УДК 539.3

Скінченно-елементна реалізація методу розв'язування обернених задач поляризаційно-оптичної томографії напружень

Василь Чекурін[1], Тарас Брич[2]

[1] д. ф.-м. н., професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С.Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3*б*, Львів, e-mail: chekurin@iapmm.lviv.ua
[2] к. т. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3*б*, Львів, e-mail: tb@mail.lviv.ua

У статті розроблений раніше варіаційний підхід до розв'язування обернених задач поляризаційно-оптичної томографії напружено-деформованого стану твердих тіл реалізовано з використанням методу скінченних елементів. Підхід базується на трьох складових: математичній моделі напружено-деформованого стану, який потрібно відновити, системі променевих поляризаційно-оптичних інтегралів, що пов'язують розподіли компонент тензора напружень на напрямку зондування з вимірюваними на цьому напрямку поляризаційно-оптичними параметрами та результатах вимірювання значень цих параметрів на деякій множині променів, що перетинають об'єкт дослідження. Ідея запропонованого методу полягає у застосуванні скінченно-елементних аналогів для моделі напружено-деформованого стану й для системи променевих інтегралів і формуванні на цій основі з використанням даних фізичних вимірювань перевизначеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно вузлових переміщень. Результати проведених числових експериментів підтвердили ефективність запропонованого методу та дозволили оцінити параметри сітки скінченних елементів і об'єми даних фізичних вимірювань, достатніх для відтворення поля напружень із необхідною точністю.

Ключові слова: томографія тензорного поля, обернені задачі, метод скінченних елементів, метод фотопружності.

Вступ. Методи скалярної променевої томографії [1] реалізують шляхом сканування тіла зовнішнім випромінюванням (наприклад, рентгенівським, ультразвуковим, світлом тощо), що проникає в тіло у вигляді паралельного пучка (променя). Якщо зміну параметрів зондувального поля внаслідок його взаємодії з тілом вдається подати у вигляді інтеграла від шуканого скаляра вздовж променя, то зіставляючи параметри зондувального променя перед входом у тіло з даними їх вимірювання на виході з нього, можна визначити значення променевого інтеграла для кожного напрямку зондування. Скануючи тіло в достатньо представницькій множині напрямків та використовуючи теорему Радона про обернення променевого перетворення [2], відновлюють шукане скалярне поле.

У разі тензорних полів необхідно відтворити просторові розподіли декількох скалярних компонент тензора. При цьому однієї множини променевих інтегралів, вочевидь, недостатньо і відомі методи томографії скалярного поля не вдається безпосередньо застосувати для тензорних полів.

Разом із тим у наукових дослідженнях та інженерній практиці широкого застосування набули так звані неруйнівні теоретико-експериментальні методи визначення напружено-деформованого стану твердих тіл. Їх також реалізують шляхом зондування тіла зовнішнім фізичним полем, яке проникаючи в товщу об'єкта, змінює свої характеристики внаслідок взаємодії з полем напружень (чи деформацій). Реєструючи зміни характеристик зондувального поля, зумовлені взаємодією з об'єктом, у деяких простих випадках вдається визначити безпосередньо з результатів вимірювання частину компонент шуканого тензорного поля або деякі комбінації цих компонент. Так, просвічуючи об'єкти, що перебувають у плоскому напруженому стані, поляризованим світлом, й аналізуючи інтерференційні картини смуг та ізоклін, які при цьому виникають, можна визначити в кожній точці двовимірної області різницю головних значень і орієнтацію головних осей поля деформацій [3]. Застосовуючи методи оптичної поляриметрії та спеціальні схеми просвічування, можна визначити осьові напруження в тонких циліндричних оболонках як за осесиметричних умов [4], так і в загальному випадках [5, 6].

Порівнюючи ці два підходи (томографічний та теоретико-експериментальний) слід наголосити, що, реалізуючи перший з них, прагнуть обмежитися апостеріорною інформацією про актуальний стан об'єкта, використовуючи лише модель взаємодії зондувального випромінювання з об'єктом у вигляді променевих інтегралів, а математичні моделі, які визначають розподіл параметрів, що підлягають визначенню, як правило, не розглядають. Цей підхід більш універсальний щодо геометрії об'єктів, але вимоги до об'ємів і якості вхідних даних тут високі.

Натомість у теоретико-експериментальному методі основною складовою частиною є математичні моделі у вигляді систем диференціальних, інтегральних чи інтегро-диференціальних рівнянь, відповідних крайових умов, умов спряження тощо. Ці моделі недоозначені через неповні знання щодо актуального стану об'єкта. Щоб компенсувати брак апріорної інформації про об'єкт тут використовують дані фізичних вимірювань. Вимоги до об'ємів вхідних даних за такого підходу істотно нижчі, проте його реалізація можлива лише в окремих випадках.

1. Метод томографії тензорних полів

У працях [6-8] розроблено підхід до визначення напружено-деформованого стану твердих тіл, який поєднує теоретико-експериментальний та томографічний підходи. Метод базується на трьох складових:

- результатах фізичних вимірювань змін інформативних параметрів зовнішнього зондувального поля, зумовлених його взаємодією з деформованим тілом,
- математичній моделі взаємодії зондувального випромінювання з деформованим твердим тілом, яка пов'язує вимірювальні інформативні параметри з функціоналами від компонент тензорного поля, що підлягає відновленню,
- математичній моделі напружено-деформованого стану об'єкта.

Для реалізації цього методу, як і томографічного, зручно подати модель взаємодії зондувального випромінювання з тілом у вигляді функціонала, який визначає вимірювальний інформативний параметр J

$$J = \Phi\left(\sigma^{ij}, \mathrm{d}\right) = \int\limits_{\mathrm{d}} \mathbf{L}\left(\sigma^{ij}(\mathbf{r})\right) \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{1}$$

Тут d — область проникнення зондувального випромінювання в об'єкт. Конкретний вигляд оператора **L**(...) залежить від природи зондувального поля, вибору інформативного параметра J цього поля, обраного способу вимірювання, геометрії вимірювальної системи, прийнятого наближення тощо.

Для поляризаційно-оптичного методу відбору даних про напружено-деформований стан функціонали (1) отримано в публікаціях [7], [8]. У цьому випадку області d є відрізками прямих L_n, які пронизують тіло в різних напрямках. Для кожного напрямку справедливі два променевих поляризаційно-оптичних інтеграли

$$\frac{\omega P}{2c\sqrt{k}} \int\limits_{t_1^n}^{t_2^n} (\sigma_{11}^n - \sigma_{22}^n)\, dt = J_1^n, \qquad \frac{\omega P}{2c\sqrt{k}} \int\limits_{t_1^n}^{t_2^n} \sigma_{12}^n \, dt = J_2^n, \tag{2}$$

де σ_{11}^n, σ_{22}^n, σ_{12}^n — компоненти тензора напружень стосовно декартової системи координат $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ такої, що вісь ξ_3 співпадає з напрямком L_n; t — параметр, що визначає точку на прямій L_n; $t_1^{\,n}$, t_2^n — значення цього параметра на кінцях відрізка d_n; J_1^n і J_2^n — параметри, що визначаються за даними поляризаційно-оптичних вимірювань для кожної прямої L_n; k — діелектрична проникність середовища, c — швидкість світла, ω — циклічна частота світлової хвилі, P — стала матеріалу.

Скануючи зондувальним полем тіло, отримують множину значень вимірювального параметра J для деякої множини областей зондування $\mathrm{D} = \{\mathrm{d}\}$, що можна записати у вигляді відношень $\mathrm{d} \to J$

$$J = J(\mathrm{d}), \ \ \mathrm{d} \in \mathrm{D}. \tag{3}$$

У запропонованому підході функціонал (1) та експериментальні дані (3) розглядають разом із математичною моделлю напруженого стану тіла. Обернену задачу томографії тензора напружень в об'єкті формулюють так: знайти в області V тіла розподіл напружень $\sigma^{ij}(\mathbf{r})$, який задовольняє математичну модель напружено-деформованого стану об'єкта й узгоджується певним чином із даними вимірювань, поданими у вигляді залежностей (3), та математичною моделлю (1), що описує взаємодію зондувального випромінювання з об'єктом.

Для реалізації розробленого підходу шуканий розв'язок подають у вигляді розвинень за деякими системами функцій. У такий спосіб підхід було реалізовано з використанням системи власних функцій крайових задач теорії пружності для півсмуги [9, 10] і теорії тонких циліндричних оболонок [5]. У публікації [11] запропоновано гранично-елементний метод, а у цій статті для розвинутого в публікаціях [7, 8] підходу пропонується скінченно-елементний метод реалізації.

2. Скінченно-елементний метод розв'язування задач поляризаційно-оптичної томографії напружень

Розглянемо однорідне тверде тіло, що займає область V, обмежену поверхнею ∂V, і перебуває в стані пружної рівноваги, тобто в області V тіла виконуються рівняння рівноваги

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0\,. \tag{4}$$

Тут λ, μ — коефіцієнти Ламе.

Нехай S_u і S_p — частини поверхні ∂V, такі, що

$$\varnothing \subseteq S_u \bigcup S_p \subseteq \partial V\,. \tag{5}$$

На поверхнях S_u і S_p задані вектори переміщень $\mathbf{u}$ і напружень $\mathbf{p} = \mathbf{n}_0 \cdot \hat{\sigma}$, відповідно

$$\mathbf{u}\big|_{S_u} = \mathbf{w}_0(\mathbf{r}),\;\; \mathbf{r} \in S_u,\;\; \mathbf{p}\big|_{S_p} = \mathbf{q}_0(\mathbf{r}),\;\; \mathbf{r} \in S_p\,. \tag{6}$$

Тут $\mathbf{n}_0$ — зовнішня нормаль до ∂V; $\mathbf{w}_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{q}_0(\mathbf{r})$ — задані функції.

Зазначимо, що тільки у частковому випадку, коли

$$S_u \bigcup S_p = \partial V\,,\quad S_u \bigcap S_p = \varnothing \tag{7}$$

та за певних обмежень на геометрію поверхні ∂V і функції $\mathbf{w}_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{q}_0(\mathbf{r})$, приходимо до коректної постановки прямої задачі теорії пружності. В інших випадках сформулювати коректні прямі задачі визначення напружено-деформованого стану тіла в рамках моделі (4), (6) неможливо. Тому розглядатимемо рівняння (4) та задану частину граничних умов (6) разом із функціоналами (1) і даними вимірювань (3).

Апроксимуючи шукані функції $u_1(x_1,x_2,x_3)$, $u_2(x_1,x_2,x_3)$, $u_3(x_1,x_2,x_3)$, де u_i — компоненти вектора переміщень $\mathbf{u}$, x_i — просторові координати, за методом скінченних елементів (МСЕ), та беручи до уваги задану частину граничних умов (6), прийдемо до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}\,. \tag{8}$$

Тут $\mathbf{K}$ — матриця жорсткості розмірності $3(N - m - \tilde{m}) \times 3(N - m)$, де N — кількість вузлів у сітці скінченних елементів; m — кількість вузлів, розташованих на частині $S_u \bigcup S_p$ зовнішньої поверхні ∂V; $\tilde{m}$ — кількість вузлів, розташованих на частині $\partial V - S_u \bigcup S_p$ зовнішньої поверхні ∂V; $\mathbf{U}$ — вектор-стовпчик вузлових переміщень розмірності $3(N - m)$; $\mathbf{F}$ — вектор-стовпчик розмірності $3(N - m - \tilde{m})$, елементи якого визначаються відповідно до значень вектор-функцій $\mathbf{w}_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{q}_0(\mathbf{r})$ у вузлових точках, розташованих на частині $S_u \bigcup S_p$ зовнішньої поверхні ∂V.

Щоб використати результати фізичних вимірювань (3) та математичну модель взаємодії випромінювання з об'єктом прирівняємо для кожного d інтеграли, що у правій частині співвідношень (1), до виміряних значень параметрів $J(\mathsf{d})$ (3)

$$\int_{\mathsf{d}} \mathbf{L}\left(\sigma^{ij}(\mathbf{r})\right) d\mathbf{r} = J(\mathsf{d}). \tag{9}$$

Виражаючи в отриманих інтегральних співвідношеннях (9) компоненти тензора напружень через компоненти вектора переміщень та апроксимуючи їх за методом скінченних елементів, прийдемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь виду

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{J}. \tag{10}$$

Тут $\mathbf{L}$ — матриця розміру $n_o N_d \times 3(N-m)$, де n_0 — кількість незалежних фізичних параметрів, які вимірюються на кожному напрямку зондування (у випадку поляризаційно-оптичного методу відбору даних $n_0 = 2$), N_d — кількість напрямків зондування, $\mathbf{J}$ — вектор-стовпчик, утворений із виміряних параметрів. Компоненти матриці $\mathbf{L}$ залежать від напрямків зондування, виду оператора $\mathbf{L}(...)$ в інтегралі (9), пробних функцій МСЕ.

З рівнянь (8) та (10) утворимо систему

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Далі розглянемо випадок, коли $n_o N_d > 3\tilde{m}$. При цьому система (11) — перевизначена, її матриця має розмір $\left[3(N-m-\tilde{m}) + n_o N_d\right] \times 3(N-m)$.

Застосовуючи до отриманої системи метод найменших квадратів, прийдемо до такої системи рівнянь із $3(N-m)$ невідомими

$$\left[\mathbf{K}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{L}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{L}\right] \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\mathbf{T}}\mathbf{F} \\ \mathbf{L}^{\mathbf{T}}\mathbf{J} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Розв'язавши цю систему, визначимо значення переміщень у вузлах сітки, а відтак — і напружено-деформований стан.

3. Скінченно-елементна модель для прямої задачі

Для тестування розробленого методу необхідно дослідити вплив параметрів скінченно-елементного розбиття та схеми зондування, оцінити мінімальну кількість напрямків зондування об'єкта. Ці дослідження проведемо для двовимірного поля напружень. Розглянемо тверде тіло, що перебуває у стані плоскої деформації. Переріз тіла площиною симетрії утворює прямокутну область $\mathsf{S} = \{0 \le x \le a, -1 \le y \le 1\}$. Напруження у тілі виникають під дією нормальних $\sigma(y)$ та тангенціальних $\tau(y)$ сил, прикладених до однієї із сторін області S

$$\sigma_{11}(0,y)=\sigma(y)\,,\quad \sigma_{12}(0,y)=\tau(y)\,. \tag{13}$$

Тут $\sigma(y)$ і $\tau(y)$ задані на відрізку [–1, 1] функції, що задовольняють умови зрівноваження

$$\int_{-1}^{1}\sigma(y)dy=0\,,\quad \int_{-1}^{1}\tau(y)dy=0\,,\quad \int_{-1}^{1}y\tau(y)dy=0\,. \tag{14}$$

Інші бічні поверхні вільні від навантажень.

Як відомо, напруження, викликані зрівноваженим навантаженням, прикладеним у локальній області на поверхні тіла, згасають із віддаленням від поверхні прикладення навантаження. Як показано в статті [10], для смуги, торець якої навантажений зрівноваженим розподілом сил, напруження практично згасають вже на відстанях від торця однієї-півтори товщини смуги. Тому, вибираючи параметр a достатньо великим, можемо порівнювати розв'язок МСЕ для області S, з отриманим у праці [10] аналітичним розв'язком.

Рівняння рівноваги (4) для двовимірного випадку мають вигляд

$$\begin{gathered}
\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+\frac{E}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x\partial y}=0\\
\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2}\right]+\frac{E}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0\,.
\end{gathered} \tag{15}$$

а матриця $\mathbf{K}$ системи рівнянь (8) визначиться так

$$\mathbf{K}=\sum_{\lambda=1}^{N_E}\int_{\mathsf{S}_\lambda}\mathbf{BN}_\lambda{}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_\lambda\mathbf{BN}_\lambda\ ds\,. \tag{16}$$

Тут E і ν — модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона; N_E — кількість елементів розбиття; S_λ, $\mathbf{N}_\lambda$ та $\mathbf{D}_\lambda$ — область, яку займає елемент λ, його матриця функцій форми та матриця пружних характеристик; u, v — компоненти вектора переміщень $\mathbf{u}$.

Використовуватимемо лінійні трикутні елементи, для яких матриця функцій форми має вигляд [12]

$$\begin{gathered}
\mathbf{N}_\lambda=\begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0\\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k\end{bmatrix},\\
N_i=\frac{1}{2A}(a_i+b_ix+c_iy)\,,\quad i,j,\,k\ \in\ \mathbf{I}_\lambda
\end{gathered} \tag{17}$$

де $\mathbf{I}_\lambda$ — множина номерів вузлів елемента λ; a_i, b_i, c_i, A — параметри, які для кожного елемента визначають через координати його вузлів X_j, Y_k, j, $k\in\mathbf{I}_\lambda$

$$\begin{aligned} a_i&=X_jY_k-X_kY_j\\ b_i&=Y_j-Y_k\\ c_i&=X_k-X_j\end{aligned}\quad,\quad 2A=\begin{vmatrix}1 & X_i & Y_i\\ 1 & X_j & Y_j\\ 1 & X_k & Y_k\end{vmatrix},$$

B — матричний диференціальний оператор [12], який діє на матриці функцій форми виду (17) наступним чином

$$\mathbf{BN}_\lambda = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \equiv \mathbf{N}_\lambda^{\mathbf{B}}.$$

За відсутності об'ємних сил вектор **F** має вигляд

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & f_{1l} & f_{2l} & 0 & 0 & \dots & f_{1_{l+m}} & f_{2_{l+m}} & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

де f_{1l} і f_{2l} — складові вектора сил у вузлі $l \in \Sigma_m$, де Σ_m — множина номерів вузлів, розташованих на торці області $x = 0$.

При числових дослідженнях приймали $a = 3$. Навантаження (13) на торці смуги задавали у вигляді

$$\sigma(y) = \frac{\sigma_0}{2}\left(3y^2 - 1\right), \quad \tau(y) = 0. \tag{18}$$

Результати розрахунку для сіток різної густини порівнювалися з аналітичним розв'язком цієї задачі [10]. Для цього визначали середньоквадратичну похибку обчислень для перетинів $x = const$ за формулою

$$\varepsilon_{dir}(x) = \sigma_0^{-1}\left(\int_{-1}^{1}\left\{\left[\sigma_{xx}^a(x,y) - \sigma_{xx}(x,y)\right]^2 + \left[\sigma_{xy}^a(0,y) - \sigma_{xy}(x,y)\right]^2\right\}dy\right)^{1/2} \tag{19}$$

де $\sigma_{xx}^a(x,y)$, $\sigma_{xy}^a(x,y)$ — значення компонент тензора напружень, отримані на основі аналітичного розв'язку, $\sigma_{xx}(x,y)$, $\sigma_{xy}(x,y)$ — відповідні значення отримані МСЕ. Результати розрахунку наведені в табл. 1

Таблиця 1

№ моделі	Модель	Ступені вільності	Кількість елементів	$\varepsilon_{dir}(0)$	$\varepsilon_{dir}(0,2)$	$\varepsilon_{dir}(0,4)$
1	8ˣ12	192	154	0,00985	0,009759	0,010328
2	18ˣ27	972	884	0,00419	0,002475	0,001932
3	21ˣ31	1302	1200	0,003278	0,001618	0,000765
4	40ˣ60	4800	4602	0,001796	0,000408	0,000361

4. Скінченно-елементна модель для оберненої задачі томографії

Нехай навантаження, що діє на стороні $x = 0$, невідоме, проте відомо, що на інших сторонах області S навантаження дорівнює нулю. Якщо застосувати МСЕ до системи диференціальних рівнянь (15) та врахувати однорідні умови, що діють на трьох сторонах області, то отримаємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{0} \tag{20}$$

яка містить на $2\tilde{m}$ рівнянь менше, ніж кількість невідомих вузлових переміщень, де $\tilde{m}$ — кількість вузлів, що лежать на стороні, на якій умови навантаження невідомі. Неважко переконатися, що така система має безліч розв'язків. Різницю N_{und} між кількістю невідомих та кількістю рівнянь скінченно-елементної моделі (20) називатимемо ступенем її невизначеності.

Припустимо, що тіло зондували лінійно поляризованим світлом у деякій множині напрямків $\mathsf{L}_n(t) = \left\{x = x^n(t);\ x = x^n(t);\ t \in \mathbf{R}\right\}$, $n = \overline{1, N_d}$, що лежать у площині xOy. Нехай $\mathbf{J}^n = \left(J_1^n,\ \ J_2^n\right)^T$ — числові значення виміряних інформативних параметрів для цих напрямків зондування, які визначають для кожного L_n праві частини інтегральних співвідношень (2). Застосуємо скінченно-елементну апроксимацію до виразів для компонент напружень σ_{11}^n, σ_{22}^n, σ_{12}^n. Для цього для кожного елемента λ подамо компоненти напружень через значення вузлових переміщень, а відтак перейдемо до системи координат, пов'язаної з напрямком просвічування. У результаті отримаємо

$$\sigma_\lambda{}^n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^n \cdot \mathbf{D}_\lambda \cdot \mathbf{N}_\lambda^{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{U}_\lambda\,. \tag{21}$$

Тут $\sigma_\lambda^n = \left(\sigma_{11}^n - \sigma_{22}^n,\ \sigma_{12}^n\right)^T$, $\mathbf{T}^n$ — матриця переходу від глобальної системи координат xOy до системи, пов'язаної з напрямком просвічування n, $\mathbf{A}$ — допоміжна матриця

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Підставляючи (21) в інтегральні співвідношення (20), отримуємо для кожного n два лінійних рівняння, які у матричному вигляді запишемо так

$$\frac{\omega P}{2c\sqrt{k}} \sum_{\lambda \in E_N} d_\lambda^n \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^n \cdot \mathbf{D}_\lambda \cdot \mathbf{N}_\lambda^{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{U}_\lambda = \mathbf{J}^n\,. \tag{23}$$

Тут E_N — множина елементів, які перетинає пряма L_n, d_λ^n — довжина відрізку прямої L_n, що належить елементу λ.

Ансамблюючи рівняння (23) для всіх напрямків просвічування, отримуємо матрицю та вектор-стовпчик правої частини рівняння (10).

Для числового дослідження розв'язків оберненої задачі та впливу на результат густини сітки скінченних елементів, схеми просвічування та об'єму вхідних даних використовували метод числового експерименту. З цією метою дані зондування об'єкта розраховували за формулами (23), використовуючи результати розв'язування прямої задачі.

Розглядали дві схеми зондування (*а* — системою паралельних до осі Ox променів; *б* — системою паралельних до осі Oy променів) та чотири сітки скінченних елементів різної густини (табл. 2).

Систему (10) розв'язували із використанням методу Хаусхолдера, реалізованого у підпрограмі LSBRR зі стандартної бібліотеки підпрограм IMSL пакета Compaq Visual Fortran [13].

Точність отриманих розв'язків оберненої задачі оцінювали за формулою

$$\varepsilon_F = \sqrt{\sum_k \left(F_{1k}^{dir} - F_{1k}^{inv}\right)^2 + \left(F_{2k}^{dir} - F_{2k}^{inv}\right)^2} \qquad (24)$$

де F_{1k}^{dir}, F_{2k}^{dir} — компоненти вектора вузлових сил, які використовували при розв'язуванні прямої задачі, F_{1k}^{inv}, F_{2k}^{inv} — їхні значення, отримані в результаті розв'язування оберненої задачі, сумування здійснюють за вузлами, розташованими на стороні $x = 0$.

Зі згущенням сітки скінченних елементів зростає точність апроксимації вихідної математичної моделі (15) моделлю МСЕ і збільшується ступінь невизначеності моделі МСЕ. Інтуїтивно зрозуміло, що для отримання надійного розв'язку оберненої задачі кількість напрямків зондування повинна перевищувати ступінь невизначеності моделі МСЕ. Вплив об'єму вхідних даних оберненої задачі та схеми сканування на точність отриманого розв'язку можна простежити за даними, наведеними в табл. 2.

Таблиця 2

Модель МСЕ / Схема просвічування		8 × 12	18 × 27	21 × 31	40 × 60
	Ступені вільності $2N$	192	972	1302	4800
	Елементи N_E	154	884	1200	4602
	Невідомі сили N_{und}	8	18	21	40
	Лінії просв. N_d	Похибка			
а	62	$2{,}324 \cdot 10^{-5}$	$1{,}809 \cdot 10^{-2}$	$1{,}700 \cdot 10^{-1}$	3,255
	125	$5{,}734 \cdot 10^{-5}$	$2{,}466 \cdot 10^{-4}$	$1{,}345 \cdot 10^{-2}$	1,157
	250	$8{,}600 \cdot 10^{-6}$	$1{,}787 \cdot 10^{-4}$	$8{,}993 \cdot 10^{-3}$	$2{,}113 \cdot 10^{-1}$
	375	$2{,}154 \cdot 10^{-5}$	$1{,}406 \cdot 10^{-4}$	$6{,}113 \cdot 10^{-3}$	$4{,}915 \cdot 10^{-3}$
	500	$1{,}227 \cdot 10^{-5}$	$1{,}111 \cdot 10^{-4}$	$1{,}270 \cdot 10^{-4}$	$1{,}520 \cdot 10^{-3}$
б	41	$1{,}194 \cdot 10^{-5}$	$5{,}130 \cdot 10^{-5}$	$2{,}918 \cdot 10^{-4}$	$9{,}237 \cdot 10^{-5}$
	79	$1{,}320 \cdot 10^{-5}$	$1{,}617 \cdot 10^{-5}$	$4{,}741 \cdot 10^{-5}$	$2{,}439 \cdot 10^{-5}$

Легко помітити, що дві схеми сканування, які розглядали, дають істотно відмінні результати. У схемі *б* кожен промінь проходить через елемент, який містить вузли, що лежать на стороні, на якій навантаження, що спричиняє напруження, невідоме. За такої схеми необхідна для досягнення достатньо високої точності кількість ліній просвічування є значно меншою, ніж для схеми *а*, у якій тільки перший промінь проходить через усі елементи, які містять вузли, розташовані на стороні $x = 0$. Оскільки напруження у цій задачі згасають з віддаллю від сторони прикладання навантаження, то й інформативність даних, отриманих за цією схемою на променях $x = const$, зменшується зі зростанням x. Проте, слід зазначити, що на практиці схему *б* значно складніше реалізувати, оскільки просвічування здійснюється через ту частину поверхні тіла, на якій діє зовнішнє навантаження, тож вона може бути недоступною для зондування.

Подібним чином можна дослідити й інші схеми сканування [12].

Отже, запропонований метод можна реалізовувати у такій послідовності. На першому етапі, розв'язуючи відповідні прямі задачі механіки методом скінченних елементів, слід вибрати необхідні параметри сітки розбиття, які забезпечують достатню точність апроксимації вихідної математичної моделі моделлю МСЕ. Відтак, виходячи із фізичного змісту задачі, слід вибрати схеми сканування, придатні для практичної реалізації. На наступному етапі необхідно, використовуючи метод числового експерименту, визначити необхідні для обраних схем сканування об'єми вимірювань. Останній етап — розв'язування конкретних обернених задач на основі даних, отриманих шляхом поляризаційно-оптичних вимірювань.

Література

[1] *Бейтс Р. Х. Т., Гарден К. Л., Петерс Т. М.* Реконструктивная вычислительная томография: Современные достижения и перспективы развития // ТИИЭР. — 1983. — Т. 71, № 3. — С. 84-104.

[2] *Хелгасон С.* Преобразование Радона. — М.: Мир, 1983. — 152 с.

[3] *Александров А. Я., Ахметзянов М. Х.* Поляризационно-оптические методы механики деформируемого твердого тела. — М: Наука, 1973. — 576 с.

[4] *Абен Х. К.* Интегральная фотоупругость. — Таллинн: Валгус, 1975. — 218 с.

[5] *Чекурін В. Ф.* Обернена задача неруйнівного оптичного контролю залишкових напружень у кусково-однорідних циліндричних оболонках // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2000. — Т. 36, № 2. — С. 93-102.

[6] *Чекурін В. Ф.* Математичні проблеми томографії тензорних полів у твердих тілах із залишковими напруженнями // Мат. методи і фіз.–мех. поля. — 2003. — Т. 46, № 3. — С. 133-148.

[7] *Чекурін В. Ф.* Варіаційний метод розв'язування задач томографії напруженого стану твердих тіл // ФХММ. — 1999. — Т. 35, № 5. — С. 23-32.

[8] *Чекурин В. Ф.* Об одном подходе к решению задач томографии напряженного состояния упругих тел с несовместными деформациями // Изв. РАН: Механика твердого тела. — 2000. — № 6. — С. 38-48.

[9] *Чекурин В. Ф.* Обратная задача неразрушающего контроля уровня закалки листового стекла // Изв. Академии Наук: Механика твердого тела. — 1998. — № 3. — С. 86-97.

[10] *Чекурин В. Ф.* Вариационный метод решения прямых и обратных задач теории упругости для полубесконечной полосы // Известия Академии Наук: Механика твердого тела. — 1999. — № 2. — С. 58-70.

[11] *Чекурін В. Ф.* Варіаційний граничноелементний метод розв'язування обернених задач інтегральної фотопружності // Доповіді НАН України. — 1998. — № 6. — С. 82-87.

[12] *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.* The Finite Element Method. Fifth edition. V. 1. Bristol Printed and bound by MPG Books Ltd. — 2000. — 689 p.

[13] IMSL. Fortran Subroutines for Mathematical Applications Math/Library Volumes 1 and 2.

[14] *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. — М.: Мир, 1990. — 280 с.

Finite Element Realization Method for Solving of Inverse Problems of Polarization-Optical Tomography of Stresses

Vasyl Chekurin, Taras Brych

A finite-element method for solving of inverse problem of polarization-optical tomography of stress fields in solids has been developed. The approach is based on the three components: (1) a mathematical model for stressed-strained state, (2) ray polarization-optical integrals, which connect the distributions of stress tensor components on sounding direction with measured on this direction polarization-optical parameters and (3) data of these parameters values measuring on some set of directions crossing the object. The idea is to apply a finite-element approximations for the model of stressed-strained state and for the system of ray integrals. On this basis, using the data of polarization-optical measuring, a redefined system of linear algebraic equations for the nodal displacements is formed. The system is solved using the least-squares method. To test the method and estimate influences of the finite-element model parameters, scheme of scanning and completeness of input data on the inverse problem numerical solutions a 2-D problem for rectangular domain has been studied.

Конечно-элементная реализация метода решения обратных задач поляризационно-оптической томографии напряжений

Василий Чекурин, Тарас Брыч

В статье разработанный ранее вариационный подход к решению обратных задач поляризационно-оптической томографии напряженно-деформированного состояния твердых тел реализован с использованием метода конечных элементов. Подход применяется, в частности, к задачам определения напряженно-деформированного состояния объектов, для которых отсутствует полная априорная информация относительно внешних нагрузок, необходимая для формулировки корректных прямых задач теории упругости. Чтобы компенсировать нехватку априорной информации используются данные измерений, полученные с применением метода фотоупругости. Реализация подхода базируется на трех составляющих: математической модели напряженно-деформированного состояния, подлежащего восстановлению, системы лучевых поляризационно-оптических интегралов, и результатов измерения значений лучевых интегралов на некотором множестве направлений, пересекающих объект исследования. Идея предложенного метода заключается в применении конечно-элементных аналогов для модели напряженно-деформированного состояния и для системы лучевых интегралов и формировании на этой основе с использованием данных физических измерений переопределенной системы линейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений, которая решается с применением метода наименьших квадратов. Проведен численный анализ двухмерных задач для тела прямоугольной формы, нагруженного по одной из сторон самоуравновешенными силами. Полученные результаты численных экспериментов подтвердили эффективность предложенного метода и позволили оценить параметры сетки конечных элементов и объемы данных физических измерение, достаточных для восстановления поля напряжений с необходимой точностью.

Отримано 06.11.06