma = \gamma(\alpha_1, \alpha_2), \quad u = u(\alpha_1, \alpha_2) \quad (i=1,2). \quad (5)$$

Якщо перетворити співвідношення (2) з урахуванням формул (5) і підставити їх у рівняння системи (1), то одержимо таку систему рівнянь

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{11}(u) + \mathbf{L}_{12}(w) + \mathbf{L}_{13}(\gamma) &= -1/B \left(\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_2} \right), \\ \mathbf{L}_{31}(u) + \mathbf{L}_{32}(w) + \mathbf{L}_{33}(\gamma) &= -1/B \left(\frac{\partial m_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_2}{\partial \alpha_2} \right), \\ \mathbf{L}_{21}(u) + \mathbf{L}_{22}(w) + \mathbf{L}_{23}(\gamma) - \frac{2h\rho}{B} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\frac{1}{B} q, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\mathbf{L}_{11} = -(\Delta\Delta - \Lambda/D\Delta_3)$; $\mathbf{L}_{12} = \mathbf{L}_{21} = \nu\Delta_2 + (1 + \Lambda/B)\Delta_1$; $\mathbf{L}_{13} = \mathbf{L}_{31} = -\Lambda/B\Delta_1$; $\mathbf{L}_{22} = \Lambda/B\Delta - (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2)$; $\mathbf{L}_{23} = \mathbf{L}_{32} = -\Lambda/B\Delta$; $\mathbf{L}_{33} = -D/B(\Delta\Delta - \Lambda/D\Delta)$; $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$;
 $\Delta_1 = k_1\partial_{11} + k_2\partial_{22}$; $\Delta_2 = k_2\partial_{11} + k_1\partial_{22}$; $\Delta_3 = k_1^2\partial_{11} + k_2^2\partial_{22}$; $\partial_{ii} = \partial^2/\partial\alpha_i^2$; $\partial_i = \partial/\partial\alpha_i$.

Нормальні та дотичні компоненти переміщень і зусиль уздовж деякої гладкої кривої C з одиничним нормальним і тангенціальним векторами $\{n_1(\alpha_1, \alpha_2); n_2(\alpha_1, \alpha_2)\}$, $\{\tau_1(\alpha_1, \alpha_2); \tau_2(\alpha_1, \alpha_2)\}$, ($\tau_1 = -n_2$, $\tau_2 = n_1$) визначаються за формулами

$$\begin{aligned} \gamma_n &= -\left(n_1 \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_1} + n_2 \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_2} \right), \quad \gamma_\tau = -\left(\tau_1 \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_1} + \tau_2 \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_2} \right), \\ u_n &= -\left(n_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + n_2 \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right), \quad u_\tau = -\left(\tau_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \tau_2 \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right), \\ M_n &= M_{11}n_1^2 + 2M_{12}n_1n_2 + M_{22}n_2^2, \quad N_n = N_{11}n_1^2 + 2N_{12}n_1n_2 + N_{22}n_2^2, \\ Q_n &= Q_1n_1 + Q_2n_2. \end{aligned} \quad (7)$$

При формулюванні граничних умов задають три величини, серед яких можуть бути нормальні компоненти моменту та мембранної сили, перерізувальна сила, прогин, нормальна компонента мембранного переміщення та кута повороту нормалі до серединної поверхні.

2. Постановка задачі

Розглянемо задачу про усталені вимушені коливання замкненої трансверсально-ізотропної циліндричної оболонки з круговим отвором радіуса R_0 . Зовнішні краї оболонки шарнірно оперті. Поверхня ізотропії паралельна до серединної поверхні. Вісь α_1 напрямлена вздовж оболонки, $\alpha_2 = R\varphi$, де φ — кутова координата.

Граничні умови на краях $\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = l_1$, що відповідають шарнірному опиранню, такі

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad N_n = 0. \quad (8)$$

Розглянемо два типи крайових умов на контурі.

Випадок 1 — задано переміщення на контурі L , які змінюються за гармонічним законом за часовою координатою

$$u_n = 0, \quad \gamma_n = 0, \quad w = w_0 \sin(\theta_0 t). \quad (9)$$

Випадок 2 — задано розподілені зусилля на контурі L , які теж мають гармонічний закон зміни в часі

$$Q_n = Q_0 \sin(\theta_0 t), \quad M_n = M_0 \sin(\theta_0 t), \quad N_n = 0. \quad (10)$$

Тут $n = \{n_1(\xi), n_2(\xi)\}$ — одиничний нормальний вектор до лінії L , w_0, Q_0, M_0 — задані амплітуди прогину, перерізувальної сили та моменту.

Таким чином для визначення невідомих функцій маємо систему рівнянь (6) і граничні умови (8), (9) або (8), (10).

Для побудови розв'язку сформульованих задач використовуємо непрямий метод граничних елементів. Вважаємо, що в елементарному прямокутнику $\Pi^r = \{\alpha(\alpha_1, \alpha_2) : |\alpha_1 - \alpha_1^r| \leq \varepsilon, |\alpha_2 - \alpha_2^r| \leq \varepsilon\}$ із довжинами сторін ε оболонка навантажена зусиллями, які симетрично розподілені відносно його осей симетрії (паралельних до сторін). Рівнодійні цих зусиль — нормальна сила, момент та осьова сила $T_1^r \sin(\theta_0 t)$, $T_2^r \sin(\theta_0 t)$, $T_3^r \sin(\theta_0 t)$ — змінюються за гармонічним законом із частотою θ_0 . При цьому рівнодійний момент орієнтований за напрямком одиничного вектора $\{n_1^r; n_2^r\}$. Для моделювання цієї дії використовуємо дельтоподібні функції [1]

$$\begin{aligned} q_i &= T_1^r n_i^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r) \delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r) \sin(\theta_0 t), \\ q_3 &= T_3^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r) \delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r) \sin(\theta_0 t), \\ m_i &= T_2^r n_i^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r) \delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r) \sin(\theta_0 t), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$\delta_{\varepsilon i}(\xi, \xi^r) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} g\left(\frac{|\xi - \xi^r|}{\varepsilon}\right), & |\xi - \xi^r| \leq \varepsilon, \\ 0, & |\xi - \xi^r| > \varepsilon, \end{cases}$$

$g(\xi)$ ($0 \leq \xi \leq 1$) — спадна гладка функція; $g(1) = 0$; $\int_0^1 g(\xi) d\xi = 1$.

Розв'язок системи рівнянь (6), що задовольняє умови (8), шукаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} U_\varepsilon \\ \Gamma_\varepsilon \\ W_\varepsilon \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\langle \begin{pmatrix} U_{\varepsilon km}^c \\ \Gamma_{\varepsilon km}^c \\ W_{\varepsilon km}^c \end{pmatrix} \Phi_{km}^c(\alpha) + \begin{pmatrix} U_{\varepsilon km}^s \\ \Gamma_{\varepsilon km}^s \\ W_{\varepsilon km}^s \end{pmatrix} \Phi_{km}^s(\alpha) \right\rangle \sin(\theta_0 t), \quad (12)$$

де $\Phi_{km}^c(\alpha) = \sin(\lambda_{1k}\alpha)\cos(\lambda_{2m}\alpha_2)$; $\Phi_{km}^s(\alpha) = \sin(\lambda_{1k}\alpha)\sin(\lambda_{2m}\alpha_2)$, $\Phi_{km}(\alpha) = \Phi_{km}^c(\alpha) + \Phi_{km}^s(\alpha)$, $\lambda_{1k} = k\pi/l$ або $\lambda_{2m} = m/R$.

Подамо дельтоподібні функції у формулах (11) наступним чином

$$\delta_\varepsilon(\xi, \xi^r) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_k \varepsilon) \sin(\lambda_k \xi^r) \sin(\lambda_k \xi)$$

або

$$\delta_\varepsilon(\xi, \xi^r) = \frac{2}{l} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_k \varepsilon) \cos(\lambda_k \xi^r) \cos(\lambda_k \xi) \right],$$

де $\varphi(\lambda_k, \varepsilon) = \int_0^1 g(s) \cos(\lambda_k \varepsilon s) ds$; λ_k дорівнює λ_{1k} або λ_{2m} . Індекс r зверху означає,

що відповідні величини визначені в точці (α_1^r, α_2^r) . Підставивши останні співвідношення в рівняння (6), одержимо систему алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу ключових функцій

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} C_{km}^\varepsilon \{ \mathbf{L}_{ij}^{km} \} \begin{Bmatrix} u_{km}^r(\alpha^r) \\ w_{km}^r(\alpha^r) \\ \gamma_{km}^r(\alpha^r) \end{Bmatrix} = -\frac{1}{B} \sum_{k,m=1}^{\infty} C_{km}^\varepsilon \begin{Bmatrix} u_{km}^r(\alpha^r) \\ w_{km}^r(\alpha^r) \\ \gamma_{km}^r(\alpha^r) \end{Bmatrix} \left[\mathbf{\Omega}_{km}(\alpha^r) \right] \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix}.$$

Тут

$$\left[\mathbf{\Omega}_{km}(\alpha^r) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{km}(\alpha^r)}{\partial n} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{km}(\alpha^r) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_{km}(\alpha^r)}{\partial n} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_{11}^{km} = -\left(\Delta_{km} \Delta_{km} + \frac{\Lambda}{B} \Delta_{km}^3 \right); \quad \mathbf{L}_{22}^{km} = -\left[\frac{\Lambda}{B} \Delta_{km} + (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2) \right] - \frac{2h\theta_0^2}{B};$$

$$\mathbf{L}_{33}^{km} = -\frac{D}{B} \left(\Delta_{km} \Delta_{km} + \frac{\Lambda}{D} \Delta_{km} \right); \quad \mathbf{L}_{12}^{km} = \mathbf{L}_{21}^{km} = -\left[\nu \Delta_{km}^2 + \left(1 + \frac{\Lambda}{B} \right) \Delta_{km}^1 \right];$$

$$\mathbf{L}_{13}^{km} = \mathbf{L}_{31}^{km} = \frac{\Lambda}{B} \Delta_{km}^1; \quad \mathbf{L}_{23}^{km} = \mathbf{L}_{32}^{km} = \frac{\Lambda}{B} \Delta_{km},$$

$$\Delta_{km}^1 = k_1 \lambda_{1k}^2 + k_2 \lambda_{2m}^2; \quad \Delta_{km}^2 = k_2 \lambda_{1k}^2 + k_1 \lambda_{2m}^2; \quad \Delta_{km}^3 = k_1^2 \lambda_{1k}^2 + k_2^2 \lambda_{2m}^2.$$

Розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} u_{km}^{r\varepsilon}(\alpha^r) \\ w_{km}^{r\varepsilon}(\alpha^r) \\ \gamma_{km}^{r\varepsilon}(\alpha^r) \end{cases} = \frac{1}{B} \sum_{k,m=1}^{\infty} C_{km}^{\varepsilon} [\mathbf{U}_{km}^r] [\mathbf{\Omega}_{km}(\alpha^r)] \{\mathbf{T}^r\}; \quad (13)$$

$$[\mathbf{U}_{km}^r] = \begin{bmatrix} u_{1km}^r & u_{2km}^r & u_{3km}^r \\ w_{1km}^r & w_{2km}^r & w_{3km}^r \\ \gamma_{1km}^r & \gamma_{2km}^r & \gamma_{3km}^r \end{bmatrix}; \quad \{\mathbf{T}^r\} = \begin{bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{bmatrix};$$

$$u_{1km}^r = (\mathbf{L}_{22}^{km} \mathbf{L}_{33}^{km} - \mathbf{L}_{23}^{km} \mathbf{L}_{32}^{km}) / \Omega_0; \quad u_{2km}^r = (\mathbf{L}_{32}^{km} \mathbf{L}_{13}^{km} - \mathbf{L}_{12}^{km} \mathbf{L}_{33}^{km}) / \Omega_0;$$

$$u_{3km}^r = (\mathbf{L}_{12}^{km} \mathbf{L}_{23}^{km} - \mathbf{L}_{13}^{km} \mathbf{L}_{22}^{km}) / \Omega_0; \quad w_{1km}^r = (\mathbf{L}_{23}^{km} \mathbf{L}_{31}^{km} - \mathbf{L}_{21}^{km} \mathbf{L}_{33}^{km}) / \Omega_0;$$

$$w_{2km}^r = (\mathbf{L}_{11}^{km} \mathbf{L}_{33}^{km} - \mathbf{L}_{13}^{km} \mathbf{L}_{31}^{km}) / \Omega_0; \quad w_{3km}^r = (\mathbf{L}_{21}^{km} \mathbf{L}_{13}^{km} - \mathbf{L}_{11}^{km} \mathbf{L}_{23}^{km}) / \Omega_0;$$

$$\gamma_{1km}^r = (\mathbf{L}_{21}^{km} \mathbf{L}_{32}^{km} - \mathbf{L}_{22}^{km} \mathbf{L}_{31}^{km}) / \Omega_0; \quad \gamma_{2km}^r = (\mathbf{L}_{11}^{km} \mathbf{L}_{22}^{km} - \mathbf{L}_{12}^{km} \mathbf{L}_{21}^{km}) / \Omega_0;$$

$$\gamma_{3km}^r = (\mathbf{L}_{13}^{km} \mathbf{L}_{31}^{km} - \mathbf{L}_{11}^{km} \mathbf{L}_{32}^{km}) / \Omega_0, \quad \Omega_0 = \det \|\mathbf{L}_{ij}\|.$$

Подвійні ряди у співвідношенні (13) рівномірно збігаються при $\varepsilon \neq 0$ та тому можна зробити граничний перехід при $\varepsilon \rightarrow 0$. Наприклад, якщо $g(s) = 2(1-s)$, то $\varphi(\lambda_k, \varepsilon) = [\sin(\lambda_k \varepsilon / 2) / (\lambda_k \varepsilon / 2)]^2$ й оскільки $|\varphi(\lambda_k, \varepsilon)| = O(1/k^2)$, то ряди в (12) рівномірно збігаються.

Із співвідношення (13) при $\varepsilon \rightarrow 0$ отримаємо функції Гріна крайових задач (6), (8), (9) або (6), (8), (10) [1].

Тепер сформулюємо інтегральні рівняння задачі. Розглядаємо задачу про навантаження шарнірно опертої оболонки невідомими силами та моментами $T_1(\xi) \sin(\theta_0 t)$, $T_2(\xi) \sin(\theta_0 t)$, $T_3(\xi) \sin(\theta_0 t)$, розподіленими вздовж лінії L . Узагальнений розв'язок задачі подаємо у вигляді інтегральних згорток цих зусиль і функції Гріна. Для ключових функцій одержимо такі вирази

$$\begin{aligned} w(\alpha, t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{C_{km}^{\varepsilon}}{B} \left[w_{1km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_1(\xi) + w_{2km} \Phi_{km}(\xi) T_2(\xi) + \right. \\ &+ \left. w_{3km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_3(\xi) \right] \Phi_{km}(\alpha) dl(\xi) \sin(\theta_0 t), \\ u(\alpha, t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{C_{km}^{\varepsilon}}{B} \left[u_{1km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_1(\xi) + u_{2km} \Phi_{km}(\xi) T_2(\xi) + \right. \\ &+ \left. u_{3km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_3(\xi) \right] \frac{\partial \Phi_{km}(\alpha)}{\partial n} dl(\xi) \sin(\theta_0 t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{C_{km}^\varepsilon}{B} \left[\gamma_{1km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_1(\xi) + \gamma_{2km} \Phi_{km}(\xi) T_2(\xi) + \right. \\ \left. + \gamma_{3km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_3(\xi) \right] \frac{\partial \Phi_{km}(\alpha)}{\partial n} dl(\xi) \sin(\theta_0 t). \end{aligned} \quad (14)$$

Якщо у співвідношеннях (14) врахувати крайові умови (9), то після граничного переходу при $\alpha \rightarrow \alpha_0$, $\alpha_0 \in L$, прийдемо до системи трьох інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{C_{km}^\varepsilon}{B} \left[w_{1km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_1(\xi) + w_{2km} \Phi_{km}(\xi) T_2(\xi) + \right. \\ \left. + w_{3km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_3(\xi) \right] \Phi_{km}(\alpha) dl(\xi) \sin(\theta_0 t) = w_0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{C_{km}^\varepsilon}{B} \left[u_{1km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_1(\xi) + u_{2km} \Phi_{km}(\xi) T_2(\xi) + \right. \\ \left. + u_{3km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_3(\xi) \right] \frac{\partial \Phi_{km}(\alpha)}{\partial n} dl(\xi) \sin(\theta_0 t) = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{C_{km}^\varepsilon}{B} \left[\gamma_{1km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_1(\xi) + \gamma_{2km} \Phi_{km}(\xi) T_2(\xi) + \right. \\ \left. + \gamma_{3km} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_3(\xi) \right] \frac{\partial \Phi_{km}(\alpha)}{\partial n} dl(\xi) \sin(\theta_0 t) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

У випадку задання крайових умов (10) на основі формул (14), (7) і (10) отримаємо таку систему інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} T_1(\xi) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{C_{km}^\varepsilon}{B} \left[Q_{1km}(\alpha) \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_1(\xi) + Q_{2km}(\alpha) \Phi_{km}(\xi) T_2(\xi) + \right. \\ \left. + Q_{3km}(\alpha) \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_3(\xi) \right] dl(\xi) \sin(\theta_0 t) = Q_0, \\ \frac{1}{2} T_2(\xi) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{C_{km}^\varepsilon}{B} \left[M_{1km}(\alpha) \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_1(\xi) + M_{2km}(\alpha) \Phi_{km}(\xi) T_2(\xi) + \right. \\ \left. + M_{3km}(\alpha) \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_3(\xi) \right] dl(\xi) \sin(\theta_0 t) = M_0, \\ \frac{1}{2} T_3(\xi) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{C_{km}^\varepsilon}{B} \left[N_{1km}(\alpha) \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_1(\xi) + N_{2km}(\alpha) \Phi_{km}(\xi) T_2(\xi) + \right. \end{aligned}$$

$$+ N_{3km}(\alpha) \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} T_3(\xi) \Big] dl(\xi) \sin(\theta_0 t) = 0. \quad (16)$$

Тут

$$\begin{aligned} Q_{pkm}(\alpha) &= \Lambda \left[\left(-\gamma_{pkm}^r + w_{pkm}^r + k_1 u_{pkm}^r \right) n_1 \lambda_{1k} \Phi_1(\alpha) + \right. \\ &+ \left. \left(-\gamma_{pkm}^r + w_{pkm}^r + k_2 u_{pkm}^r \right) n_2 \lambda_{2m} \Phi_2(\alpha) \right], \\ N_{pkm}(\alpha) &= D \left\langle \Phi(\alpha^r) \left\{ \left[1/2(1-\nu) n_1 n_2 (\lambda_{1k}^2 + \lambda_{2m}^2) + \right. \right. \right. \\ &+ n_1^2 (\lambda_{1k}^2 + \nu \lambda_{2m}^2) + n_2^2 (\lambda_{2m}^2 + \nu \lambda_{1k}^2) \Big] u_{pkm}^r + \\ &+ \left. \left. \left. \left[n_1^2 (k_1 + \nu k_2) + n_2^2 (k_2 + \nu k_1) \right] w_{pkm}^r \right\} - \Phi_3(\alpha^r) \left[2(1-\nu) u_{pkm} \lambda_{1km} \lambda_{2km} n_1 n_2 \right] \right\rangle, \\ M_{pkm}(\alpha) &= -D \gamma_{pkm}^r \Phi_4(\alpha^r), \quad p = \overline{1,3}, \\ \Phi(\alpha) &= \sin(\lambda_{1k} \alpha_1) \left[\cos(\lambda_{2m} \alpha_2) + \sin(\lambda_{2m} \alpha_2) \right]; \\ \frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial n} &= n_1 \lambda_{1k} \cos(\lambda_{1k} \alpha_1) \left[\cos(\lambda_{2m} \alpha_2) - \sin(\lambda_{2m} \alpha_2) \right] - \\ &- n_2 \lambda_{2m} \sin(\lambda_{1k} \alpha_1) \left[\sin(\lambda_{2m} \alpha_2) - \cos(\lambda_{2m} \alpha_2) \right], \\ \Phi_1(\alpha) &= \frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial \alpha_1}, \quad \Phi_2(\alpha) = \frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial \alpha_2}, \quad \Phi_3(\alpha) = \frac{\partial^2 \Phi(\alpha)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \\ \Phi_4(\alpha) &= \Phi(\alpha) \left[n_1^2 (\lambda_{1k}^2 - \nu \lambda_{2m}^2) - n_2^2 (\lambda_{2m}^2 + \nu \lambda_{1k}^2) \right] + 2(1-\nu) n_1 n_2 \lambda_{1k} \lambda_{2m} \Phi_3(\alpha). \end{aligned}$$

Наближений розв'язок систем рівнянь (15) і (16) шукаємо методом колокацій. Лінію L наближуємо ламаною лінією L^* , складеною з прямолінійних відрізків L^r , $r = \overline{1, N}$, вздовж кожного з яких невідомі густини набувають значень $T_1(\xi) = T_1^r \delta_\varepsilon(\xi, \xi^r)$, $T_2(\xi) = T_2^r \delta_\varepsilon(\xi, \xi^r)$, $T_3(\xi) = T_3^r \delta_\varepsilon(\xi, \xi^r)$. Відрізок L^r задаємо довжиною $2l^r$, середньою точкою $\xi^r(\xi_1^r, \xi_2^r)$ та напрямним одиничним вектором $\{\tau_1^r, \tau_2^r\} = \{\tau_1(\xi^r), \tau_2(\xi^r)\}$. Границі при $\varepsilon \rightarrow 0$ сум тригонометричних рядів у (15) наближаємо відповідними їх частинними сумами порядку K, M при достатньо малому $\varepsilon \neq 0$.

Обчислюючи інтеграли в системі рівнянь (15) з урахуванням зроблених припущень і мінімізуючи нев'язку розв'язку в контрольних точках $\alpha^q(\alpha_1^q; \alpha_2^q)$, $q = \overline{1, N}$ — середніх точках відрізків L^q , зведемо (15) до такої системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{r=1}^N \begin{bmatrix} u_1^r(\alpha^q, \varepsilon) & u_2^r(\alpha^q, \varepsilon) & u_3^r(\alpha^q, \varepsilon) \\ \gamma_1^r(\alpha^q, \varepsilon) & \gamma_2^r(\alpha^q, \varepsilon) & \gamma_3^r(\alpha^q, \varepsilon) \\ w_1^r(\alpha^q, \varepsilon) & w_2^r(\alpha^q, \varepsilon) & w_3^r(\alpha^q, \varepsilon) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_0 \end{Bmatrix}, \quad q = \overline{1, N}. \quad (17)$$

Тут

$$\begin{aligned}
 u_1^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}^\varepsilon u_{1km} \gamma_{3km} \frac{\partial \Phi(\alpha^r)}{\partial n} \frac{\partial \Phi(\alpha^q)}{\partial n}, & u_2^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}^\varepsilon u_{2km} \frac{\partial \Phi(\alpha^q)}{\partial n} \Phi(\alpha^r), \\
 u_3^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}^\varepsilon u_{3km} \frac{\partial \Phi(\alpha^r)}{\partial n} \frac{\partial \Phi(\alpha^q)}{\partial n}, & \gamma_1^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}^\varepsilon \gamma_{1km} \frac{\partial \Phi(\alpha^r)}{\partial n} \frac{\partial \Phi(\alpha^q)}{\partial n}, \\
 \gamma_2^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}^\varepsilon \gamma_{2km} \frac{\partial \Phi(\alpha^q)}{\partial n} \Phi(\alpha^r), & \gamma_3^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}^\varepsilon \gamma_{3km} \frac{\partial \Phi(\alpha^r)}{\partial n} \frac{\partial \Phi(\alpha^q)}{\partial n}, \\
 w_1^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}^\varepsilon w_{1km} \frac{\partial \Phi(\alpha^r)}{\partial n} \Phi(\alpha^q), & w_2^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}^\varepsilon w_{2km} \Phi(\alpha^q) \Phi(\alpha^r), \\
 w_3^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}^\varepsilon w_{3km} \frac{\partial \Phi(\alpha^r)}{\partial n} \Phi(\alpha^q).
 \end{aligned}$$

Система (16) зведеться до системи алгебраїчних рівнянь

$$\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix} + \sum_{r=1}^N \begin{bmatrix} Q_1^r(\alpha^q, \varepsilon) & Q_2^r(\alpha^q, \varepsilon) & Q_3^r(\alpha^q, \varepsilon) \\ M_1^r(\alpha^q, \varepsilon) & M_2^r(\alpha^q, \varepsilon) & M_3^r(\alpha^q, \varepsilon) \\ N_1^r(\alpha^q, \varepsilon) & N_2^r(\alpha^q, \varepsilon) & N_3^r(\alpha^q, \varepsilon) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_0 \\ M_0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 Q_p^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}^\varepsilon Q_{pkm}(\alpha^q) \frac{\partial \Phi(\alpha^r)}{\partial n}, & Q_2^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}^\varepsilon Q_{2km}(\alpha^q) \Phi(\alpha^r), \\
 M_p^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}^\varepsilon M_{pkm}(\alpha^q) \frac{\partial \Phi(\alpha^r)}{\partial n}, & M_2^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}^\varepsilon M_{2km}(\alpha^q) \Phi(\alpha^r), \\
 N_p^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}^\varepsilon N_{pkm}(\alpha^q) \frac{\partial \Phi(\alpha^r)}{\partial n}, & N_2^r(\alpha^q, \varepsilon) &= C_{km}^\varepsilon N_{2km}(\alpha^q) \Phi(\alpha^r), \quad p=1,3.
 \end{aligned}$$

Дискретні аналоги інтегральних виразів для прогину оболонки та нормальних до кривої L компонент кута повороту, перерізувальної сили та моменту одержимо з (14) і (7) у вигляді

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} w \\ \gamma_n \\ u \end{Bmatrix} &= \frac{1}{B} \sum_{r=1}^N \begin{bmatrix} w_1^r(\alpha, \varepsilon) & w_2^r(\alpha, \varepsilon) & w_3^r(\alpha, \varepsilon) \\ \gamma_1^r(\alpha, \varepsilon) & \gamma_2^r(\alpha, \varepsilon) & \gamma_3^r(\alpha, \varepsilon) \\ u_1^r(\alpha, \varepsilon) & u_2^r(\alpha, \varepsilon) & u_3^r(\alpha, \varepsilon) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix} \sin(\theta_0 t), \\
 \begin{Bmatrix} Q_n \\ M_n \\ N_n \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix} + \sum_{r=1}^N \begin{bmatrix} Q_1^r(\alpha, \varepsilon) & Q_2^r(\alpha, \varepsilon) & Q_3^r(\alpha, \varepsilon) \\ M_1^r(\alpha, \varepsilon) & M_2^r(\alpha, \varepsilon) & M_3^r(\alpha, \varepsilon) \\ N_1^r(\alpha, \varepsilon) & N_2^r(\alpha, \varepsilon) & N_3^r(\alpha, \varepsilon) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix} \sin(\theta_0 t). \quad (19)
 \end{aligned}$$

Таким чином, за знайденими з систем (17) і (18) значеннями параметрів T_i^k та формулами (19) шукаємо характеристики напружено-деформованого стану. Частоти власних коливань оболонки знаходимо з умов існування нетривіального розв'язку однорідної систем рівнянь (17) чи (18).

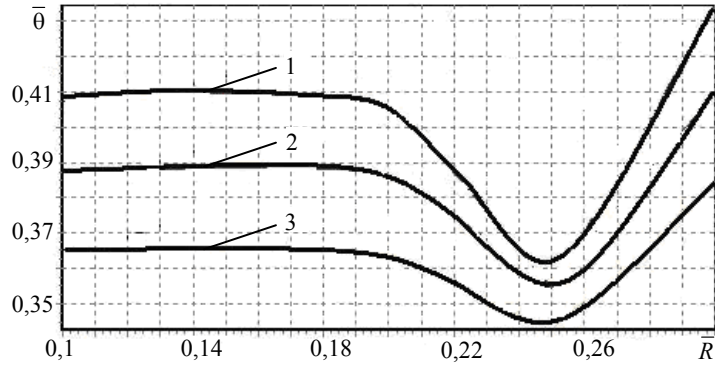


Рис. 1. Частоти власних коливань у випадку 1

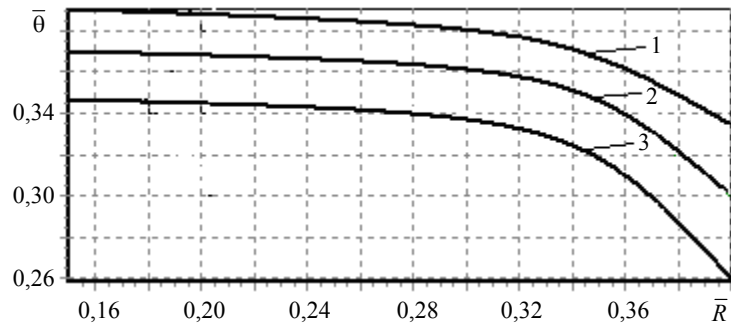


Рис. 2. Частоти власних коливань у випадку 2

4. Числовий приклад

Криві на рис. 1 і 2 ілюструють залежність приведених частот власних коливань трансверсально-ізотропної оболонки $\bar{\theta} = \sqrt{2\rho h\theta_0^2/B}$ від приведенного радіусу $\bar{R} = R_0/R$ отвору для різних значень коефіцієнтів Пуассона у випадку граничних умов (9) і (10) відповідно. Тут $l/R = 5$; $R/R^* = 1$ м; $\varepsilon/R = 0,01$; $h = 0,05$; $E/E^* = 1$; $E^* = 10^5$ кг/м²; $R^* = 1$ м; $G'/E^* = 1/3$; $K = M = 500$ і $\nu = 0,2; 0,3; 0,4$ — криві 1-3 відповідно.

Бачимо, що зі збільшенням коефіцієнта Пуассона частоти власних коливань оболонки зменшуються. Частоти власних коливань за крайових умов типу (9) є вищі, ніж відповідні частоти у випадку задання умов (10). Це пояснюється тим, що крайові умови (9) моделюють вплив абсолютно жорсткого підкріплення на контурі отвору, а (10) — відповідають умовам вільного краю. Під час числових розрахунків вибір параметрів R , ε , N , K , M зумовлений тим, щоб за мінімальних затрат машинного часу досягнути максимальної точності, яку оцінювали як відхилення дискретних значень фіктивних функцій розподілу внаслідок зміни цих параметрів.

Література

- [1] Бурак Я. Й., Рудавський Ю. К., Сухорольський М. А. Аналітична механіка локально навантажених оболонок. — Львів: Інтеллект-Захід, 2007. — 240 с.
- [2] Poore A. L., Barut A., Madenci E. Free vibration of laminated cylindrical shells with a circular cutout // Journal of Sound and Vibration. — 2008. — Vol. 312, Issue 1-2. — P. 55-73.
- [3] Toda S., Komatsu K. Vibrations of circular cylindrical shells with cutouts // Journal of Sound and Vibration. — 1977. — Vol. 52, Issue 4. — P. 497-510.
- [4] Ramamurti V., Pattabiraman J. Free vibrations of circular cylindrical shells // Journal of Sound and Vibration. — 1977. — Vol. 52, Issue 2. — P. 193-200.

Flexure vibration of transversely-isotropic cylindrical shell with circular hole

Mykhailo Sukhorol'sky, Tatyana Shopa

The problem on proper and forced vibrations of the loosely leant cylindrical transversely-isotropic shell with circular hole with different types of boundary conditions on the hole is considered in the paper. Stress-strain state of the shell is described by modified equations of Timoshenko's shells theory. Numerical solution of the problem is found by the indirect method of boundary elements based on the sequential approach to constructing generalized functions and on collocation method. The influence of radius of hole and the Poisson ratio on the natural frequencies of shell.

Поперечные колебания трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки с круговым отверстием

Михаил Сухорольский, Татьяна Шопа

Рассматривается задача о собственных и вынужденных колебаниях цилиндрической шарнирно закрепленной трансверсально-изотропной оболочки с круговым отверстием на контуре которого задаются граничные условия разного типа. Напряженно-деформируемое состояние описывается модифицированными уравнениями теории оболочек Тимошенко. Численное решение этой задачи построено непрямым методом граничных интегральных уравнений, базирующимся на секвенциальном изображении сингулярных решений. Исследуется влияние радиуса отверстия и коэффициента Пуассона на значение собственных колебаний оболочки.

Отримано 12.05.08