УДК 17.958:519.65

Використання гетерогенних математичних моделей до розв’язування задач тепломасоперенесення в середовищах із тонкими неоднорідностями

Віталій Кухарський[1], Наталія Кухарська[2], Ярема Савула[3]

[1] к. ф.-м. н., Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: vetaley@franko.lviv.ua
[2] к. ф.-м. н., Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, вул. Клепарівська, 35, Львів, 79000
[3] д. ф.-м. н., професор, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: savula@franko.lviv.ua

У статті розглядається математична модель та алгоритми розв’язування задач перенесення субстанції у середовищах, що містять тонкі канали. Запропонована математична модель передбачає використання рівнянь дифузії в основному середовищі та рівнянь адвекції-дифузії у тонких включеннях. Складна структура середовища вимагає використання співвідношень різної вимірності у побудованій системі ключових рівнянь і застосування спеціально адаптованих схем методу скінченних елементів на етапі числового розв’язування задачі. Особливості геометрії середовища, відповідні методи математичного моделювання та числового дослідження є факторами, що обумовлюють гетерогенність запропонованої моделі.

Ключові слова: середовище з тонкими включеннями, дифузія, адвекція-дифузія, метод скінченних елементів.

Вступ. Значна кількість актуальних задач мікроелектроніки, біології, медицини, охорони довкілля передбачає дослідження процесів перенесення субстанції у середовищах складної структури. Такі середовища можуть містити включення, що за розмірами не суттєво відрізняються від інших складових середовища, а також включення, в яких один, два або й усі три розміри є суттєво менші від інших. Для знаходження розв’язків задач першого типу, як правило, використовують традиційні аналітичні та числові підходи. Задачі другого типу вимагають розробки спеціальних математичних моделей і відповідних алгоритмів числового розв’язування. У роботі запропоновано математичну модель тепломасоперенесення, яка дозволяє враховувати малу товщину криволінійних каналів, присутніх у середовищі.

1. Формулювання задачі

Розглянемо тіло з тонкими криволінійними каналами (рис. 1). Поділимо тіло на об’ємну частину та тонкі канали [1-4]. Розглянемо окремо кожен криволінійний канал Θ_i. Побудуємо для такого каналу криволінійну систему координат $\alpha_1\alpha_2$, пов’язану із заданою параметрично серединною кривою $x_1 = x_1(\alpha_1)$, $x_2 = x_2(\alpha_1)$ таким чином, щоб координата α_1 відповідала напрямку дотичної до кривої, а координата α_2 — напрямку нормалі.

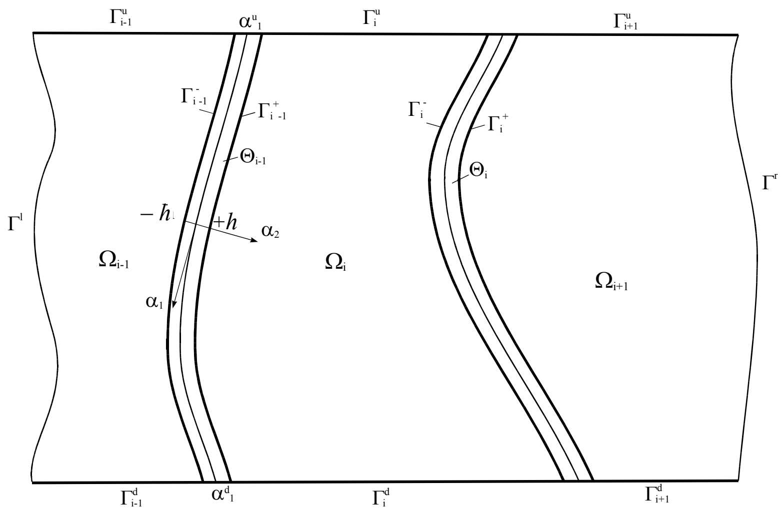

Рис. 1. Середовище з тонкими каналами

У введеній системі координат кожен криволінійний канал Θ_i можна описати наступним співвідношенням

$$\Theta_i = \left\{ \alpha_1 \alpha_2 : \alpha_1^d \le \alpha_1 \le \alpha_1^u, -h_i \le \alpha_2 \le h_i \right\}, \tag{1}$$

де h_i — півтовщина каналу, яка є малою величиною відносно характерного розміру тіла.

Компоненти g_{ij} метричного тензора ортогональної системи координат $\alpha_1\alpha_2$ мають вигляд

$$g_{11} = H^2,\ g_{22} = 1,\ g_{12} = g_{21} = 0;\ H = A\left(1 + \alpha_2 K\right),$$

де $A = \sqrt{\left(x_1'\right)^2 + \left(x_2'\right)^2}$ — коефіцієнт Ляме параметрично заданої кривої, $K = \left(x_2'' x_1' + x_1'' x_2'\right) / A^3$ — її кривина.

Зважаючи на малу товщину каналу, розподіл шуканої концентрації субстанції $T_{ch}^{(i)}$ у кожному з каналів, подамо у вигляді лінійного закону за змінною α_2

$$T_{ch}^{(i)} = t_1^{(i)}\left(\tau, \alpha_1\right) + \frac{\alpha_2}{h} t_2^{(i)}\left(\tau, \alpha_1\right) \tag{2}$$

де τ — час, $t_1^{(i)}\left(\tau, \alpha_1\right)$, $t_2^{(i)}\left(\tau, \alpha_1\right)$ — нові невідомі функції, $i = \overline{1, n}$.

Позначимо через T_i — розподіл концентрації субстанції у кожній із $n + 1$ об'ємних частин Ω_i тіла.

Математична модель задач тепломасоперенесення для середовища з n тонкими криволінійними каналами включає: основні співвідношення, граничні та початкові умови, отримані з урахуванням припущення про лінійний закон розподілу (2) невідомої функції за товщиною у тонких криволінійних каналах [2-4]; рівняння дифузії в областях Ω_i, граничні умови на границях Γ_i^u, Γ_i^d областей Ω_i, а також початкові умови в областях Ω_i, де $i=\overline{1,n+1}$; умови спряження на спільних границях $\Gamma_{i-1}^-,\Gamma_{i-1}^+$ об'ємних областей та каналів.

Таким чином, основні рівняння тепломасоперенесення в середовищі з тонкими криволінійними каналами можуть бути подані у наступному вигляді.

Рівняння адвективно-дифузійного перенесення в тонких каналах

$$\kappa_i^{(0)}\mathbf{M}_i\frac{\partial\,\mathbf{u}_i}{\partial\tau}+\kappa_i^{(0)}w_i\mathbf{L}_i\frac{\partial\,\mathbf{u}_i}{\partial\,\alpha_1}-\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{\lambda_i^{(0)}}{A_i}\frac{\partial\,\mathbf{u}_i}{\partial\alpha_1}+\mathbf{P}_i\lambda_i^{(0)}\mathbf{u}_i=\mathbf{f}_i, \tag{3}$$

де

$$\tau\in\left(0,\gamma\right],\quad \left(x_1,x_2\right)\in\Theta_{i-1},\ \mathbf{u}_i=(t_1^{(i)},t_2^{(i)})^T,$$

$$\mathbf{f}_i=\begin{pmatrix} q_i^{(0)}-\left(1+K_ih_i\right)q_i^+-\left(1-K_ih_i\right)q_i^- \\ q_i^{(1)}-\left(1+K_ih_i\right)q_i^++\left(1-K_ih_i\right)q_i^- \end{pmatrix},\qquad \mathbf{L}_i=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{h_i}{3}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_i=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{h_i}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{M}_i=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{K_ih_i}{3} \\ \dfrac{K_ih_i^2}{3} & \dfrac{h_i}{3}\end{pmatrix},$$

тут w_i — швидкість адвективного перенесення у напрямку α_1, $i=\overline{1,n}$;
крайові умови на границі кожного з каналів

$$\frac{\lambda_i^{(0)}}{A_i}\mathbf{N}_i\frac{d\mathbf{u}_i}{d\alpha_1}=\mu_i^u\left(u_i-u_i^u\right),\quad \alpha_1=\alpha_1^u, \tag{4}$$

$$\frac{\lambda_i^{(0)}}{A_i}\mathbf{N}_i\frac{d\mathbf{u}_i}{d\alpha_1}=\mu_i^d\left(u_i-u_i^d\right),\quad \alpha_1=\alpha_1^d; \tag{5}$$

початкові умови в тонкому каналі

$$\mathbf{u}_i\big|_{\tau=0}=\mathbf{u}_0^{(i)}, \tag{6}$$

де

$$\mathbf{N}_i=\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{K_ih_i}{3} \\ -\dfrac{K_ih_i^2}{3} & \dfrac{h_i}{3}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{u}_i\big|_{\tau=0}=\begin{pmatrix} t_1^{(i)}\left(0,\alpha_1\right) \\ t_2^{(i)}\left(0,\alpha_1\right)\end{pmatrix},\qquad \mathbf{u}_0^{(i)}=\begin{pmatrix} t_{1i}^0 \\ t_{2i}^0\end{pmatrix},$$

$$t_{1i}^0 = \frac{1}{2h_i}\int_{-h_i}^{h_i} T_{ch}^{(i)}(0,\alpha_1,\alpha_2)d\alpha_2, \quad t_{2i}^0 = \frac{3}{2h_i^2}\int_{-h_i}^{h_i} T_{ch}^{(i)}(0,\alpha_1,\alpha_2)\alpha_2 d\alpha_2;$$

рівняння дифузії в об'ємних частинах тіла

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\lambda_i\frac{\partial T_i}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\lambda_i\frac{\partial T_i}{\partial x_2} + \kappa_i\frac{\partial T_i}{\partial \tau} = q_i, \quad \tau\in(0,\gamma], \quad (x_1,x_2)\in\Omega_i, \tag{7}$$

тут $i=\overline{1,n+1}$, γ — довжина проміжку часу, $t_1^{(i)}(\tau,\alpha_1)$, $t_2^{(i)}(\tau,\alpha_1)$ — невідомі функції розкладу (2), T_i — шукані розподіли концентрацій субстанції в Ω_i, w_i — швидкість адвентивного перенесення в області тонкого включення Θ_i, $\kappa_i^{(0)} = 2h_i c_{ch}^{(i)}\rho_{ch}^{(i)}$, $\lambda_i^{(0)} = 2h_i\lambda_{ch}^{(i)}$, $q_i^{(0)} = \int_{-h_i}^{h_i} q_{ch}^{(i)}(1+\alpha_2 K_i)d\alpha_1$, $q_i^{(1)} = \int_{-h}^{h} q_{ch}^{(i)}(1+\alpha_2 K_i)\alpha_2 d\alpha_1$, $\lambda_{ch}^{(i)} = Const \ge 0$, $\lambda_{ch}^{(i)} = Const \ge 0$ — коефіцієнти дифузії (теплопровідності) у включеннях Θ_i, $\lambda_i = Const \ge 0$ — коефіцієнти дифузії (теплопровідності) у середовищах Ω_i, $\kappa_i^{(0)} = 1$, $\kappa_i = 1$ — для задач масоперенесення, $\kappa_i^{(0)} = Const \ge 0$; для задач теплопровідності: $\kappa_i = Const \ge 0$ — об'ємні теплоємності в Θ_i та Ω_i, $\rho_{ch}^{(i)}$, $c_{ch}^{(i)}$ — густина та коефіцієнти теплоємності у включеннях Θ_i, $q_{ch}^{(i)} = q_{ch}^{(i)}(\tau,\alpha_1)$, $q_i = q_i(\tau,x_1,x_2)$ — інтенсивності теплових джерел у Θ_i та Ω_i відповідно.

До цих рівнянь необхідно додати граничні умови на верхніх Γ_i^u та нижніх Γ_i^d границях кожної з об'ємних частин

$$-\lambda_i\frac{\partial T_i}{\partial n} = \beta_i^u\left(T_i - T_i^u\right), \quad (x_1,x_2)\in\Gamma_i^u, \tag{8}$$

$$-\lambda_i\frac{\partial T_i}{\partial n} = \beta_i^d\left(T_i - T_i^d\right), \quad (x_1,x_2)\in\Gamma_i^d, \tag{9}$$

умови ізольованості на лівій та правій границях тіла

$$-\lambda_0\frac{\partial T_0}{\partial n} = 0, \quad (x_1,x_2)\in\Gamma^l, \tag{10}$$

$$-\lambda_{n+1}\frac{\partial T_{n+1}}{\partial n} = 0, \quad (x_1,x_2)\in\Gamma^r, \tag{11}$$

n — зовнішня нормаль до границі, умови спряження на Γ_i^-, Γ_i^+

$$T_i = t_1^{(i)} - t_2^{(i)}, \quad \lambda_i\frac{\partial T_i}{\partial \alpha_2} = q_i^- \text{ на } \Gamma_i^-, \tag{12}$$

$$T_{i+1} = t_1^{(i)} + t_2^{(i)}, \quad -\lambda_i \frac{\partial T_{i+1}}{\partial \alpha_2} = q_i^+ \text{ на } \Gamma_i^+, \tag{13}$$

та початкові умови у внутрішніх точках об’ємних частин Ω_i тіла

$$T_i\left(0, x_1, x_2\right) = T_i^{(0)}. \tag{14}$$

2. Варіаційне формулювання

Для побудови варіаційного формулювання задачі стосовно областей Θ_i введемо простір

$$V = \left\{ v\left(\alpha_1\right) \middle| v\left(\alpha_1\right) \in W_2^{(1)}\left(\alpha_1^u, \alpha_1^d\right) \right\},$$

а стосовно областей Ω_i —

$$V^* = \left\{ v\left(x_1, x_2\right) \middle| v\left(x_1, x_2\right) \in W_2^{(1)}\left(\Omega_i\right) \right\}.$$

Зважаючи на громіздкість виведення та запису загального варіаційного формулювання задачі, наведемо її тільки для тонких криволінійних включень. Для цього введемо білінійні та лінійні форми

$$m\left(\mathbf{u}_i', \mathbf{v}\right) = \int_{\alpha_1^u}^{\alpha_1^d} \kappa^{(0)} \frac{d\mathbf{u}_i^T}{d\tau} \mathbf{M}_i^T \mathbf{v} A d\alpha_1, \quad a\left(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}\right) = \int_{\alpha_1^u}^{\alpha_1^d} \kappa^{(0)} \mathbf{W}_i \frac{d\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}}{d\alpha_1} \mathbf{L}_i^T \mathbf{v} d\alpha_1,$$

$$b\left(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}\right) = \int_{\alpha_1^u}^{\alpha_1^d} \frac{\lambda^{(0)}}{\mathrm{A}} \frac{d\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}}{d\alpha_1} \mathbf{N}_i^T \frac{d\mathbf{v}}{d\alpha_1} d\alpha_1 + \int_{\alpha_1^u}^{\alpha_1^d} \lambda^{(0)} \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{P}_i^T \mathbf{v} A d\alpha_1, \quad l\left(\mathbf{v}\right) = \int_{\alpha_1^u}^{\alpha_1^d} \mathbf{f}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{v} A d\alpha_1,$$

де $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_i & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ — довільна вектор-функція, компоненти якої v_1, $v_2 \in V$.

Тоді варіаційне формулювання матиме наступний вигляд.

Знайти вектор-функцію $\mathbf{u}_i = \left\{ u_1^{(i)}, u_2^{(i)} \right\}$, де $u_1^{(i)}, u_2^{(i)} \in L_2\left(0, \gamma; V\right)$, таку що

$$m\left(\mathbf{u}_i', \mathbf{v}\right) + a\left(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}\right) + b\left(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}\right) = l\left(\mathbf{v}\right), \tag{15}$$

$$m\left(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}^{(i)}{}_{\mathbf{0}}, \mathbf{v}\right) = 0, \tag{16}$$

$$\forall \mathbf{v} = \left\{ v_1, v_2 \right\}^{\mathrm{T}},$$

де $v_1, v_2 \in V$.

3. Числове розв'язування

Згідно з процедурою Гальоркіна, використаємо розклад за базисом

$$u_1^\eta(\tau,\alpha_1)=\sum_{j=1}^{N}u_{1j}(\tau)\varphi_j(\alpha_1),\quad u_2^\eta(\tau,\alpha_1)=\sum_{j=1}^{N}u_{2j}(\tau)\varphi_j(\alpha_1),\tag{17}$$

де $\mathbf{u}^{\boldsymbol{\eta}}=\left\{u_1^\eta,u_2^\eta\right\}^T$, $u_1^\eta(\tau,\alpha_1),\ u_2^\eta(\tau,\alpha_1)\in L_2\left(0,\gamma;V_\eta\right)$, $\varphi_i(\alpha_1)$ — базисні функції ($i=\overline{1,N}$).

У такий спосіб уведені напівдискретні апроксимації дозволяють отримати напівдискретизовану за просторовими змінними варіаційну задачу.

Знайти u^η такі, що

$$m\left(\mathbf{u}^{\boldsymbol{\eta}'},\tilde{\mathbf{u}}\right)+a\left(\mathbf{u}^{\boldsymbol{\eta}},\tilde{\mathbf{u}}\right)+b\left(\mathbf{u}^{\boldsymbol{\eta}},\tilde{\mathbf{u}}\right)=l\left(\tilde{\mathbf{u}}\right),\tag{18}$$

$$m\left(\mathbf{u}^{\boldsymbol{\eta}}(0,\alpha_1)-\mathbf{u}^{\mathbf{0}},\tilde{\mathbf{u}}\right)=0,\ \ \forall\tilde{\mathbf{u}}=\{\tilde{u}_1,\tilde{u}_2\}^T,\ \ \tilde{u}_1,\tilde{u}_2\in V_\eta,\tag{19}$$

де $\mathbf{u}^{\mathbf{0}}=\left\{u_1^0,u_2^0\right\}^T$. Потрібно визначити поведінку розв'язку в часі, тобто $2N$ невідомих функцій часу $u_{1j}(\tau),u_{2j}(\tau)$.

Дискретизація одновимірними квадратичними лагранжевими скінченними елементами передбачає поділ проміжку $\left[\alpha_1^u,\alpha_1^d\right]$ на скінченні елементи $\left[\alpha_1^{(k)},\alpha_1^{(k+1)}\right]$.

Скориставшись матричним поданням наближеного розв'язку на кожному елементі у випадку квадратичних апроксимацій, отримаємо

$$\mathbf{u}^\eta=\mathbf{T}_e\mathbf{g}_e,$$

де $\mathbf{T}_e=\begin{Bmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\end{Bmatrix}$, $\quad\mathbf{g}_e=\{u_{11},u_{12},u_{13},u_{21},u_{22},u_{23}\}^T$.

Використання двох змінних $u_1^{(i)}$, $u_2^{(i)}$ у співвідношеннях варіаційного формулювання для тонких каналів додає певні труднощі при розв'язуванні задачі. Це ускладнення зумовлене специфікою просторової сітки в області тонкого каналу, що дозволяє коректно врахувати умови спряження областей. При цьому маємо збільшення розміру локальних матриць методу скінченних елементів відповідно у два рази.

Розглянемо випадки використання лінійних і квадратичних апроксимацій. Побудовані локальні матриці на кожному скінченному елементі матимуть структуру, продиктовану виглядом білінійних форм.

Можливість зведення величин $u_1^{(i)}$, $u_1^{(i)}$ до $T_{ch}^{(i)}$, яка є характеристикою субстанції поряд із T_i, забезпечує матриця перетворень **B,** яка у випадку квадратичних апроксимацій має наступний вигляд

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Форма матриці **B** пов'язана з локальною нумерацією на скінченному елементі, яка передбачає роздвоєння вузлів у одній точці.

Дискретизація двовимірними скінченними елементами в областях Ω_i вимагає використання апроксимацій на криволінійних чотирикутниках. Використовуються восьмиточкові двовимірні елементи у вигляді криволінійних чотирикутників та відповідні біквадратичні системи базисних функцій. Інтегрування здійснюється з використанням квадратурних формул Гауса відповідного порядку.

Розв'язування задачі в часі проводилося з використанням різницевої схеми Кранка-Ніколсона.

4. Числові приклади

Розглянемо приклад нестаціонарної задачі теплоперенесення в середовищі з тонкими включеними криволінійними каналами, що мають інші фізичні характеристики (рис. 2).

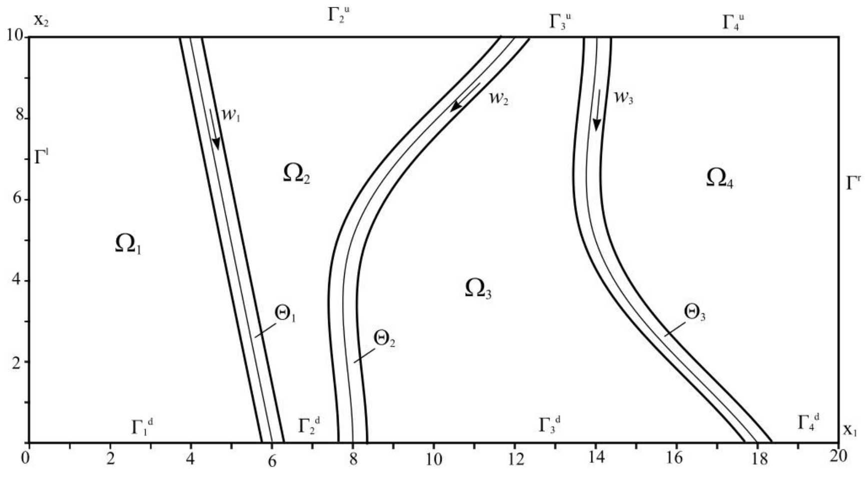

Рис. 2. Середовище з трьома каналами

Товщини каналів, коефіцієнти теплопровідності та об'ємної теплоємності, швидкості адвективного перенесення в каналах приймали такими: $h_1 = h_2 = h_3 = 0{,}01$ м, $w_1 = w_2 = w_3 = 0{,}4$ м/с, $\lambda_{ch}^{(1)} = \lambda_{ch}^{(2)} = \lambda_{ch}^{(3)} = 0{,}54\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{м с К}}$, $\kappa_{ch}^{(1)} = \kappa_{ch}^{(2)} = \kappa_{ch}^{(3)} = 4{,}182\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{м}^3\ \text{К}}$. Об'ємні ділянки тіла характеризуються однаковими коефіцієнтами теплопровідності й об'ємної теплоємності: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_4 = 0{,}03\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{м с К}}$, $\kappa_1 = \ldots = \kappa_4 = 1{,}789\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{м}^3\ \text{К}}$. На верхніх границях Γ_1^u, Γ_2^u, Γ_3^u, Γ_4^u та $\alpha_1 = \alpha_1^{(u)}$ (для кожного каналу) задаються значення температур зовнішнього середовища, що відповідають величинам $T_u^{(1)} = \ldots = T_u^{(4)} = 50^o\,\text{C}$, на нижніх — $T_d^{(1)} = \ldots = T_d^{(4)} = 0^o\,\text{C}$. При цьому коефіцієнти теплообміну на верхніх і нижніх границях вибирали рівними $\beta_1^d = \ldots = \beta_4^d = \beta_1^u = \ldots = \beta_4^u = 10^3$, $\mu_1^d = \ldots = \mu_3^d = \mu_1^u = \ldots = \mu_3^u = 10^3$.

Область дискретизується біквадратичними скінченними елементами. Побудована сітка включає 48 елементів (8 у напрямку x_2, 6 у напрямку x_1 у кожній із підобластей). Дискретизацію в часі проводили з кроком $\Delta\tau = 0{,}1$ с. Початкову температуру в усіх частинах середовища, у тому числі й у каналах, приймали рівною нулю.

На рис. 3 та 4 показано розподіл температур у середовищі з тонкими включеними каналами у момент часу $\tau = 500$ с для різних швидкостей адвективного перенесення $w_i = 0{,}1$ м/с та $w_i = 0{,}4$ м/с. Характер розподілу відповідає очікуваним даним і засвідчує, що швидкість адвективного перенесення у тонких включених каналах суттєво впливає на кінцевий розподіл субстанції в усьому середовищі.

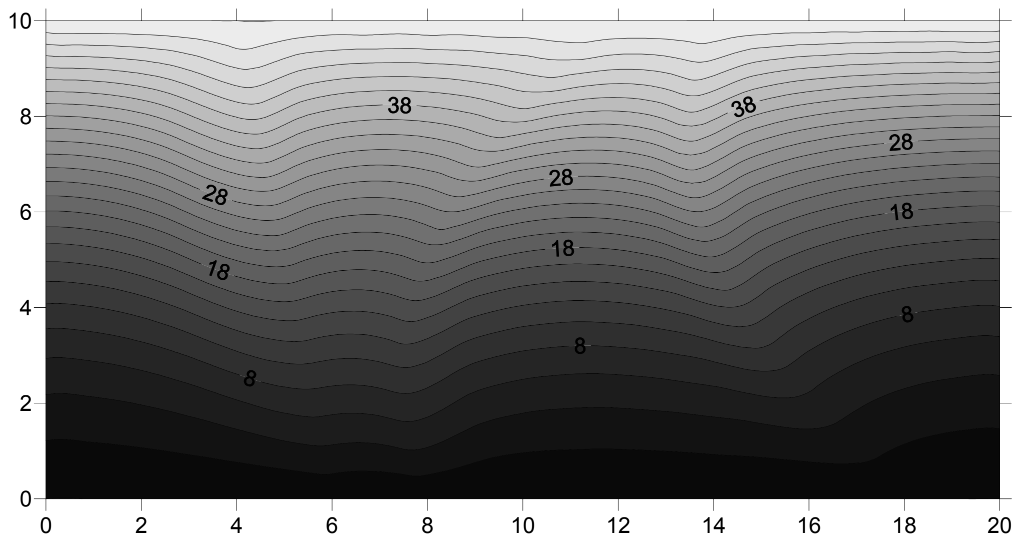

Рис. 3. Зображення області при значенні швидкості $w_i = 0{,}1$ м/с

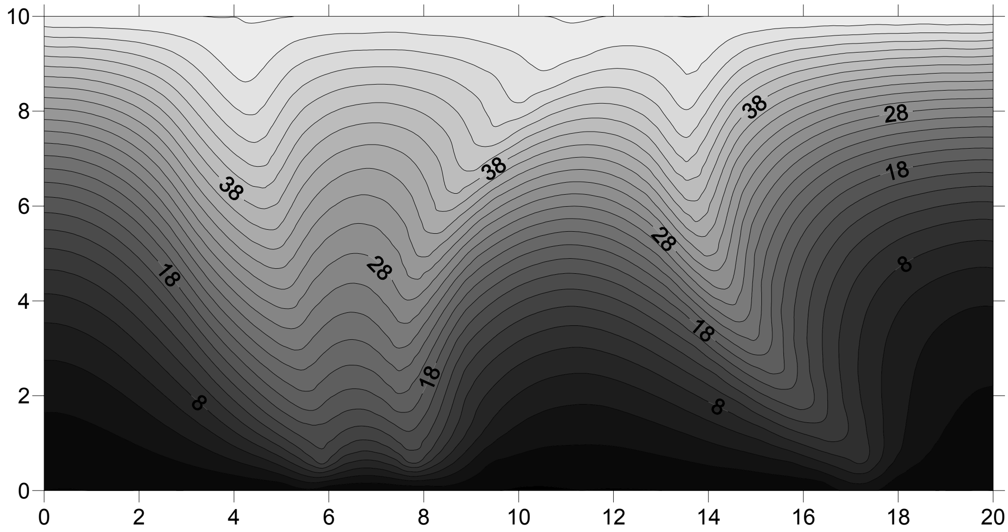

Рис. 4. Зображення області при значенні швидкості w_i = 0,4 м/с

Висновки. У роботі запропоновано математичну модель, що описує процес перенесення субстанції у середовищах із включеними тонкими криволінійними шарами. Побудовано відповідне варіаційне формулювання, запропоновані числові схеми розв'язування задачі. Розроблені алгоритми та відповідне програмне забезпечення дозволяє отримати числові розв'язки задачі, достовірність яких перевірена на спрощених одновимірних задачах, для яких відомі аналітичні розв'язки. Отримані результати засвідчують вагомість впливу чужорідних включень на процеси перенесення в усьому середовищі, що стає ще суттєвішим у разі адвективного перенесення у тонких каналах.

Література

[1] *Quarteroni A*. Multifields Modeling in Numerical Simulation of Partial Differential Equations // GAAM-Mitteilungen. — 1996. — Heft 1. — P. 45-63.

[2] *Savula Ya. H., Koukharskyi V. M., Chaplia Ye. Ya*. Numerical Analysis of Advection-Diffusion in the continuum with thin canal // Numerical Heat Transfer. Part A. — 1998. — 33(3). — P. 341-351.

[3] *Кухарський В., Савула Я*. Дослідження варіаційних задач адвекції-дифузії у середовищах із тонкими неоднорідностями // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. — 2000. — Вип. 2. — С. 155-162.

[4] *Кухарський В. М., Савула Я. Г., Копитко М. Ф*. Чисельне дослідження задач адвекції-дифузії у середовищах із включеними тонкими криволінійними шарами // Волиньськ. математ. вісник. — 2001. — Вип. 8. — С. 86-92.

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2006, вип. 4, 132-141

Application of Heterogeneous Mathematical Models for the Solving of Heat and Mass Transfer Problems in Environments with Thin Heterogeneities

Vitaliy Kukharskyy, Nataliya Kukharska, Yarema Savula

The mathematical models and algorithms of substance transfer problems in environments which contain thin channels are considered. Mathematical model provides use of diffusion equations in the basic environment and advection — diffusion equations in thin inclusions. The complex structure of environment, demands use of equations of different measurability in the constructed system of the key equations and applications of specially adapted schemes of finite element method for numerical solving of this problem. The complex structure of environment and apportionment methods of mathematical modeling and numerical research are conditioning factors for heterogeneity of the offered model.

Использование гетерогенных математических моделей к решению задач тепломассопереноса в средах с тонкими неоднородностями

Виталий Кухарский, Наталия Кухарская, Ярема Савула

В статье рассматриваются математические модели и алгоритмы решения задач переноса субстанции в телах с тонкими каналами. Предложенная математическая модель предусматривает использование уравнений диффузии в основной среде и уравнений адвекции-диффузии в тонких включениях. Сложная структура среды требует использования соотношений разной размерности в построенной системе ключевых уравнений, а также применения специально адаптированных схем метода конечных элементов на этапе численного решения задачи. Особенности геометрии среды и соответствующие методы математического моделирования и числового исследования являются факторами, обуславливающими гетерогенность предложенной модели.

Отримано 06.07.06