УДК 537.84

Об автомодельных свойствах уравнений магнитной гидродинамики при конечной электропроводности

Игорь Селезов

Д. ф.-м. н., профессор, Институт гидромеханики НАН Украины, ул. Желябова, 8/4, Киев, 03680,
e-mail: selezov@uninet.kiev.ua

Рассматриваются возможности построения автомодельных решений уравнений магнитной гидродинамики конечной электропроводности. На этом основании в случае линеаризированных уравнений векторная задача сведена к двум скалярным разрешающим уравнениям.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, конечная электропроводность, автомодельное решение.

Движение электропроводящей среды в магнитном поле характеризуется магнитным числом Рейнольдса $\mathrm{Rm} = \mu l c \sigma$, которое пропорционально электропроводности среды σ (μ — магнитная проницаемость, l — характерная длина, c — характерная скорость). Учет электропроводности усложняет систему уравнений магнитной гидродинамики и, естественно, затрудняет анализ. Поэтому большинство исследований относятся к вырожденному случаю идеальной электропроводности $\mathrm{Rm} \to \infty$.

Волновое движение проводящей сжимаемой жидкости рассматривается в предположении об адиабатическом характере протекающих процессов. Условия, определяющие справедливость такого приближения, рассмотрены в работах [2, 4, 5]. Здесь, следуя Ф. Чену [3] и Б. Б. Кадомцеву [1], лишь отметим, что привлечение адиабатического уравнения состояния для замыкания системы МГД-уравнений справедливо для плазменных сред, когда теплопроводность среды мала и тепловыми потоками можно пренебречь. Такое приближение с большей степенью точности справедливо для волновых движений плазмы поперек магнитного поля и с меньшей — для движений, параллельных ему.

Запишем исходную систему МГД-уравнений в виде [2]

$$\rho\left[\vec{v},_t + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right] = -\frac{1}{\gamma}\vec{\nabla}p + P_H\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)\times\vec{H}\,, \tag{1}$$

$$\vec{H},_t = \mathrm{Rm}^{-1}\nabla^2\vec{H} + \vec{\nabla}\times\left(\vec{v}\times\vec{H}\right), \tag{2}$$

$$\rho,_t + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\rho + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0\,, \quad p = \rho^{\nu}\,. \tag{3}$$

Здесь введены безразмерные переменные по формулам (звездочки в изложении опущены)

$$v^* = v/c_0, \quad \rho^* = \rho/\rho_0, \quad p^* = p/p_0,$$
$$\vec{H}^* = \vec{H}/H_a, \quad \vec{r}^* = \vec{r}/l, \quad t^* = tc_0/l,$$
$$c_0^2 = \gamma p_0/\rho_0, \quad P_H = \mu H_a^2 \Big/ \left(\rho_0 c_0^2\right),$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор в декартовой системе координат, ρ_0, p_0, H_a — характерные величины плотности, давления и напряженности магнитного поля, c_0 — адиабатическая скорость звука, P_H — магнитное давление.

Рассмотрим некоторые общие свойства системы (1)-(3). Прежде всего отметим, что эти уравнения инвариантны относительно преобразований Галилея-Ньютона

$$u_* = u + u_0, \quad v_* = v + v_0, \quad w_* = w + w_0,$$
$$H_* = H, \quad \rho_* = \rho, \quad p_* = p,$$
$$t_* = t + t_0, \quad x_* = x + u_0 t + x_0.$$

Кроме того, с помощью преобразований подобия

$$v = v' \,\mathrm{Rm}^n, \quad p = p' \,\mathrm{Rm}^k, \quad H = H' \,\mathrm{Rm}^m,$$
$$t = t' \,\mathrm{Rm}^s, \quad r = r' \,\mathrm{Rm}^b, \quad \rho = \rho' \,\mathrm{Rm}^a, \tag{4}$$

уравнения (1)-(3) приводятся к виду, не зависящему от Rm. При этом

$$a = -2\frac{b+1}{\gamma-1}, \quad s = 2b+1, \quad n = -b-1, \quad m = -\gamma\frac{b+1}{\gamma-1}, \quad k = -2\gamma\frac{b+1}{\gamma-1},$$

где b — произвольный параметр, $\gamma \neq 1$.

Таким образом, если найдено решение системы (1)-(3) при Rm = 1, то с помощью преобразования (4) из него могут быть получены решения для произвольных Rm.

Если искомые функции в (1)-(3) зависят лишь от одной пространственной координаты (например, от x), исходные соотношения записываются в виде

$$\rho\left(u,_t + uu,_x\right) = -\rho^{\gamma-1}\rho,_x - P_H\left(H_2 H_{2,x} + H_3 H_{3,x}\right),$$
$$\rho\left(v,_t + uv,_x\right) = P_H H_{2,x}\cos\theta,$$
$$\rho\left(w,_t + uw,_x\right) = P_H H_{3,x}\cos\theta,$$
$$H_{2,t} - \mathrm{Rm}^{-1} H_{2,xx} + \left(uH_2 - v\cos\theta\right),_x = 0,$$
$$H_{3,t} - \mathrm{Rm}^{-1} H_{3,xx} + \left(uH_3 - w\cos\theta\right),_x = 0,$$
$$\rho,_t + u\rho,_x + \rho u,_x = 0, \tag{5}$$

где $\theta = \left(\widehat{\vec{i}_1, \vec{H}_0}\right)$.

Если ввести функции $\vec{h} = H_2\vec{i}_2 + H_3\vec{i}_3$, $\vec{V} = v\vec{i}_2 + w\vec{i}_3$ и повернуть систему координат относительно оси Ox, то уравнения (5) несколько упрощаются

$$\begin{aligned} &\rho\left(u,_t + uu,_x\right) = -\rho^{\gamma-1}\rho,_x - P_H hh,_x, \\ &\rho\left(V,_t + uV,_z\right) = P_H h,_x \cos\theta, \\ &h,_t - \mathrm{Rm}^{-1} h,_{xx} + \left(uh - V\cos\theta\right),_x = 0, \\ &\rho,_t + u\rho,_x + \rho u,_x = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Одно из свойств системы (6) заключается в том, что при $\theta \neq \pi/2$ она не инвариантна относительно группы преобразований подобия

$$\rho = A_1\rho', \quad u = A_2 u', \quad h = A_3 h', \quad V = A_4 V', \quad x = A_s x', \quad t = A_6 t' \tag{7}$$

и, следовательно, не имеет автомодельных решений вида $f = t^n F(xt^{-m})$. При $\theta = \pi/2$ уравнения (6) инвариантны относительно однопараметрической группы

$$\begin{aligned} &x = Ax', \quad t = A^2 t', \quad u = A^{-1} u', \quad \rho = A^{2/(1-\gamma)}\rho', \quad h = A^{\gamma/(1-\gamma)} h' \quad \text{при } \gamma \neq 1, \\ &x = x', \quad t = t', \quad u = u', \quad \rho = A^2 \rho', \quad h = Ah' \quad \text{при } \gamma = 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, система (6) при $\theta = \pi/2$ и $\gamma \neq 1$ имеет автомодельные решения вида

$$\rho = t^{\frac{1}{1-\gamma}} R(\xi), \quad u = \frac{1}{\sqrt{t}} U(\xi), \quad h = t^{\frac{\gamma}{2(1-\gamma)}} F(\xi), \quad \xi = x/\sqrt{t}. \tag{9}$$

Кроме того, в случае $\theta = \pi/2$, $\gamma = 1$ существуют еще инвариантные решения вида

$$u = u(x), \quad \rho = e^{2\alpha t} R(x), \quad h = e^{\alpha t} F(x), \tag{10}$$

где α — произвольный параметр. Наконец, при любых γ и θ система уравнений (6) имеет автомодельные решения типа бегущей волны: $\xi = x - ct$, $u = u(\xi)$, $V = V(\varepsilon)$, $\rho = \rho(\xi)$, $h = h(\xi)$.

Переходя к рассмотрению конкретных задач распространения нелинейных волн, прежде всего отметим, что с методологической точки зрения такой анализ должен включать по крайней мере три этапа. На первом необходимо получить и исследовать дисперсионное уравнение для волн бесконечно малой амплитуды (линейное приближение). На втором этапе с помощью асимптотических или других (например, вариационных) методов выводится эволюционное уравнение для некоторой характеристики волнового поля. Следует подчеркнуть, что линейная часть полученного таким образом уравнения должна в точности соответствовать уравнению, выведенному с помощью эвристического подхода из дисперсионного соотношения для линейных волн. На третьем этапе анализируются свойства и решения найденного эволюционного уравнения, что позволяет получить основную, наиболее существенную информацию о закономерностях распространения волн в системе, взаимном влиянии эффектов нелинейности, дисперсии, диссипации и т. д.

Рассмотрим систему линеаризированных уравнений магнитной гидродинамики

$$\vec{v},_t = -\vec{\nabla}\rho + P_H\left(\vec{\nabla}\times\vec{h}\right)\times\vec{H}_0,$$
$$\rho,_t + \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0, \qquad (11)$$
$$\vec{h},_t = \frac{1}{\mathrm{Rm}}\nabla^2\vec{h} + \vec{\nabla}\times\left(\vec{v}\times\vec{H}_0\right).$$

Предположим, что среда отнесена к прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z), а невозмущенное магнитное поле задано в виде (0, 0, H_{0z}). В этом случае все искомые функции оказываются не зависящими от z и, кроме того, справедливы соотношения $\left(\vec{\nabla}\times\vec{h}\right)\times\vec{H}_0 = -H_{0z}\vec{\nabla}h_z, \vec{\nabla}\times\left(\vec{v}\times\vec{H}_0\right) = -\vec{i}_3 H_{0z}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)$. Отсюда следует, что отличной от нуля составляющей возмущенного магнитного поля будет лишь z-компонента, и тогда векторное уравнение для $\vec{h}$ из (11) сводится к одному скалярному относительно $h = h_z$

$$h,_t = \frac{1}{\mathrm{Rm}}\nabla^2 h - \vec{\nabla}\cdot\vec{v}. \qquad (12)$$

Здесь ∇^2 — двумерный оператор Лапласа, $\vec{\nabla}\equiv\left(\partial/\partial x, \partial/\partial y\right)$ — двумерный оператор набла.

Введем потенциал скоростей возмущенного движения жидкости $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$. При этом первое уравнение в (11) интегрируется. С точностью до произвольной функции времени получаем

$$P = -\varphi,_t - P_H h. \qquad (13)$$

В результате исходная связанная система из двух векторных и одного скалярного уравнений (11) приводится к системе двух скалярных уравнений

$$\nabla^2 - \varphi,_{tt} = P_H h,_t,$$
$$\nabla^2 h - \mathrm{Rm}\, h,_t = \mathrm{Rm}\nabla^2\varphi. \qquad (14)$$

При исследовании волн в средах конечной электропроводности удобно воспользоваться свойством автомодельности системы (14) по параметру Rm, которое заключается в том, что с помощью замены $x' = x\mathrm{Rm}$, $h' = h/\mathrm{Rm}$, $P' = P/\mathrm{Rm}$ она приводится к виду, не зависящему от Rm (штрихи опускаются)

$$\nabla^2\varphi - \varphi,_{tt} = P_H h,_t, \quad \nabla^2 h - h,_t = \nabla^2\varphi. \qquad (15)$$

Уравнения (15) описывают возмущенное волновое движение электропроводной жидкости в плоском и осесимметричном случаях, характеризуемых условием $\vec{v}\perp\vec{H}_0$. С точки зрения классификации эта система является гиперболо-параболической и, следовательно, имеет решение, описывающие распространение возмущений с бесконечной скоростью. Частичная параболичность системы (15) связана с пренебрежением в исходной модели токами смещения Максвелла. В терминах теории волн такое пренебрежение оправдано для низких частот колебаний (в случае гармонических процессов) или вдали от фронта волны (для неустановившихся волн).

Литература

[1] *Кадомцев Б. Б.* Коллективные явления в плазме. — Москва: Наука, 1988. — 303 с.
[2] *Селезов И. Т., Селезова Л. В.* Волны в магнитогидроупругих средах. — Киев: Наук. думка, 1975. — 161 с.
[3] *Chen F. F.* Introduction to plasma physics and controlled fusion. Vol. 1: Plasma physics. — Plenum Press, New York and London, 1984. (Русский перевод: *Чен Ф.* Введение в физику плазмы. — Москва: Мир, 1987. — 398 с.)
[4] *Selezov I. T.* Some models of coupled magnetoelastic fields and their application to the investigation of propagation and diffraction of waves // J. Math. Sciences. — 2001. — Vol. 104, № 5. — P. 1490-1500.
[5] *Selezov I. T.* Wave processes in fluids and elastic media // Int. J. Fluid Mechanics Research. — 2003. — Vol. 30, № 2. — P. 219-249.

On self-similarity properties of magnetohydrodynamic equations of finite electroconductivity

Ihor Selezov

The possibilities to construct self-similarity solutions of magnetohydrodynamic equations of finite electroconductivity are considered. On this basis in the case of linearized equations the reduction of the vector problem to two scalar resolving equations is shown.

Про автомодельні властивості рівнянь магнітної гідродинаміки за скінченної електропровідності

Ігор Селезов

Розглядається можливість побудови автомодельних розв'язків рівнянь магнітної гідродинаміки скінченної електропровідності. На цій основі у випадку лінеаризованих рівнянь векторна задача зводиться до двох скалярних розв'язуючих рівнянь.

Отримано 17.06.08