

Консервативные разностные схемы на неравномерных сетках для волнового уравнения

Елена Зюзина¹, Петр Матус²

¹ Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 11, Минск, zyuuzina@im.bas-net.by

² д. ф.-м. н., профессор, Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 11, Минск, matus@im.bas-net.by

В работе предложена новая консервативная разностная схема решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на неравномерной пространственно-временной сетке. Схема построена на стандартном девятиточечном шаблоне и характеризуется вторым порядком локальной аппроксимации по пространственной и временной переменным. В работе получены априорные оценки устойчивости, предложенной по начальным данным и правой части, а также доказана сходимость разностного решения со вторым порядком малости.

Ключевые слова: трехслойные разностные схемы, неравномерные сетки, консервативность, устойчивость, порядок аппроксимации.

Введение. В настоящее время к вычислительным методам решения задач математической физики наряду с традиционными требованиями однородности, монотонности, консервативности предъявляются также требования адаптивности и экономичности. Правильный выбор расчетной адаптивной сетки позволяет существенно снизить затраты машинного времени при численном решении конкретных прикладных задач на ЭВМ. Поэтому проблема разработки новых вычислительных алгоритмов на неравномерных сетках, как по пространству, так и по времени, является весьма актуальной. Следует отметить, что при переходе от равномерных сеток к неравномерным порядок локальной аппроксимации обычно падает [1-3]. Повышение точности разностного метода без увеличения шаблона можно осуществить за счет аппроксимации исходного дифференциального уравнения не в узлах сетки, а в некоторых промежуточных точках расчетной области. При моделировании реальных физических процессов естественно требовать, чтобы разностная схема была консервативной (или дивергентной), то есть выражала на сетке законы сохранения.

Вопросы построения и исследования разностных схем на неравномерных сетках рассмотрены в работах [4-9]. В монографии [4] предложены способы построения и использования адаптивных сеток, исследована устойчивость разностных методов, а также изучены консервативные и неконсервативные разностные схемы для параболических и гиперболических уравнений на неравномерных по пространству сетках. Что касается схем на неравномерных сетках по времени, то можно отметить работы [5, 6, 8, 9]: в [8] были получены априорные оценки

устойчивости трехслойных операторно-разностных схем по начальным данным и правой части; в [9] на неравномерной сетке по пространству и по времени построена разностная схема 2-го порядка аппроксимации. Однако приведенные там конкретные разностные методы повышенного порядка точности не удовлетворяют условию консервативности.

В данной работе для одномерного волнового уравнения построена новая консервативная разностная схема второго порядка локальной аппроксимации и сходимости на неравномерной пространственно-временной сетке. Для предложенного вычислительного алгоритма получены оценки сходимости и устойчивости по начальным данным и правой части.

1. Постановка задачи

В области $\bar{Q}_T = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим первую краевую задачу для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (3)$$

В области \bar{Q}_T введем неравномерную сетку по пространству и времени $\hat{\omega}_{h\tau} = \hat{\omega}_h \times \hat{\omega}_\tau$, $\hat{\omega}_h = \{x_i = x_{i-1} + h_i, i = \overline{1, N}, x_0 = 0, x_N = l\}$, $\hat{\omega}_\tau = \{t_n = t_{n-1} + \tau_n, n = \overline{1, N_0}, t_0 = 0, t_{N_0} = T\}$. Для дальнейших исследований будем использовать стандартные обозначения теории разностных схем [1]

$$\begin{aligned} y &= y(x_i, t_n), \quad \hat{y} = y^{n+1} = y(x_i, t_{n+1}), \quad \check{y} = y^{n-1} = y(x_i, t_{n-1}), \quad y_\pm = y(x_{i\pm 1}, t_n), \\ h &= h_i, \quad h_+ = h_{i+1}, \quad \check{h} = \frac{h_{i+1} + h_i}{2}, \quad \tau = \tau_n, \quad \tau_+ = \tau_{n+1}, \quad \tau^* = \frac{\tau_+ + \tau}{2}, \\ y_t &= \frac{\hat{y} - y}{\tau_+}, \quad y_{\check{t}} = \frac{y - \check{y}}{\tau}, \quad y_{\check{h}} = \frac{y_t - y_{\check{t}}}{\tau^*}, \quad y_{\check{i}} = \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau^*}, \quad y_x = \frac{y_+^n - y_-^n}{h_+}, \quad y_{\check{x}} = \frac{y^n - y_-^n}{h}, \\ y_{\check{x}\check{x}} &= \frac{y_x - y_{\check{x}}}{\check{h}}, \quad y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2 \check{y}, \quad y^{(0,5)} = \frac{y^{n+1} + y^n}{2}. \end{aligned}$$

Аппроксимируя дифференциальную задачу (1)-(3) на сетке $\hat{\omega}_{h\tau}$ трехслойной консервативной разностной схемой с весами, получим

$$y_{\hat{t}\hat{x}} + \left(\frac{h^2}{6} y_{\hat{t}\hat{x}\hat{x}} \right) = y_{\hat{x}\hat{x}}^{(\sigma_1, \sigma_2)} + \varphi, \quad (x, t) \in \hat{\omega}_{h\tau}, \quad (4)$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1^{n+1}, \quad y_N^{n+1} = \mu_2^{n+1}, \quad y^0 = u_0, \quad y^1 = u_1, \quad (5)$$

где u_1 выбирается так, чтобы погрешность аппроксимации второго начального условия была $O(\tau_1^2)$.

2. Аппроксимация

Покажем, что разностная схема (4)-(5) аппроксимирует задачу (1)-(3) со вторым порядком $O(h_{\max}^2 + \tau_{\max}^2)$ на стандартном девятиточечном шаблоне (см. рис. 1) относительно нерасчетного узла (\bar{x}_i, \bar{t}_n)

$$\bar{x}_i = \frac{1}{3}(x_{i-1} + x_i + x_{i+1}) = x_i + \frac{h_+ - h_-}{3}, \quad \bar{t}_n = \frac{1}{3}(t_{n-1} + t_n + t_{n+1}) = t_n + \frac{\tau_+ - \tau_-}{3} \quad (6)$$

при

$$\sigma_1 \tau_+ - \sigma_2 \tau_- = \frac{\tau_+ - \tau_-}{3}. \quad (7)$$

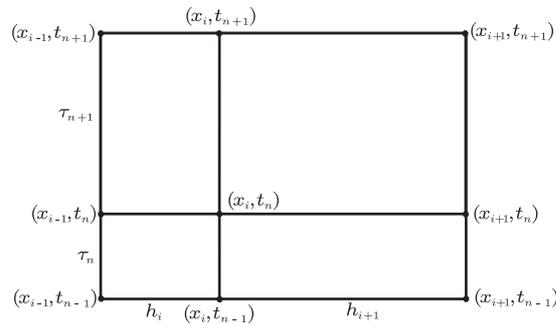


Рис. 1

Для этого воспользуемся следующими тождествами

$$y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = y + (\sigma_1 \tau_+ - \sigma_2 \tau_-) y_t + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \tau \tau_+ y_{\hat{t}\hat{t}}, \quad y_t = y_t - \frac{\tau}{2} y_{\hat{t}\hat{t}}. \quad (8)$$

Невязку ψ представим в виде

$$\begin{aligned}\Psi &= u_{\hat{x}\hat{x}}^{(\sigma_1, \sigma_2)} - \left[u_{\hat{t}\hat{t}} + \left(\frac{h^2}{6} u_{\hat{t}\hat{x}} \right)_{\hat{x}} \right] + \Phi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3, \\ \Psi_1 &= u_{\hat{x}\hat{x}}^{(\sigma_1, \sigma_2)} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}, \Psi_2 = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \left[u_{\hat{t}\hat{t}} + \left(\frac{h^2}{6} u_{\hat{t}\hat{x}} \right)_{\hat{x}} \right], \\ \Psi_3 &= \Phi - f(\bar{x}_i, \bar{t}_n), \quad \bar{u} = \bar{u}(\bar{x}_i, \bar{t}_n).\end{aligned}\tag{9}$$

Будем предполагать, что функция $u(x, t) \in C^{4,4}(Q_T) \cap C^{3,3}(\bar{Q}_T)$. В силу тождеств (8) и условия (7) на весовые функции для дважды непрерывно-дифференцируемой по t функции $v(x, t)$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned}v^{(\sigma_1, \sigma_2)} &= v + \frac{\tau_+ - \tau}{3} \left(v_t - \frac{\tau}{2} v_{\hat{t}\hat{t}} \right) + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \tau \tau_+ v_{\hat{t}\hat{t}} = \\ &= v + \frac{\tau_+ - \tau}{3} v_t + \sigma_2 \tau \tau^* v_{\hat{t}\hat{t}} = v(x, \bar{t}) + O(\tau_{\max}^2).\end{aligned}$$

Следовательно, $\Psi_1 = u_{\hat{x}\hat{x}}^-(x_i, \bar{t}) - \frac{\partial^2 \bar{u}(x, \bar{t})}{\partial x^2} + O(\tau_{\max}^2)$. Используя разложение в ряд

$$\begin{aligned}\text{Тейлора функции } u_{\hat{x}\hat{x},i}^-(x_i, \bar{t}) &= \frac{\partial^2 u(x_i, \bar{t})}{\partial x^2} + \frac{h_+ - h}{3} \frac{\partial^3 u(x_i, \bar{t})}{\partial x^3} + O(h_{\max}^2) = \frac{\partial^2 \bar{u}(x, \bar{t})}{\partial x^2} + \\ &+ O(h_{\max}^2), \text{ несложно показать, что } \Psi_1 = O(h_{\max}^2 + \tau_{\max}^2).\end{aligned}$$

Рассмотрим составляющую Ψ_2 . На основании соотношений

$$v(x_i, t_n) + \left(\frac{h^2}{6} v_x^- \right)_{\hat{x},i} = v(x_i, t_n) + \frac{h_+ - h}{3} v_{x,i}^- + O(h_{\max}^2) = v(\bar{x}_i, t_n) + O(h_{\max}^2),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial t^2} - u_{\hat{t}\hat{t}}(\bar{x}_i, t_n) &= \\ &= \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u(\bar{x}, t_n)}{\partial t^2} + \frac{\tau_+ - \tau}{3} \frac{\partial^3 u(\bar{x}, t_n)}{\partial t^3} + O(\tau_{\max}^2) \right) = O(\tau_{\max}^2),\end{aligned}$$

закключаем, что сеточная функция Ψ_2 имеет второй порядок малости $\Psi_2 = O(h_{\max}^2 + \tau_{\max}^2)$.

Выбирая $\Phi = f(\bar{x}_i, \bar{t}_n)$, убеждаемся, что разностная схема (4) аппроксимирует дифференциальное уравнение (1) с точностью до второго порядка малости

$$\psi = O(h_{\max}^2 + \tau_{\max}^2). \quad (10)$$

Отметим, что $u_1(x)$ выбирается так, чтобы погрешность аппроксимации второго начального условия была $O(\tau_1^2)$

$$y_1 = u_1(x), \quad u_1(x) = u_0(x) + \tau_1 \bar{u}_0(x) + \frac{\tau_1^2}{2} [Lu_0 + f(x,0)],$$

$$Lu_0 = \frac{d^2 u_0}{dx^2}. \quad (11)$$

3. Устойчивость

Исследование устойчивости консервативной разностной схемы (4), (5), (11) по начальным данным и правой части проведем с помощью теории устойчивости операторно-разностных схем. Пусть H — конечномерное гильбертово пространство, в котором скалярное произведение и норма определены следующим образом

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} h_i u_i v_i, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}, \quad (u, v] = \sum_{i=1}^N h_i u_i v_i, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u]}.$$

D, B, A — линейные операторы, действующие в H . Рассмотрим трехслойную операторно-разностную схему в каноническом виде

$$D y_{\bar{t}} + B y_t + A y = \varphi, \quad y_0 = u_0, \quad y_1 = u_1, \quad (12)$$

где $y \in H$ — искомая функция, а $\varphi, u_0, u_1 \in H$ — заданы.

Теорема 1. Пусть выполнены условия

$$D = D^* > 0, \quad A = A^* > 0, \quad R = D - \frac{\tau_n \tau_{n+1}}{4} A > 0, \quad B \geq \frac{\tau_{n+1} - \tau_n}{4} A, \quad \tau_{n+1} \geq \tau_n, \quad (13)$$

R, A — постоянные операторы, тогда разностная схема (12) устойчива по начальным данным и правой части и верна априорная оценка

$$\|y_{t,n}\|_R + \|y_n^{(0,5)}\|_A \leq \sqrt{2} \left(\|y_t(0)\|_R + \|y_0^{(0,5)}\|_A + \sum_{k=1}^n \tau_{k+1} \|\varphi_k\|_{R^{-1}} \right). \quad (14)$$

Доказательство. Умножая схему (12) скалярно на $2\tau^* y_t$ и применяя стандартную технику метода энергетических неравенств [3, 4, 8], а также представление $2\tau^*(\varphi, y_t) = \tau_{n+1}(\varphi, y_t) + \tau_n(\varphi, y_{\bar{t}})$, мы приходим к энергетическому тождеству

$$\begin{aligned} & \|y_t\|_R^2 + \|y_n^{(0,5)}\|_A^2 - \left(\|y_{\bar{t}}\|_R^2 + \|y_{n-1}^{(0,5)}\|_A^2 \right) + \tau^* \frac{\tau_+ - \tau}{2} \|y_{\bar{t}}\|_R^2 + 2\tau^* \|y_t\|_{B \cdot \frac{\tau_+ - \tau}{4} A}^2 = \\ & = \tau_{v+1}(\varphi, y_t) + \tau_v(\varphi, y_{\bar{t}}) \end{aligned}$$

Учитывая условия (13), получаем

$$\|y_t\|_R^2 + \|y_n^{(0,5)}\|_A^2 - \left(\|y_{\bar{t}}\|_R^2 + \|y_{n-1}^{(0,5)}\|_A^2 \right) \leq \tau_{n+1}(\varphi, y_t) + \tau_n(\varphi, y_{\bar{t}}).$$

Обозначим $G = \|y_t\|_R^2 + \|y_n^{(0,5)}\|_A^2$. Тогда используя неравенство Коши-Буняковского $|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$, при $\tau_{n+1} \geq \tau_n$ приходим к цепочке неравенств

$$\begin{aligned} \tau G_{\bar{t}} & \leq \tau_+(\varphi, y_t) + \tau(\varphi, y_{\bar{t}}) \leq \tau_+ \|\varphi\|_{R^{-1}} \|y_t\|_R + \\ & + \tau \|\varphi\|_{R^{-1}} \|y_{\bar{t}}\|_R \leq \tau_+ \|\varphi\|_{R^{-1}} (G^{1/2} + \check{G}^{1/2}). \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что для сеточной функции G верно следующее тождество [10]

$$(G^{1/2})_{\bar{t}} = \frac{G^{1/2} - \check{G}^{1/2}}{\tau_n} = \frac{G - \check{G}}{\tau_n (G^{1/2} + \check{G}^{1/2})} = \frac{G_{\bar{t}}}{(G^{1/2} + \check{G}^{1/2})}.$$

Тогда из неравенства (15) следует оценка $\tau_n (G^{1/2})_{\bar{t}} \leq \tau_{n+1} \|\varphi\|_{R^{-1}}$, и далее

$$\begin{aligned} & \left(\|y_{t,n}\|_R^2 + \|y_n^{(0,5)}\|_A^2 \right)^{1/2} \leq \left(\|y_{\bar{t},n}\|_R^2 + \|y_{n-1}^{(0,5)}\|_A^2 \right)^{1/2} + \tau_{n+1} \|\varphi_n\|_{R^{-1}} \leq \dots \leq \\ & \leq \left(\|y_{t,0}\|_R^2 + \|y_0^{(0,5)}\|_A^2 \right)^{1/2} + \sum_{k=1}^n \tau_{k+1} \|\varphi_k\|_{R^{-1}}. \end{aligned}$$

Используя очевидные соотношения: $|a| + |b| \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$, $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$, приходим к утверждению теоремы. Теорема доказана.

Для обратного соотношения шагов по времени верна следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия

$$D = D^* > 0, B > 0, A = A^* > 0, R = D - \frac{\tau_n \tau_{n+1}}{4} A > 0, \tau_{n+1} \leq \tau_n, \quad (16)$$

R, A — постоянные операторы. Тогда разностная схема (12) устойчива по начальным данным и правой части и верна априорная оценка

$$\|y_{t,n}\|_R + \|y_n^{(0,5)}\|_A \leq \frac{\tau_1 \sqrt{2}}{\tau_{n+1}} \left(\|y_t(0)\|_R + \|y_0^{(0,5)}\|_A + \sum_{k=1}^n \tau_k \|\Phi_k\|_{R^{-1}} \right). \quad (17)$$

Теорема 2 доказывается аналогично теореме 1 с использованием результатов [8, 10] и тождества

$$\begin{aligned} (\tau_{n+1} G_n^{1/2})_{\bar{t}} &= \frac{\tau_{n+1} G_n^{1/2} - \tau_n \overset{\vee}{G}_{n-1}^{1/2}}{\tau_n} \\ &= \frac{\tau_{n+1}^2 G_n - \tau_n^2 \overset{\vee}{G}_{n-1}}{\tau_n (\tau_{n+1} G_n^{1/2} + \tau_n \overset{\vee}{G}_{n-1}^{1/2})} = \frac{(\tau_{n+1}^2 G_n)_{\bar{t}}}{(\tau_{n+1} G_n^{1/2} + \tau_n \overset{\vee}{G}_{n-1}^{1/2})}. \end{aligned}$$

Для простоты будем рассматривать случай: $\mu_1(t) = \mu_2(t) = 0$. Тогда для консервативной разностной схемы (4), (5), (11) верна следующая теорема.

Теорема 3. Пусть выполнены условия

$$\sigma_1 \tau_{n+1} - \sigma_2 \tau_n = \frac{\tau_{n+1} - \tau_n}{3}, \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{1}{2}, \quad \frac{h_i h_{i+1}}{4} - \frac{h_i^2}{6} > 0, \quad \tau_{n+1} \geq \tau_n. \quad (18)$$

Тогда разностная схема (4), (5), (11) устойчива по начальным данным и правой части и верна априорная оценка (14), где $\|y_t\|_R^2 = \|y_t\|^2 - (h_i^2/6, y_{\bar{x}}^2) > 0$.

Доказательство. Приведем схему второго порядка аппроксимации (4), (5), (7), (11) к каноническому виду (12)

$$\begin{aligned} D &= E + A_1 + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \tau_n \tau_{n+1} A, \quad B = \frac{\tau_{n+1} - \tau_n}{3} A, \\ (A_1 y)_i &= \left(\frac{h_i^2}{6} y_{\bar{x}} \right)_{\hat{x},i}, \quad (A y)_i = -y_{\bar{x}\hat{x},i}, \quad i = \overline{1, N}, \quad y_0 = y_N = 0. \end{aligned}$$

Для доказательства воспользуемся теоремой 1. Проверим выполнение операторных неравенств (13). При этом будем использовать разностные аналоги теорем вложения Соболева

$$\|y_{\bar{x}}\|^2 \leq (4/h_i h_{i+1}, y^2), \quad \|y\|^2 \geq (h_i h_{i+1}/4, y_{\bar{x}}^2), \quad \|y\|^2 \leq (l^2/4) \|y_{\bar{x}}\|^2. \quad (19)$$

Так как $y_0 = y_N = 0$, то, применяя разностную формулу Грина [3], легко показать, что операторы A, A_1 являются самосопряженными, причем $A > 0$. Отсюда следует, что оператор D тоже самосопряженный. Покажем, что D является положительно определенным. Действительно, в силу предположений теоремы

$$\begin{aligned} (D y, y) &= \left(y + \left(\left(\frac{h_i^2}{6} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \tau \tau_+ \right) y_{\bar{x}} \right)_{\hat{x}}, y \right) = \|y\|^2 - \left(\frac{h_i^2}{6} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \tau \tau_+, y_{\bar{x}}^2 \right) \geq \\ &= \left(\frac{h_i h_{i+1}}{4}, y_{\bar{x}}^2 \right) - \left(\frac{h_i^2}{6} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \tau \tau_+, y_{\bar{x}}^2 \right) = \left(\frac{h_i h_{i+1}}{4} - \frac{h_i^2}{6} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \tau \tau_+, y_{\bar{x}}^2 \right) > 0. \end{aligned}$$

Так как A_1 не зависит от t_n , то оператор $R = E + A_1 + \frac{\tau_n \tau_{n+1}}{2} (\sigma_1 + \sigma_2 - 0,5) A$ будет постоянным, если $\sigma_1 + \sigma_2 = 0,5$. Используя неравенства (19), приходим к оценке

$$(R y, y) = \left(y + \left(\frac{h_i^2}{6} y_{\bar{x}} \right)_{\hat{x}}, y \right) = \|y\|^2 - \left(\frac{h_i^2}{6} y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}} \right) = \left(\frac{h_i h_{i+1}}{4} - \frac{h_i^2}{6}, y_{\bar{x}}^2 \right) > 0.$$

Учитывая условия второго порядка аппроксимации (7) и соотношение на шаги $\tau_+ \geq \tau$, имеем

$$B - \frac{\tau_{n+1} - \tau_n}{4} A = \frac{\tau_{n+1} - \tau_n}{12} A \geq 0.$$

Таким образом, операторы разностной схемы (4), (5) удовлетворяют условиям устойчивости (13). Отсюда следует априорная оценка (14). Теорема доказана.

Замечание 1. Из условия $h_i h_{i+1}/4 - h_i^2/6 > 0$ следует, что шаги по пространственной переменной должны удовлетворять следующему неравенству: $h_{i+1} > 2/3 h_i$. Если пространственная сетка строится по закону геометрической прогрессии $h_{i+1} = q h_i$, то константа q должна удовлетворять условию $q > 2/3$. При $2/3 < q < 1$ сетка сгущается, а при $q > 1$ — разбегается.

Замечание 2. Объединяя условие второго порядка аппроксимации (7) и условие устойчивости (18), весовые функции можно вычислить однозначно

$$\sigma_1 = \frac{2\tau_{n+1} + \tau_n}{6(\tau_{n+1} + \tau_n)}, \quad \sigma_2 = \frac{\tau_{n+1} + 2\tau_n}{6(\tau_{n+1} + \tau_n)}.$$

Тогда схема (4) принимает вид

$$y_{\hat{t}} + \left(\frac{h_i^2}{6} y_{\hat{t}\bar{x}} \right)_{\hat{x}} + \frac{\tau_n \tau_{n+1}}{4} A y_{\hat{t}} + \frac{\tau_{n+1} - \tau_n}{3} A y_t + A y = \varphi, \quad (20)$$

и можно уточнить априорную оценку (14)

$$\|y_{t,n}\|_R + \|y_n^{(0,5)}\|_A \leq \sqrt{2} \left(\|y_t(0)\|_R + \|y_0^{(0,5)}\|_A + \sum_{k=1}^n \tau_{k+1} \|\varphi_k\| \right). \quad (21)$$

4. Сходимость

Получим априорную оценку сходимости операторно-разностной схемы (4), (5). Запишем задачу для погрешности метода $z = y - u$

$$z_{\bar{t}\bar{t}} + \left(\frac{h^2}{6} z_{\bar{t}\bar{x}} \right)_{\bar{x}} + Az^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \psi, \quad \psi = u_{\bar{x}\bar{x}}^{(\sigma_1, \sigma_2)} - u_{\bar{t}\bar{t}} - \left(\frac{h^2}{6} u_{\bar{t}\bar{x}} \right)_{\bar{x}} + \varphi, \quad (22)$$

$$z_0^{n+1} = z_N^{n+1} = 0, \quad z(x, 0) = 0, \quad z_t(x, 0) = v(x). \quad (23)$$

Здесь ψ , $v(x)$ — погрешность аппроксимации разностной схемы (4), (5) на решении дифференциальной задачи (1)-(3): $\psi(\bar{x}_i, \bar{t}_n) = O(h_{\max}^2 + \tau_{\max}^2)$, $v(x) = \tilde{u}(x) - \bar{u}_0(x) = O(\tau_1^2)$. Отметим, что $\|\psi(\cdot, t_n)\| \leq M(h_{\max}^2 + \tau_{\max}^2)$, где M — положительная постоянная, не зависящая от сеточных шагов h и τ . Применяя теорему 3 и априорную оценку (21) для решения задачи (22)-(23), убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 4. Пусть решение дифференциальной задачи (1)-(3) имеет все непрерывные ограниченные частные производные до четвертого порядка включительно и выполнены следующие условия

$$\sigma_1 \tau_{n+1} - \sigma_2 \tau_n = \frac{\tau_{n+1} - \tau_n}{3}, \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{1}{2}, \quad 3h_{i+1} - 2h_i > 0, \quad \tau_{n+1} \geq \tau_n. \quad (24)$$

Тогда консервативная разностная схема (4), (5), (11) сходится к решению задачи (1)-(3), и имеет место оценка точности вида

$$\|\hat{z}\|_1 \leq c(h_{\max}^2 + \tau_{\max}^2), \quad c = const > 0, \\ \|\hat{z}\|_1 = \|z_{t,n}\|_R + \|z_n^{(0,5)}\|_A, \quad \|z_t\|_R^2 = \|z_t\|^2 - \left(h_i^2 / 6, z_{\bar{t}\bar{x}}^2 \right] > 0. \quad (25)$$

Выводы. Предложенная в работе консервативная разностная схема для волнового уравнения построена на неравномерной пространственно-временной сетке, на стандартном девятиточечном шаблоне. Схема имеет второй порядок локальной аппроксимации и сходимости по пространственной и временной переменным. Доказана устойчивость построенной схемы по начальным данным и правой части.

Литература

- [1] Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. — М., 1973.
- [2] Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. — М., 1973.
- [3] Самарский А. А. Теория разностных схем. — М., 1989.
- [4] Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П. Разностные схемы с операторными множителями. — Минск, 1998.

- [5] *Diakonov E., Bokov A.* Energetic inequalities for difference schemes on grids changing in time // Dokl. Bolg. AN. — 1975. — Vol. 28, № 2. — P. 157-160.
- [6] *Bokov A.* Energetic inequalities for three-level difference schemes on grids changing in time // Godishn. Vissh. Uchebni Zaved. Prilozh. Mat. — 1976. — Vol. 12, № 2. — P. 87-96.
- [7] *Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П.* Разностные схемы повышенного порядка точности на неравномерных сетках // Дифференц. уравнения. — 1996. — Т. 32, № 2. — С. 265-274.
- [8] *Matus P., Zyuzina E.* Three-level difference schemes on nonuniform in time grids // Comput. Meth. Appl. Math. — 2001. — Vol. 1, № 3. — P 265-284.
- [9] *Matus P., Mazhukin V., Mozolevsky I.* Stability of finite difference schemes on non-uniform spatial-time grids // Proceeding of the second International conference, NAA 2000. — Rousse, Bulgaria. Lecture Notes in Computer Science. — 2001.
- [10] *Jovanovich B., Lemeshevsky S., Matus P.* On the stability of differential-operator equations and operator-difference schemes as $t \rightarrow \infty$ // Comput. Meth. Appl. Math. — 2002. — Vol. 2, № 2. — P 153-170.
- [11] *Jovanovich B.* Finite difference schemes for partial differential equations with weak solutions and irregular coefficients // Comput. Meth. Appl. Math. — 2004. — Vol. 4, № 1. — P. 48-65.

Консервативні різницеві схеми на неравномерних сітках для хвильового рівняння

Елена Зюзіна¹, Петро Матус²

У роботі запропоновано нову консервативну різницеву схему розв'язування початково-крайової задачі для хвильового рівняння на нерівномірній просторово-часовій сітці. Схема побудована на стандартному дев'яточковому шаблоні і характеризується другим порядком локальної апроксимації за просторовою і часовою змінними. У роботі отримано апріорні оцінки стійкості запропонованої схеми щодо початкових даних і правої частини, а також доведено збіжність різницевого розв'язку з другим порядком малості.

Conservative Difference Schemes on Non-uniform Grids for Wave Equation

Elena Zyuzina, Piotr Matus

In the paper a new conservative difference scheme for solution of the initial boundary-value problem for wave equation is considered on a non-uniform spatial-time grid. The scheme is constructed on a standard nine-point stencil and approximates the initial differential problem with the second order with respect both to space and time. For the numerical solution a priori estimates of stability are obtained in the sense of the initial data and the right-hand side, just as the convergence with the second order is proved.

Отримано 21.11.05