УДК 621.64.029

Моделювання газотранспортних мереж з урахуванням змінності параметрів стану газу та рельєфу траси трубопроводів

Ярослав П'янило[1], Назар Притула[2], Галина П'янило[3]

[1] д. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: prom@cmm.lviv.ua
[2] Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: prom@cmm.lviv.ua
[3] Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: prom@cmm.lviv.ua

Розглянуто особливості побудови математичних моделей газотранспортних мереж з урахуванням рельєфу траси, зміни температури газу вздовж неї, а також залежності характеристик газу від тиску та температури. Показано, що застосування методу Рунге-Кутта до розв'язування відповідних нелінійних диференціальних рівнянь із розподіленими параметрами дозволяє побудувати ефективну розрахункову схему визначення параметрів руху газу в транспортних мережах. Встановлено добре узгодження отриманих теоретичних результатів з експериментальними, одержаними на реальних трубопроводах. Показано, що побудована розрахункова модель може бути ефективно використана для вирішення практичних завдань газотранспортних систем.

Ключові слова: математичні моделі фізичних процесів, методи розв'язування диференціальних рівнянь, обчислювальний експеримент.

Вступ. При побудові математичної моделі функціонування газової мережі вважають, що мережа включає велику кількість споживачів, компресорних станцій, (багато з яких є і споживачами), лінійних ділянок (трубопроводів) і запірної арматури, які пов'язані між собою. Мережа характеризується запасом газу, витратою газу та спадом тиску, які підпорядковані відповідним фізичним законам. Одним з основних елементів газових мереж є лінійні трубопроводи. Для розрахунку параметрів процесу руху газу в трубопроводі у літературі пропонують різні математичні моделі, які за певних умов пов'язують геометричні параметри трубопроводів і параметри процесу руху газу [1, 2]. У рамках існуючих моделей не завжди вдається оцінити достовірність обчислених параметрів, бо важко розмежувати фактори впливу на характер руху газу. До таких факторів слід віднести: рельєф траси трубопроводу; місцеві опори (зварні стики, повороти, відгалуження тощо); інші чинники — нехтування певними складниками чи параметрами математичної моделі, зокрема силою Коріоліса, усереднення параметрів газу (температури, коефіцієнта стисливості, густини).

У диспетчерських розрахунках параметрів руху газу використовують, в основному, квадратичну залежність тиску від об'ємної або масової витрати газу. При цьому вважають постійними усереднені значення температури, коефіцієнта стисливості тощо. Однак ці параметри змінюються вздовж труби та можуть мати значний вплив на розподіл тиску газу вздовж трубопроводу. Аналіз цього впливу в літературі проведений недостатньо повно. У зв'язку з цим виникла необхідність отримати формули для обчислення не тільки вихідного тиску, але й розподілу тиску вздовж труби з урахуванням інерційності потоку газу та залежності гідродинамічних параметрів від тиску.

На даний час існує незначна кількість робіт, присвячених комплексному аналізові математичних моделей руху газу як у стаціонарному, так і в нестаціонарному випадках, і актуальним є питання розробки обґрунтованих формул для проведення оперативних розрахунків [3-8].

1. Постановка задачі та схема розв'язування

У стаціонарному випадку для опису ізотермічного руху газу в горизонтальних трубопроводах виходять із наступного диференціального рівняння [1, 2]

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda \rho \upsilon^2}{2D} = 0 \,. \tag{1}$$

Тут $p = p(x)$ — розподіл тиску вздовж трубопроводу; υ, ρ — швидкість і густина газу; λ — коефіцієнт гідравлічного опору; D — внутрішній діаметр трубопроводу; x — біжуча координата $x \in [0, L]$, де L — довжина трубопроводу.

Розв'язок рівняння (1), отриманий з урахуванням рівняння стану газу $p = \rho\chi RT$ та масової витрати $M = \rho\upsilon S = \rho Q = \rho_0 Q_0$, має вигляд [1, 2]

$$p(x) = \sqrt{p_0^2 - \frac{\lambda\ \chi RT}{D}\left(\frac{M}{S}\right)^2 x} \,, \tag{2}$$

де p_0 — значення тиску на початку газопроводу; χ — коефіцієнт стисливості газу; R — газова стала; T — температура газу; ρ_0 — густина газу в стандартних умовах (p_A = 0,1033 МПа, T_A = 293 K); Q, Q_0 — об'ємні витрати газу в робочих і стандартних умовах; $S = \pi D^2 / 4$ — площа поперечного перерізу трубопроводу.

Така модель руху газу враховує тільки силу тертя та дозволяє порівняно просто розраховувати газодинамічні параметри складних газотранспортних мереж у стаціонарному випадку. Як відомо, трубопроводи характеризуються великою протяжністю (десятки кілометрів) і різними діаметрами. При транспортуванні газу під великим тиском на параметри руху газу суттєво впливають рельєф траси, розподіл температури вздовж трубопроводу тощо. Ці чинники необхідно врахувати для точнішого розрахунку параметрів руху газу. Тоді диференціальне рівняння, яке описує стаціонарний рух газу вздовж трубопроводу, набуває вигляду [1, 2, 5]

$$\frac{dp}{\rho} + \alpha d\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right) + \lambda \frac{\upsilon^2}{2}\frac{dx}{D} + gdh = 0\,, \tag{3}$$

де α — коефіцієнт Коріоліса (для ламінарного потоку $\alpha = 2$, а для турбулентного — $\alpha = 1{,}1$); $h = h(x)$ — крива, що описує рельєф траси газопроводу.

Якщо $\chi = const$ та $T = const,$ то розв'язок рівняння (3) подається формулою [3, 4]

$$\frac{1}{a_2}\left(\frac{a_1}{2} + a_0 a_2\right)\ln\frac{a_1 + a_2 p_0^2}{a_1 + a_2 p^2} + 2a_0 \ln\frac{p}{p_0} = a_1 x\,, \tag{4}$$

де

$$a_0 = \frac{\alpha}{2}\chi RT\left(\frac{M}{S}\right)^2, \quad a_1 = \frac{\lambda}{2D}\chi RT\left(\frac{M}{S}\right)^2, \quad a_2 = \frac{g\Delta h}{\chi RTL}\,,$$

а Δh — перепад висот між початком і кінцем трубопроводу. Для визначення коефіцієнта стисливості χ у літературі наведені розрахункові формули, чинні у різних діапазонах зміни тиску та температури. Для трубопроводів високого тиску достатньо добрі результати дає формула [1, 7, 8]

$$\chi = \frac{1}{1 + fp}, \tag{5}$$

де тиск p вимірюється в атмосферах, а $f = [24 - 0{,}21(T - 273{,}15)]10^{-4}$ (1/атм). Відзначимо, що температура газу при русі в трубопроводі, довжина якого сягає сотні кілометрів, може зменшитися на 20 градусів, а тиск — на 20 атмосфер. Це приводить до суттєвої зміни коефіцієнта стисливості вздовж трубопроводу. Зазначимо також, що у формулі (4) враховано перепад висот, а не рельєф траси. Прості розрахунки показують, що врахування рельєфу траси трубопроводу та перепаду висот між його кінцем і початком у вихідному рівнянні приводить до відмінних між собою знайдених значень параметрів руху газу. Очевидно, що врахування згаданих чинників уточнить модель процесу руху газу в трубопроводі.

Для розрахунку розподілу температури вздовж трубопроводу використаємо формулу [7, 8]

$$T(x) = T_{01} + T_{02}e^{-ax}\,,$$

Тут $T_{01} = T_{гр} - T_{00}$, $T_{02} = T_0 - T_{гр} + T_{00}$,

$$T_{00} = \frac{1}{aL}\left[\Delta p\left(D_i - \frac{1}{C_p \rho_0}\right) + \frac{g\Delta h}{C_p}\right], \quad \Delta p = p_0 - p_L\,, \quad a = \frac{k\pi D}{C_p M}\,,$$

$T_{гр}$ — температура ґрунту, T_0 — температура газу на вході в трубопровід, C_p — теплоємність газу при сталому тиску, p_L — значення тиску в кінці трубопроводу, D_i — коефіцієнт Джоуля-Томпсона.

У разі врахування залежностей коефіцієнта стискуваності від температури та тиску, а також зміни температури вздовж довжини трубопроводу, розв'язати рівняння (3) у квадратурах складно. Тому необхідно використовувати наближені або числові методи. У праці [9] показано, що під час апробації числових методів добре зарекомендував себе метод Рунге-Кутта.

Рівняння (3) подамо у вигляді

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\eta_3 p^2 + \eta_2 (\chi T)^2}{p^2 + \eta_1 \chi T} \frac{p}{\chi T}. \tag{6}$$

Тут $\eta_1 = -0{,}5\alpha R(M/S)^2$, $\eta_2 = 0{,}5\lambda R(M/S)^2/D$, $\eta_3 = gh(x)/RL$. Рівняння (6) прийняте за базове для побудови математичної моделі газотранспортної мережі.

Відомо, що модель газотранспортної мережі, в яку входить I трубопроводів, будується на основі другого закону Кірхгофа, який у математичному плані зводиться до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно об'ємної витрати. Така система рівнянь будується достатньо просто, якщо рух газу в трубопроводі описується рівнянням (1), розв'язок якого на i-му трубопроводі $i = \overline{1,I}$, в загальному можна записати так [1, 6, 10]

$$p_i^2(x) = p_{0i}^2 - a_i q_i |q_i|, \tag{7}$$

де q_i — об'ємна витрата газу, p_{0i} — вхідний тиск, а $p_i(x)$ — актуальне значення тиску в точці x i-го трубопроводу, $a_i = 0{,}5\lambda_i \chi_i R_i T_i (\rho_0 / S_i)^2 / D_i$.

Відзначимо, що якщо відомі напрямки потоку газу, то рівняння (7) є квадратним відносно q_i. Якщо ж за основу прийняти рівняння (3), то неможливо побудувати аналог співвідношення (7). Тоді поряд із невідомою об'ємною витратою невідомі є також значення вихідних тисків.

Оскільки отримана система рівнянь є нелінійною, то для її розв'язування застосуємо числові методи. Ефективність використання традиційних ітераційних процедур значною мірою залежить від початкового наближення та не гарантує збіжності процесу обчислень. У зв'язку з цим для знаходження потокорозподілу при розрахунку параметрів газотранспортної мережі пропонуємо реалізувати наступну схему, сформульовану для довільної нелінійної системи рівнянь із двома невідомими

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0. \tag{8}$$

Із певних міркувань (наприклад, аналізу фізичного процесу) у першому рівнянні задаємо початкове значення змінної y_0 і розв'язуємо рівняння $f_1(x, y_0) = 0$ відносно невідомої x. Отримане значення кореня x_0 першого рівняння підставляємо в друге та розв'язуємо рівняння $f_2(x_0, y) = 0$ відносно невідомої змінної y. Розв'язок цього рівняння y_1 є початковим для наступної ітерації. Ітераційний процес закінчуємо тоді, коли досягнемо заданої точності результату. При цьому критеріями виходу можуть бути

$$\max\left\{|x_i - x_{i-1}|, |y_j - y_{j-1}|\right\} \le \varepsilon \quad \text{або} \quad |x_i - x_{i-1}| + |y_j - y_{j-1}| \le \varepsilon,$$

чи деякий інший, залежно від умов вихідної задачі. Тут ε — задана точність обчислення коренів системи.

2. Збіжність ітераційної процедури

Нехай f_1^{-1} функція, обернена до f_1 за змінною x. Тоді

$$x_0 = f_1^{-1}\left(y_0\right).$$

Аналогічно з другого рівняння системи (8) маємо

$$y_1 = f_2^{-1}\left(x_0\right) = f_2^{-1}\left(f_1^{-1}\left(y_0\right)\right).$$

Таким чином можна записати, що

$$y_j = f_2^{-1}\left(f_1^{-1}\left(y_{j-1}\right)\right),$$

звідки

$$y_{j+1} - y_j = f_2^{-1}\left(f_1^{-1}\left(y_j\right)\right) - f_2^{-1}\left(f_1^{-1}\left(y_{j-1}\right)\right).$$

Якщо складна функція $f_2^{-1}\left(f_1^{-1}\left(y\right)\right)$ задовольняє умові Ліпшіца зі сталою $M_y < 1$, то з останньої нерівності отримаємо, що

$$\left|y_{j+1} - y_j\right| = \left|f_2^{-1}\left(f_1^{-1}\left(y_j\right)\right) - f_2^{-1}\left(f_1^{-1}\left(y_{j-1}\right)\right)\right| \le M_y \left|y_j - y_{j-1}\right|.$$

Продовжуючи цей процес далі, одержимо

$$\left|y_{j+1} - y_j\right| \le M_y^j \left|y_1 - y_0\right|.$$

Оскільки за умовою стала Ліпшіца менша за одиницю, то з останньої нерівності випливає збіжність ітераційної процедури за змінною y. Аналогічним чином для змінної x отримаємо

$$x_1 = f_1^{-1}\left(y_1\right) = f_1^{-1}\left(f_2^{-1}\left(x_0\right)\right)$$

або в загальному випадку

$$x_i = f_1^{-1}\left(y_i\right) = f_1^{-1}\left(f_2^{-1}\left(x_{i-1}\right)\right).$$

Якщо складна функція $f_1^{-1}\left(f_2^{-1}\left(x\right)\right)$ задовольняє умові Ліпшіца зі сталою $M_x < 1$, то $\left|x_{i+1} - x_i\right| \le M_x^i \left|x_1 - x_0\right|$, що доводить збіжність ітераційного процесу за змінною x.

Аналогічні міркування відносно збіжності можна привести і для систем вищого порядку.

3. Зауваження до розрахунку газотранспортної мережі

При побудові моделі газотранспортної мережі в стаціонарному випадку використовують, як правило, квадратичну залежність тиску від об’ємної витрати. Тому графіками функцій $f_n(x, y)$ за кожною змінною є параболи. Обернені функції, починаючи з деякого значення аргументу, лежать нижче бісектриси першого та третього квадрантів і їх похідна є меншою від одиниці. Своєю чергою, функція задовольняє умові Ліпшіца в точці, якщо вона має похідну в цій точці. З порівняння розкладу функції в ряд Тейлора в околі даної точки й означення сталої Ліпшіца випливає, що остання є близькою до значення похідної. Оскільки похідна поданої вище складної функції дорівнює добутку похідних окремих обернених функцій, то можна вважати, що починаючи з деяких значень об'ємних витрат постійні Ліпшіца будуть менші від одиниці. Очевидно, що може реалізуватися також варіант, коли при певних початкових значеннях парабола не буде перетинати осі аргументів. Фізично це означає, що за початкову об'ємну витрату вибрано таке її значення, яке не узгоджується з законом руху газу в трубопроводах мережі.

4. Обчислювальний експеримент

В основу побудови алгоритму розрахунку газотранспортних мереж за стаціонарного ізотермічного режиму руху газу закладено другий закон Кірхгофа, згідно якого сумарний спад тиску вздовж замкнутого контуру дорівнює нулю.

Як свідчать числові експерименти, пропонована процедура розв'язування нелінійної системи алгебраїчних рівнянь буде збіжна, коли об'ємні витрати у трубопроводах не перевищують їх пропускної здатності при заданих вхідних і вихідних тисках. Оскільки ці тиски, геометричні та гідродинамічні параметри трубопроводів відомі, то можна оцінити межі пропускної здатності, а тим самим — і межі задання початкових наближень. Зауважимо, що значення початкових потоків можуть бути як додатні, так і від'ємні.

Отримані результати апробовані з використанням характеристик газопроводу «Прогрес» від компресорної станції у населеному пункті Богородчани до пункту заміру газу у м. Ужгород. Висотні відмітки ($h(x)$ — у метрах) пролягання газопроводу над рівнем моря показані на рис. 1, де віддаль x вимірюється в кілометрах.

У табл. 1 приведені значення об'ємної витрати Q (у млн. м^3 за добу), значення тиску на вході трубопроводу (p_0) і значення вихідних тисків, розрахованих на основі формул (2) — p_1 і (6) — $p_{1,p}$. Значення тисків подано в атмосферах

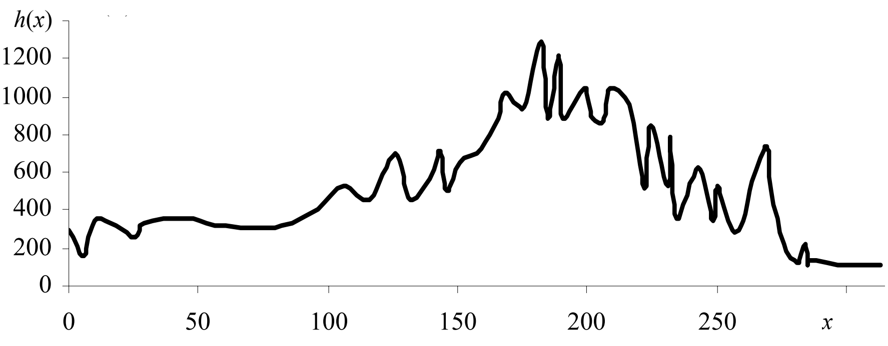

Рис. 1

Таблиця 1

Q	p_0	p_l	$P_{l,p}$
60	58,4	46,5	46,0
60	65,0	54,2	53,7
70	58,4	42,2	41,5
70	65,0	50,5	49,9
80	58,4	36,5	35,4
80	65,0	45,9	45,1

На рис. 2 показано частину газотранспортної мережі, в яку входить ділянка газопроводу «Прогрес» від компресорної станції Богородчани до пункту заміру газу у м. Ужгород. Товстішими лініями виділено ділянки газопроводів, які прокладені по рельєфу зі значними перепадами висот.

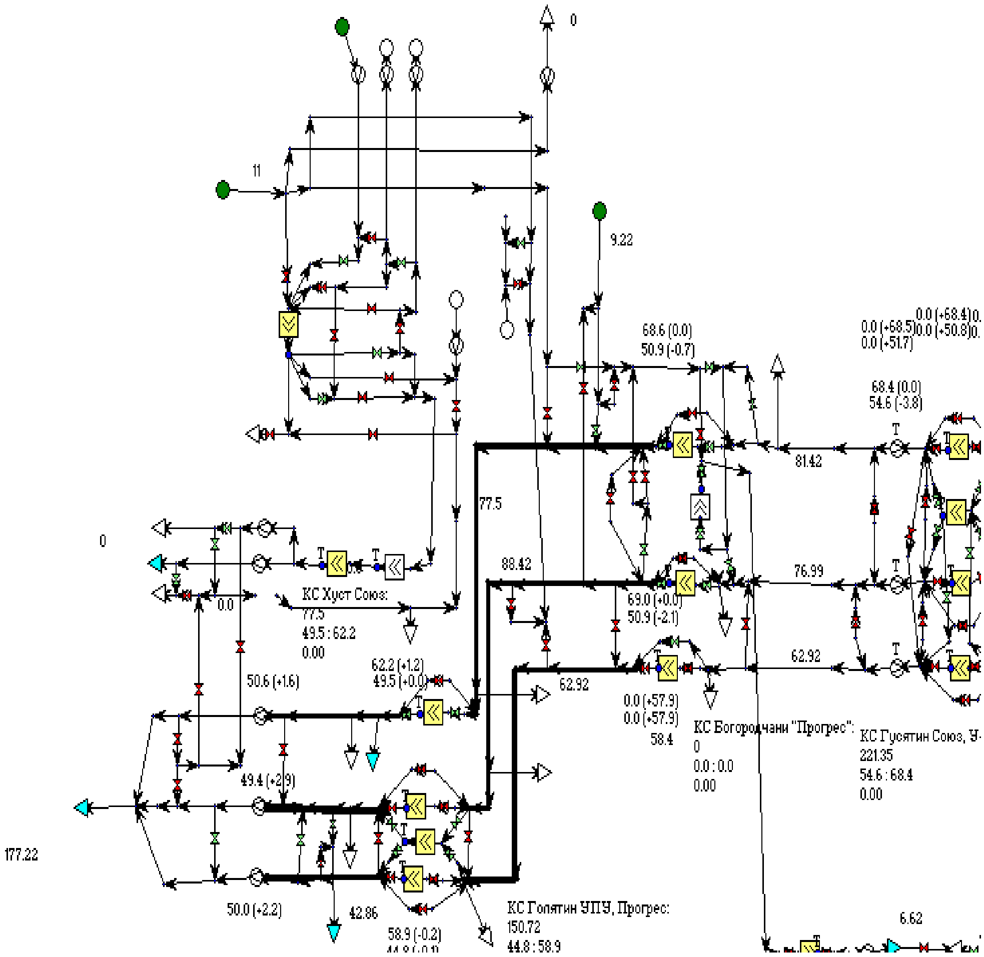

Рис. 2

Висновки. Різниця між вихідним тиском, обчисленим за «інженерною» формулою (2), та тиском, визначеним у результаті розв'язування рівняння (6), може досягати 1 атм. В об'ємній витраті це відповідає сотням тисяч кубічних метрів газу. Під час розрахунків параметрів газотранспортних мереж внаслідок великої кількості трубопроводів і використання наближених методів така різниця може призвести до суттєвих неточностей.

Очевидно, що наслідком урахування в модельному описі рельєфу траси є збільшення «машинного часу». Розрахунок згаданої частини газотранспортної мережі (див. рис. 2) з використанням методу Рунге-Кутта займає до десяти секунд часу. Як було відзначено вище, для розрахунку параметрів газотранспортних мереж використовують ітераційні процедури. Тому, для зменшення часу обчислень доцільно для першого наближення користуватися «інженерною» формулою, а на останньому етапі застосовувати метод Рунге-Кутта.

Запропонований тут підхід до розрахунку параметрів газотранспортних мереж пройшов успішну апробацію в ДК «Укртрансгаз».

Література

[1] *Александров А. В., Яковлев Е. И.* Проектирование и эксплуатация систем дальнего транспорта газа. — М.: Недра, 1974. — 432 с.

[2] Трубопроводный транспорт газа / *Бобровский С. А., Щербаков С. Г., Яковлев Е. И.* и др. — М.: Наука, 1976. — 495 с.

[3] *Михалевич О., П'янило Я., Притула М.* Розрахунок параметрів об'єктів регулювання газопотоком // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. — Львів: 2003. — № 481. — С. 136-142.

[4] Вплив зміни параметрів газу на розподіл тиску в горизонтальних трубопроводах / *Михалевич О., Тимків Д., П'янило Я.* та ін. // Науковий вісник Івано-Франківського національного технічного університету. Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. — 2003. — № 4(9). — С. 30-36.

[5] Аналіз впливу гідравлічних параметрів на процес течіння газу в лінійних трубопроводах / *Михалевич О., П'янило Я., Притула М.* та ін. // Науковий вісник Івано-Франківського національного технічного університету. — 2004. — № 1(7). — С. 78-85.

[6] *П'янило Я., Притула М., Павленко В.* Аналіз моделей стаціонарного руху газу в трубопроводах // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. — Львів: 2003. — № 496. — С. 69-74.

[7] Розрахунок режимних параметрів роботи газотранспортних систем / *Химко М. П., Михалевич О. Т., Фролов В. А.* та ін. // Інформаційний огляд. ДК «Укртрансгаз». — 2004. — № 5(29). — С. 2-5.

[8] Вплив сил тертя на розподіл температури газових потоків та склад газу / *Химко М. Г., Фролов В. А., Гладун С. В.* та ін. // Нафтова і газова промисловість. — 2005. — № 5. — С. 56-58.

[9] *Кушнір Р., П'янило Я., П'янило А.* Особливості застосування числового методу скінченних різниць при моделюванні фізичних процесів // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2005. — Вип. 2. — С. 58-69.

[10] *Павленко В., П'янило Я., Притула М.* Алгоритм гідравлічного розрахунку мереж // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. — Львів: 2003. — № 496. — С. 172-177.

[11] Алгоритм термогідравлічних розрахунків газових мереж / *П'янило Я. Д., Притула М. Г., Павленко В. А.* та ін. // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. — 2004. — № 521. — С. 196-200.

[12] *П'янило Я., Притула М.* Математичні моделі процесів енергомасопереносу в газовій динаміці. Задачі та аналіз методів їх розв'язування // International workshop on free boundary flows and related problems of analysis. — Ukraine, Kiev: 2005. — P. 58-59.

Modeling of gas-transport systems with account of variation of gas state parameters and relief of gas pipeline rout

Yaroslav P'yanylo, Nazar Prytula, Galyna P'yanylo

The features of construction of mathematical models of gas-transport systems with account of the gas-transport rout relief, temperature variation along it, and also dependence of gas characteristics on pressure and temperature are considered. It is shown, that application of the Runge-Kutt method in the solution of corresponding differential equations with the distributed parameters allows us to construct the effective design model of evaluation of the parameters of gas movement in gas-transport systems. The received theoretical results agree well with experimental data measured on real pipelines. It is shown, that the constructed design model can be effectively used for the solution of practical problems of gas-transport systems.

Моделирование газотранспортных систем с учетом изменяемости параметров состояния газа и рельефа трассы трубопроводов

Ярослав Пяныло, Назар Притула, Галина Пяныло

Рассмотрены особенности построения математических моделей газотранспортных систем с учетом рельефа трассы, изменяемости температуры вдоль нее, а также зависимости характеристик газа от давления и температуры. Показано, что применение метода Рунге-Кутта к решению соответствующих дифференциальных уравнений с распределенными параметрами позволяет построить эффективную расчетную схему определения параметров движения газа в газотранспортных системах. Отмечено хорошее согласование полученных теоретических результатов с экспериментальными, измеренными на реальных трубопроводах. Показано, что построенная расчетная модель может быть эффективно использована для решения практических задач газотранспортных систем.

Отримано 20.02.08