

Моделювання процесу нагрівання водонафтової емульсії надвисокочастотним електромагнетним полем

Вадим Яковенко

к. ф.-м. н., доцент, Академія митної служби України, вул. Дзержинського, 2, Дніпропетровськ, 49000,
e-mail: yakovenko@ua.fm

Запропоновано модель процесу нагріву водонафтової емульсії у каналах різного поперечного перерізу під дією електромагнетної енергії надвисокої частоти з урахуванням конвективного теплоперенесення. Враховано особливості руху емульсії в каналах, пов'язані з її в'язкопластичними властивостями, які відображає модель Шведова-Бінгама. Розроблено метод розв'язування сформульованої задачі, що ґрунтується на відповідних скінченних інтегральних перетвореннях. Наведено числову реалізацію отриманих розв'язків задачі та проведено порівняльний аналіз із відомими результатами. Показано, що запропонована фізико-математична модель може бути використана для дослідження нагріву емульсії у каналах, перерізи яких мають правильну геометричну форму та дозволяють застосувати запропонований у роботі метод.

Ключові слова: водонафтова емульсія, надвисокочастотне нагрівання, теплові процеси, рухома межа розділу фаз.

Вступ. Нагрівання водонафтової емульсії електромагнетним полем надвисокочастотного (НВЧ) діапазону використовують у практиці її розділення на нафту та воду [1, 2]. Важливим при цьому є встановлення оптимальних режимів нагріву, за яких сепарація емульсії у каналах протікання проходить найефективніше [3]. Це дає також можливість використовувати результати моделювання процесів теплообміну матеріалу для розробки модулів автоматичного визначення відсоткового співвідношення компонент сирової нафти. Слід зазначити, що у відомих моделях такого процесу матеріал емульсії розглядають як гомогенний за сталої швидкості руху. При цьому не враховують вплив фізичних характеристик матеріалу та конвективної теплопередачі на процес нагріву. Метою цієї роботи є дослідження нагріву в полі НВЧ водонафтової емульсії у разі її протікання в каналах різного поперечного перерізу з урахуванням в'язкопластичних властивостей і конвективного теплоперенесення.

1. Постановка задачі

Нехай водонафтова емульсія протікає вздовж каналу, який перебуває в електромагнетному полі НВЧ. Приймаємо, що реологічні властивості емульсії добре описує модель Шведова-Бінгама [4]. У такому разі [4] в потоці емульсії можна виділити пружне квазітверде ядро та примежовий шар, властивості матеріалу якого задовільно відображає модель рідини Ньютона. Положення границі розділу «ядро-примежовий шар» (профіль ядра потоку) залежить від температури та змінюється внаслідок нагрівання.

Поле температури в емульсії буде визначати розв'язок задачі теплопровідності [4]

$$c_i \rho_i \left(\frac{\partial t_i}{\partial \tau} + V_i \frac{\partial t_i}{\partial x} \right) = \frac{\lambda_i}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^k \frac{\partial t_i}{\partial r} \right) + q(\tau, r), \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$t_i(0, x, r) = t_n, \quad (2)$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad t_1(\tau, x, \xi(\tau)) = t_2(\tau, x, \xi(\tau)), \quad (3)$$

$$t_i(\tau, 0, r) = t_n, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} \Big|_{r=\xi(\tau)} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial r} \Big|_{r=\xi(\tau)}, \quad (4)$$

$$t_2 = (\tau, x, r_c) = t_n, \quad V_2 = V_1 (r_c - r)^{k+1} / (r_c - \xi)^{k+1}. \quad (5)$$

Тут $\rho_i, c_i, \lambda_i, t_i$ — густина маси, питома теплоємність, коефіцієнт теплопровідності та температура в ядрі потоку ($i = 1$, область $D_1 = \{\tau > 0, 0 < x < \infty, 0 < r < \xi(\tau)\}$) та прилеглої області ($i = 2$, область $D_2 = \{\tau > 0, 0 < x < \infty, \xi(\tau) < r < r_c\}$); $q(\tau, r)$ — густина потужності тепловиділення, зумовленого поглинанням електромагнетної енергії, яку запишемо [3]

$$q(\tau, r) = A e^{-2\alpha r} + B e^{2\alpha r} + C \cos[2\beta(r - \xi(\tau))], \quad (6)$$

$$\text{де } A = \frac{\delta |S_{21}|^2}{|1 + \Gamma_n S_{11} e^{-2z\xi}|^2}, \quad B = A \Gamma_n^2 e^{-4\alpha\xi}, \quad C = 2A \Gamma_n e^{-2\alpha\xi}, \quad z = \alpha + j\beta, \quad j = \sqrt{-1},$$

α — коефіцієнт загасання електромагнетної хвилі; β — фазовий коефіцієнт; $S_{11} = \Gamma$ — коефіцієнт відбиття хвилі від межі розділу повітря з матеріалом; $S_{21} = \sqrt{1 - |\Gamma|^2}$, $\Gamma = (W_1 - W_2) / (W_1 + W_2)$; W_1, W_2 — характеристичний опір відповідно повітря та діелектрика; Γ_n — коефіцієнт відбиття від випромінювача; $\xi(\tau)$ — координата межі розділу ядро-прилегла область; швидкість V_1 визначається виразом [5, 6]

$$V_1(\tau) = V_1(0) + \frac{1}{\rho_0} \int_0^\tau \left[\frac{P(y) - 2^k \tau_0}{\xi(y)} \right] dy, \quad (7)$$

τ_0 — критичне значення зсувного напруження, вище якого руйнується структура ядра потоку; P — тиск у прилеглому шарі; r_c — відстань від осі до стінки каналу; t_n — початкова температура водонафтової емульсії; $V_2 = V_1 (r_c - r)^{k+1} / (r_c - \xi)^{k+1}$ — швидкість руху емульсії у прилеглої області; x — аксіальна координата; r — радіальна координата; $k = 0$ відповідає каналу у вигляді плоскої щілини (плоскопаралельному каналу), а $k = 1$ — циліндричному каналу.

2. Плоскопаралельний канал ($k = 0$)

Для визначення розподілу температури у каналі або в областях D_1 і D_2 застосуємо комп'ютерне моделювання, основою якого є відповідне скінченне інтегральне перетворення [7, 8]

$$\gamma_n^{(1)} = \int_0^{\xi(\tau)} t_1 \cos \left[\frac{\pi(2n+1)}{2\xi(\tau)} r \right] dr.$$

Лише за умови узагальнення моделі можна припустити, що умови (4) є однорідні. Тоді для визначення температури в області D_1 маємо формулу обернення [8]

$$t_1 = \frac{2(x - V_1\tau)}{\xi(\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(1)}(\tau) \cos \left[\frac{\pi(2n+1)}{2\xi(\tau)} r \right], \quad (8)$$

де $x \geq V_1\tau$, $\gamma_n^{(1)}(\tau)$ — коефіцієнти функціонального ряду, які визначаються з розв'язку задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{d\gamma_n^{(1)}}{d\tau} + \left(\frac{\varepsilon_n a_0}{\xi} \right)^2 \gamma_n^{(1)} = G_n^{(1)}(\tau) + \frac{\xi}{2\xi} \sum_{m=0}^{\infty} w_{nm}^{(1)} \gamma_m^{(1)}, \quad (9)$$

$$\gamma_n^{(1)}(0) = \frac{(-1)^n 2\xi t_n}{\pi(2n+1)}, \quad (10)$$

де

$$\varepsilon_n = \frac{\pi(2n+1)}{2}, \quad w_{nm}^{(1)} = \begin{cases} \frac{4(-1)^{n+m+1} \varepsilon_n \varepsilon_m}{\pi^2 (n-m)(n+m-1)}, & \text{якщо } n \neq m, \\ 1, & \text{якщо } n = m, \end{cases}$$

$$G_n^{(1)}(\tau) = \frac{(A+B) \left[2\alpha\xi^2 + (-1)^n \varepsilon_n \xi e^{-2\alpha\xi} \right]}{4\alpha^2 \xi^2 + \varepsilon_n^2} + \frac{C\xi}{2} \left[\frac{\sin(2\beta\xi - \varepsilon_n - 2\beta) + \sin 2\beta}{2\beta\xi - \varepsilon_n} + \frac{\sin(2\beta\xi + \varepsilon_n - 2\beta) + \sin 2\beta}{2\beta\xi + \varepsilon_n} \right], \quad C = 2A\Gamma_n e^{-2\alpha\xi},$$

a_0 — коефіцієнт теплопровідності.

Розподіл температур, який задовольняє рівняння (1) і крайові умови (3) та (4) в області D_2 , має вигляд

$$t_2 = \frac{t_n(r - \xi)}{r_c - \xi} + \frac{2(x - V_2\tau)}{r_c - \xi(\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(2)}(\tau) \sin \frac{n\pi(r - \xi)}{r_c - \xi(\tau)}, \quad (11)$$

де $\gamma_n^{(2)}(\tau)$ — розв'язок такої задачі Коші

$$\frac{d\gamma_n^{(2)}}{d\tau} + \left(\frac{n\pi a_0}{r_c - \xi} \right)^2 \gamma_n^{(2)} = G_n^{(2)}(\tau) + \frac{\xi}{2(r_c - \xi)} \sum_{m=0}^{\infty} w_{nm}^{(2)} \gamma_m^{(2)}, \quad (12)$$

$$\gamma_n^{(2)}(0) = 0, \quad (13)$$

$$w_{nm}^{(2)} = \begin{cases} \frac{4(-1)^{n+m} mn}{m^2 - n^2}, & \text{якщо } n \neq m, \\ -1, & \text{якщо } n = m, \end{cases}$$

$$G_n^{(2)}(\tau) = \frac{(r_c - \xi)n\pi [1 - (-1)^n]}{4\alpha^2 (r_c - \xi)^2 + n^2\pi^2} \left(Ae^{-2\alpha r_c} + Be^{2\alpha r_c} \right) - \frac{C(r_c - \xi)}{2} \times \\ \times \left\{ \frac{\cos[2\beta(r_c - \xi)] + n\pi - 1}{2\beta(r_c - \xi) + n\pi} + \frac{\cos[2\beta(r_c - \xi)] - n\pi - 1}{2\beta(r_c - \xi) - n\pi} \right\}.$$

Для визначення профілю ядра потоку прийемо, що поблизу межі між областями D_1 і D_2 маємо умову рівності швидкостей у ядрі та примежовому шарі потоку, тобто $V_1/V_2 = 1$. Тоді запишемо крайову умову (5) у вигляді такого алгебраїчного рівняння відносно функції $r = \xi(\tau)$

$$\frac{\xi^2}{(r_c - \xi)^2} = \frac{\lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \gamma_n^{(1)}}{2\lambda_2 \sum_{n=1}^{\infty} n \gamma_n^{(2)}}. \quad (14)$$

Для розв'язування задач Коші відносно функцій $\gamma_n^{(i)}(\tau)$ ($i=1,2$) та рівняння (14) відносно $\xi(\tau)$ можна застосувати чисельний метод, наприклад метод Рунге-Кутта.

3. Циліндричний канал ($k = 1$)

Діючи аналогічним чином, як і у випадку плоско-паралельного каналу, розподіл температур в області D_1 запишемо у наступному вигляді

$$t_1 = \frac{2(x - V_1\tau)}{\xi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\gamma}_n^{(1)}(\tau) \frac{J_0(r\eta_n/\xi)}{J_1^2(\eta_n)}, \quad (15)$$

де $x \geq V_1\tau$ — умова початку формування ядра потоку, η_n — додатні корені характеристичного рівняння $J_0(\eta_n) = 0$; J_i ($i = 0, 1$) — функції Бесселя першого роду нульового та першого порядків, $\tilde{\gamma}_n^{(1)}(\tau) = \int_0^{\xi(\tau)} t_1 J_0(r\eta_n/\xi) dr$.

Коефіцієнти $\tilde{\gamma}_n^{(1)}(\tau)$ визначаються з задачі Коші для такої системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\tilde{\gamma}_n^{(1)}}{d\tau} + \left(\frac{\eta_n}{\xi}\right)^2 \tilde{\gamma}_n^{(1)} = \tilde{G}_n^{(1)}(\tau) + \frac{\dot{\xi}}{\xi} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{w}_{nm}^{(1)} \tilde{\gamma}_m^{(1)}, \quad (16)$$

$$\tilde{\gamma}_n^{(1)}(0) = \frac{t_n \xi^2(0) J_1(\eta_n)}{\eta_n}, \quad (17)$$

$$\tilde{w}_{nm}^{(1)} = \begin{cases} \frac{2\mu_n \mu_m J_1(\mu_n)}{(\mu_m^2 - \mu_n^2) J_0(\mu_m)}, & \text{якщо } n \neq m, \\ 1, & \text{якщо } n = m, \end{cases} \quad \tilde{G}_n^{(1)}(\tau) = \int_0^{\xi(\tau)} q(r, \tau) r J_0(\mu_n r / \xi) dr.$$

Температурне поле у примезовому шарі визначаємо співвідношенням

$$t_2 = \frac{t_n(r - \xi)}{r_c - \xi} + \frac{\pi^2(x - V_2\tau)}{2\xi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\gamma}_n^{(2)} J_0(\mu_n) \mu_n^2}{J_0^2(\mu_n) - J_0^2(\mu_n/\xi)} u_1(\mu_n r / \xi), \quad (18)$$

де $u_1(\mu_n r / \xi) = J_0(\mu_n r / \xi) Y_0(\mu_n / \xi) - J_0(\mu_n / \xi) Y_0(\mu_n r / \xi)$ — власні функції відповідної задачі Штурма-Ліувілля; μ_n — додатні корені характеристичного рівняння $J_0(\mu) Y_0(\mu/\xi) - J_0(\mu/\xi) Y_0(\mu) = 0$; Y_0 — функція Бесселя другого роду нульового порядку.

Для визначення коефіцієнтів $\tilde{\gamma}_n^{(2)}$ ряду Фур'є-Бесселя маємо таку задачу

$$\frac{d\tilde{\gamma}_n^{(2)}}{d\tau} + \left(\frac{\mu_n}{\xi}\right)^2 \tilde{\gamma}_n^{(2)} = \frac{\dot{\xi}}{\xi} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{w}_{nm}^{(2)} \tilde{\gamma}_m^{(2)} + \tilde{G}_n^{(2)}(\tau), \quad (19)$$

$$\tilde{\gamma}_n^{(2)}(0) = 0, \quad (20)$$

$$\tilde{w}_{nm}^{(2)} = \begin{cases} \frac{\pi^2 \mu_m^2 \mu_n J_0^2(\mu_m)}{2\xi^3 [J_0^2(\mu_m) - J_0^2(\mu_m/\xi)]} \int_{\xi}^1 r^2 u_1\left(\mu_n \frac{r}{\xi}\right) u_1\left(\mu_m \frac{r}{\xi}\right) dr, & \text{якщо } n \neq m, \\ 1, & \text{якщо } n = m, \end{cases}$$

$$\tilde{G}_n^{(2)}(\tau) = \int_{\xi}^{r_c} r u_1\left(\mu_n \frac{r}{\xi}\right) q(r, \tau) dr.$$

Профіль ядра потоку з урахуванням виразів (5), (15), (18) визначаємо наступним співвідношенням

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\gamma}_n^{(1)} \eta_n}{J_1(\eta_n)} = \frac{\pi^2 \lambda_2}{4\lambda_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\gamma}_n^{(2)} J_0(\mu_n) \mu_n^3 u_2(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) - J_0^2(\mu_n/\xi)}. \quad (21)$$

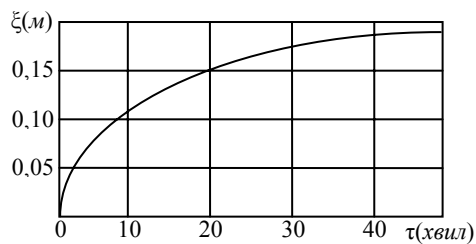
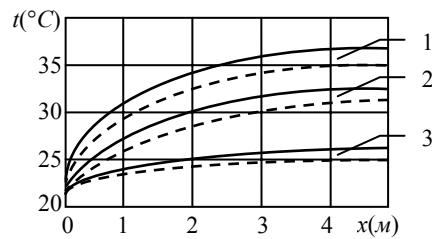


Рис. 1. Залежність профілю ядра потоку від часу

Рис. 2. Розподіл температури у потоці ВНЕ для $k = 0$; $r = 0,2$; $0,15$; 3 криві 1-3 відповідно; штрихова лінія відповідає даним роботи [3]

Враховуючи, що розподіли температур в областях D_1 і D_2 описують рівномірно збіжні у цих областях функціональні ряди, то обмежимося чотирма першими членами ряду з похибкою 10^{-3} .

4. Числова реалізація

Числова реалізація систем рівнянь відносно коефіцієнтів функціональних рядів спільно з рівняннями на рухомій межі областей D_1 і D_2 (9), (10), (12), (13), (14) за умови $k = 0$ і (16), (17), (19), (20), (21) за умови $k = 1$ не викликає принципових труднощів, наприклад, у системі MatLab. На рис. 1, 2 наведено графіки, які відповідають закону зміни профілю ядра потоку та розподілу температури відносно аксіальної координати для плоско-паралельного каналу ($k = 0$), $r_c = 0,25$ м та початкових даних роботи [3, с. 77]. Це дозволяє порівняти результати роботи [3] із частковим випадком наведеної у даній роботі моделі. Бачимо, що внаслідок урахування властивостей емульсії, рухомої межі розділу «ядро-примежовий шар» і потужності джерела тепла матеріал прогрівається інтенсивніше, ніж у випадку моделі [3]. Слід зазначити, що температура матеріалу зменшується зі зростанням глибини (рис. 2) — це є наслідок згасання електромагнетної хвилі.

Висновки. Запропонована у роботі модель нестационарного нагріву в областях із рухомою межею є узагальненням відповідної моделі [3] для області зі сталою межею. Визначені поля температур у ядрі потоку та примежовому шарі, а також закон руху межі розділу «ядро-примежовий шар». Наведена у роботі модель процесу нагріву ВНЕ у каналах під дією НВЧ енергії надає можливість забезпечити рівномірний прогрів матеріалу на певній глибині об'єму ВНЕ шляхом вибору швидкості руху матеріалу та потужності джерела НВЧ енергії.

Зазначимо, що запропоновану математичну модель можна також ефективно застосовувати для тіл, у яких переріз каналу відмінний від розглянутих.

Література

- [1] *Joo-Hee Hong, Byoung-Sik Kim, Dok-Chan Kim. Demulsification of Oil-Water Emulsions by Microwave Irradiation // Korean Chem. Eng. Res. — December, 2004. — Vol. 42, № 6. — P. 662-668.*

- [2] Математическое моделирование микроволновой сепарации водонефтяной эмульсии / Анфиногентов В. И., Галимов М. Р., Морозов Г. А. и др. // Математические методы в технике и технологиях. — ММТТ18. Сб. трудов межд. науч. конф. — Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2005. — Т. 3. — С. 159-162.
- [3] Анфиногентов В. И. Математическое моделирование СВЧ нагрева диэлектриков. — Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2006. — 137 с.
- [4] Шульман З. П. Конвективный теплоперенос реологически сложных жидкостей. — М.: Энергия, 1975. — 352 с.
- [5] Сафрончик А. И. Неустановившиеся течения вязкопластичного материала между параллельными стенками // Прикладная математика и механика. — 1959. — Т. 23, вып. 5. — С. 71-76.
- [6] Сафрончик А. И. Неустановившиеся течения вязкопластичного материала в круглой трубе // Прикладная математика и механика. — 1960. — Т. 24, вып. 1. — С. 53-59.
- [7] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твёрдых тел. — М: Наука, 1964. — 487 с.
- [8] Коряшкينا Л. С., Яковенко В. А. О решении одной задачи теплопереноса с фазовым превращением // Зб. наук. пр. Питання прикладної математики і математичного моделювання. — Дніпропетровськ: ДНУ, 2003. — С. 100-113.

Modeling of the heating process of water-oil emulsion by the super-high frequency electromagnetic field

Vadym Yakovenko

The model of heating of the water-oil emulsion in channels with different traversal cross-sections under effect of electromagnetic ultrahigh-frequency energy is given. Physical peculiarities of the emulsion motion related with its viscous and plastic properties, represented by the mathematical model of Shvedov-Bingam are taken into account. The method of solution of the problem of non-steady convective heat exchange which is grounded on corresponding finite integrated transformations is developed. Numerical realization of the obtained problem solutions is given and the comparative analysis with known effects is done. It is shown, that the investigated physical and mathematical model can be applied to the cases of heat exchange in channels which cross-section differs from the investigated ones.

Моделирование процесса нагрева водонефтяной эмульсии сверхвысокочастотным электромагнитным полем

Вадим Яковенко

Приведена модель процесса теплообмена водонефтяной эмульсии в каналах разного поперечного сечения под действием энергии сверхвысокой частоты. С учетом физических характеристик эмульсии в работе построена физико-математическая модель на основании вязкопластического материала (модель Шведова-Бингама). Разработан метод решения задачи нестационарного конвективного теплообмена, базирующийся на соответствующих конечных интегральных преобразованиях. Приведена численная реализация полученных решений задачи и проведен сравнительный анализ с известными результатами. Показано, что предложенная физико-математическая модель может быть применена для исследования теплообмена в каналах, сечения которых имеют правильную геометрическую форму и допускают применение разработанного метода.

Отримано 20.06.07