УДК 518.5

Рівномірне наближення функцій з інтерполюванням у заданих точках

Петро Малачівський

к. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів,
e-mail: psmal@cmm.lviv.ua

Розглядається задача найкращої рівномірної (чебишовської) апроксимації дискретних функцій із точним відтворенням її значень у заданих точках. Досліджено властивості такої апроксимації виразами, що задовольняють умові Хаара. Встановлено необхідні й достатні умови існування рівномірної апроксимації такими виразами з інтерполюванням у заданих точках і запропоновано алгоритм визначення її параметрів на основі схеми Ремеза із застосуванням модифікованого алгоритму Валле-Пуссена.

Ключові слова: рівномірне (чебишовське) наближення, наближення з інтерполюванням, точки чебишовського альтернансу, схема Ремеза.

Вступ. Нехай неперервна функція $f(x)$ ($f(x) \in C\,[\alpha, \beta]$) задана в $(n+1)$-ій різних точках відрізка $[\alpha, \beta]$.

$$X = \left\{ x \in X : \alpha \le x_1 < x_2 < \ldots < x_j < u < x_{j+1} < \ldots < x_n \le \beta \right\}, \tag{1}$$

вираз $F_m(a; x)$ з m параметрами $(m > 1)$ задовольняє умову Хаара [1] на відрізку $[\alpha, \beta]$ і вагова функція $w(x)$ неперервна на $[\alpha, \beta]$ така, що не набуває нульового значення на $[\alpha, \beta]$. Необхідно функцію $f(x)$ наблизити виразом $F_m(a; x)$ так, щоб в одній із точок множини X, позначимо її через u $(1 \le j \le n-1)$, значення функції $f(x)$, що дорівнює v ($f(u) = v$), відтворювалось точно

$$F_m(a;u) = v \tag{2}$$

і найбільша зважена похибка апроксимації

$$\Delta(a) = \max_{1 \le i \le n} \left|\Delta(a; x_i)\right|, \tag{3}$$

де

$$\Delta(a; x) = \left[f(x) - F_m(a; x)\right] / w(x), \tag{4}$$

була найменшою можливою на множині точок X (1).

Задача знаходження такого наближення виникає, коли з технічних вимог необхідно, щоб апроксимаційний вираз у певній точці відтворював точне значення деякої заданої функціональної залежності. Наприклад, якщо задано результати спостереження за деякою функціональною залежністю і з фізичних властивостей відоме її точне значення лише в одній із точок спостереження, скажімо u, а в решті точок —

із похибкою, зумовленою точністю вимірювання. Такі задачі зустрічаються, зокрема, під час проектування вимірювальних приладів [2], у яких певному значенню вихідного сигналу сенсора має відповідати конкретне значення вимірюваної величини, описі передавальних характеристик систем автоматизованого керування [3] й інших випадках [1, 4]. До визначення рівномірного наближення з інтерполюванням в одній або двох крайніх точках, які відповідають межам ланок, зводиться також задача побудови неперервних апроксимаційних сплайнів [4].

Нехай простір R_m коефіцієнтів виразу $F_m(a; x)$ — це m-мірний простір дійсних чисел. Клас виразів $F_m(a; x)$, що задовольняють співвідношення (2), характеризується деякою множиною параметрів $A = \{a_i\}_{i=1}^{m}$ $(A \in R_m)$, для яких ця умова справджується. Якщо існує точка $a^* \in A$, для якої досягається точна нижня межа найбільшої зваженої похибки апроксимації $\Delta(a)$

$$\Delta(a^*) = \inf_{A} \Delta(a), \qquad (5)$$

то вираз $F_m(a^*; x)$ на множині точок (1) є найкращим рівномірним наближенням функції $f(x)$ зі зваженою похибкою $w(x)$, яке у точці u точно відтворює значення функції — $f(u) = v$. Таке наближення, що задовольняє умови (2), (3), називають рівномірним наближенням з інтерполюванням або з умовою [1].

Рівномірне наближення з інтерполюванням виразами, що задовольняють умову Хаара, не відповідає умовам характеристичної теореми про найкраще рівномірне наближення. Властивості рівномірної апроксимації з інтерполюванням вивчались у роботах [1, 5, 6]. Зокрема, у роботах [1, 4, 7] встановлені необхідні й достатні умови існування найкращого рівномірного наближення з інтерполюванням многочленом і раціональним виразом, досліджено відповідні характеристичні властивості та запропоновано алгоритми для визначення параметрів наближення.

1. Характеристична властивість найкращого рівномірного наближення з інтерполюванням виразом, що задовольняє умову Хаара

Властивості найкращого рівномірного наближення з інтерполюванням в одній точці сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 1. Нехай неперервна функція $f(x)$ ($f(x) \in C\,[\alpha, \beta]$) задана в точках множини X (1), $w(x)$ — функція неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$ така, що не набуває нульового значення на $[\alpha, \beta]$ $\left(w(x) \neq 0,\ x \in [\alpha, \beta]\right)$ і вираз $F_m(a; x)$ з m параметрами ($m > 1$) задовольняє умову Хаара [1] на відрізку $[\alpha, \beta]$. Тоді найкраще рівномірне наближення функції $f(x)$ виразом $F_m(a; x)$ на множині точок X із ваговою функцією $w(x)$ і точним відтворенням її значення v у точці u ($f(u) = v$) існує і до того ж єдине. Для того, щоб вираз $F_m(a^*; x)$ був найкращим рівномірним наближенням функції $f(x)$ на множині точок X із ваговою функцією $w(x)$ й інтерполюванням у точці u необхідно й достатньо, щоб для точки u і ще деяких m відмінних від неї точок z_i $\left(i = \overline{1, m}\right)$ із множини X $\left(z_j \in X,\ z_j \neq u,\ j = \overline{1, m}\right)$, упорядкованих за зростанням

$$\alpha \le z_1 < z_2 < \ldots < z_m \le \beta , \tag{6}$$

виконувалися рівності

$$\begin{cases} F_m\left(a^*;\, u\right) = v \equiv f\left(u\right), \\ \left[f\left(z_i\right) - F_m\left(a^*; z_i\right)\right] / w\left(z_i\right) = \left(-1\right)^{i+\Theta\left(z_i - u\right)} \mu\,, \quad i = \overline{1,\, m}\,, \end{cases} \tag{7}$$

де

$$\left|\mu\right| = \max_{1 \le i \le n} \left| \left[f\left(x_i\right) - F_m\left(a^*; x_i\right)\right] / w\left(x_i\right) \right|,$$

а $\Theta\left(x\right)$ — функція Хевісайда

$$\Theta\left(x\right) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad x \ge 0. \end{cases} \tag{8}$$

Доведення. Нехай $F_m\left(b^*; x\right)$ — найкраще рівномірне наближення функції $f(x)$ на множині точок X із ваговою функцією $w(x)$ без інтерполяційної умови (2). Тоді, відповідно до характеристичної властивості найкращого рівномірного наближення [1], його параметри визначаються з системи рівнянь

$$f\left(\zeta_i\right) - F_m\left(b^*; \zeta_i\right) = \left(-1\right)^i \eta\, w\left(\zeta_i\right), \quad i = \overline{1,\, m+1}\,, \tag{9}$$

де ζ_i $\left(i = \overline{1,\, m+1}\right)$ — точки чебишовського альтернансу. Ці точки альтернансу впорядковані за зростанням $\zeta_i < \zeta_{i+1}$ $\left(i = \overline{1,\, m}\right)$ і такі, що належать множині (1), а модуль η — похибка апроксимації.

Розглянемо найкраще рівномірне наближення виразом $F_m(b;\, x)$ функції $f(x)$ на множині точок X із додатною ваговою функцією $w(x)$, яка в точці u множини X послідовно набуває значень

$$w\left(u\right) = 1/r, \quad r = 1, 2, 3, \ldots . \tag{10}$$

Параметри найкращого рівномірного наближення виразом $F_m(b;\, x)$ функції $f(x)$ з такою ваговою функцією $w(x)$ для кожного конкретного значення r однозначно визначаються з відповідної системи рівнянь (9). Це є наслідком того, що вираз $F_m(b;\, x)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$ справджує умову Хаара й у цьому разі система рівнянь (9) є системою незалежних лінійних рівнянь, яка на множині точок X має єдиний розв'язок щодо параметрів b_i $\left(i = \overline{1,\, m}\right)$ і похибки η.

Зі зменшенням значення вагової функції $w(x)$ (10) у точці u зростає значимість похибки апроксимації функції $f(x)$ у цій точці порівняно з похибкою апроксимації в решті точок множини (1), в яких значення вагової функції $w(x)$ дещо більше. Тому, починаючи з деякого значення r, точка u буде точкою альтернансу цього наближення. Окрім цієї точки u це наближення матиме ще m точок альтернансу ζ_i $\left(i = \overline{1,\, m}\right)$, упорядкованих за зростанням $\zeta_i < \zeta_{i+1}$ $\left(i = \overline{1,\, m-1}\right)$. Із врахуванням упорядкованості цих точок альтернансу щодо точки u, параметри найкращого рівномірного наближення виразом $F_m(b;\, x)$ функції $f(x)$ із ваговою функцією $w(x)$ (10) будуть визначатися з системи рівнянь

$$\begin{cases} f(u)-F_m\left(b^*;\,u\right)=\dfrac{(-1)^{1+\sum\limits_{i=1}^{m}\Theta(u-\zeta_i)}\eta}{r}, \\ \left[f(\zeta_i)-F_m\left(b^*;\zeta_i\right)\right]/\,w(\zeta_i)=(-1)^{i+\Theta(\zeta_i-u)}\eta, \qquad i=\overline{1,\ m}. \end{cases} \tag{11}$$

Оскільки система рівнянь (11) — це система незалежних лінійних рівнянь, то її розв'язок неперервно залежить від r [8]. Переходячи в системі рівнянь (11) до границі при $r \to \infty$, отримаємо

$$\begin{cases} f(u)-F_m\left(b^*;\,u\right)=0, \\ \left[f(\zeta_i)-F_m\left(b^*;\zeta_i\right)\right]/\,w(\zeta_i)=(-1)^{i+\Theta(\zeta_i-u)}\eta\,, \quad i=\overline{1,\ m}. \end{cases} \tag{12}$$

Вираз $F_m(b^*;\,x)$, параметри якого задовольняють цій системі рівнянь, апроксимує значення функції $f(x)$ із ваговою функцією $w(x)$ на множині точок X із похибкою не більшою за $|\eta|$ і його значення в точці u співпадає зі значенням функції $f(x)$ у цій точці. Отже, вираз $F_m(b^*;\,x)$ буде найкращою рівномірною апроксимацією функції $f(x)$ із ваговою функцією $w(x)$ на множині точок (1) й інтерполюванням у точці u. Оскільки за умовою теореми вираз $F_m(b;\,x)$ задовольняє умову Хаара, то система рівнянь (12) є системою незалежних лінійних рівнянь і відповідно має єдиний розв'язок щодо параметрів b_i^* $\left(i=\overline{1,\ m}\right)$ і похибки η. Таким чином, для функції $f(x)$ на множині точок X існує єдине найкраще рівномірне наближення виразом $F_m(b;\,x)$ із додатною ваговою функцією $w(x)$ й інтерполюванням у точці u.

Система рівнянь (12) еквівалентна системі рівнянь (7), отже для додатної вагової функції $w(x)$ справедливість теореми доведена.

Аналогічним чином можна довести існування єдиного найкращого рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом $F_m(b;\,x)$ на множині точок X з інтерполюванням у точці u у разі від'ємної вагової функції $w(x)$. У цьому випадку слід припустити, що вагова функція $w(x)$ у точці u із множини (1) послідовно набуває значень

$$w(u)=-1/r, \quad r=1,\,2,\,3,\,\ldots. \tag{13}$$

Теорему доведено.

Встановлена цією теоремою характеристична властивість найкращого рівномірного наближення з інтерполюванням полягає в тому, що кількість точок альтернансу для такого наближення дорівнює кількості параметрів апроксимуючого виразу. До того ж, у випадку найкращого рівномірного наближення з інтерполюванням порушується ще й звичний для чебишовського наближення порядок почергової зміни знаку похибки апроксимації у точках альтернансу. Для найкращого рівномірного наближення з інтерполюванням властиво те, що знаки похибки апроксимації у точках альтернансу, сусідніх із точкою інтерполювання, співпадають. Розглянемо, наприклад, рівномірне наближення виразом із трьома параметрами

$$Q_3(a\,;x)=a_0+a_1x+a_2e^x \tag{14}$$

деякої неперервної функції $f(x)$ з найменшою абсолютною похибкою й інтерполюванням у точці u. Цей вираз задовольняє умову Хаара для будь-яких дійсних значень x $\left(x \in (-\infty; \infty)\right)$ [9] і тому для нього справедлива *теорема 1*. Згідно цієї теореми, якщо точки альтернансу рівномірного наближення виразом (14) з інтерполюванням у точці u розташовані в такій послідовності

$$z_1 < z_2 < u < z_3, \tag{15}$$

то його коефіцієнти a_0, a_1 і a_2 задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} f(u) - a_0 - a_1 u - a_2 e^{u} = 0 \\ f(z_1) - a_0 - a_1 z_1 - a_2 e^{z_1} = \mu \\ f(z_2) - a_0 - a_1 z_2 - a_2 e^{z_2} = -\mu \\ f(z_3) - a_0 - a_1 z_3 - a_2 e^{z_3} = -\mu. \end{cases} \tag{16}$$

У цьому разі знаки похибки апроксимації в точках альтернансу z_2 і z_3 співпадають, оскільки точка інтерполювання u розташована поміж цими точками альтернансу (15). Для знаходження точок альтернансу під час найкращої рівномірної апроксимації з інтерполюванням можна застосувати схему Ремеза [1] з уточненням наближення до точок альтернансу за модифікованим алгоритмом Валле-Пуссена [10].

Характеристична властивість найкращого рівномірного наближення з інтерполюванням дещо спрощується і знак похибки апроксимації у точках альтернансу набуває звичного знакозмінного характеру, якщо точка інтерполювання співпадає з однією із крайніх точок відрізка, на якому шукається наближення. Наприклад, нехай потрібно знайти найкраще рівномірне наближення функції $f(x)$ виразом $F_m(a; x)$, що задовольняє умову Хаара на множині точок X з ваговою функцією $w(x)$ й інтерполюванням у точці u, яка співпадає з точкою α ($u = \alpha$) чи β ($u = \beta$). У цьому випадку, згідно *теореми 1*, параметри найкращого рівномірного наближення задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} F_m(a^*; u) = f(u) \\ \left[f(z_i) - F_m(a^*; z_i)\right] / w(z_i) = (-1)^i \mu, \quad i = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{17}$$

де z_i $\left(i = \overline{1, m}\right)$ — точки альтернансу. Точки альтернансу повинні бути упорядкованими за зростанням $z_i < z_{i+1}$ $\left(i = \overline{1, m-1}\right)$ і не співпадати відповідно з точкою α, якщо $u = \alpha$, чи β, якщо $u = \beta$. У цьому випадку для уточнення наближення до точок альтернансу під час застосування схеми Ремеза, можна використати класичний алгоритм Валле-Пуссена [1].

Властивість, встановлену *теоремою 1*, можна узагальнити для найкращого рівномірного наближення виразом, що задовольняє умову Хаара, з інтерполюванням у декількох точках.

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2006, вип. 4, 142-150

2. Найкраще рівномірне наближення виразом, що задовольняє умову Хаара, з інтерполюванням у декількох точках

Нехай неперервна функція $f(x)$ ($f(x) \in C[\alpha, \beta]$) задана в $(n+k)$ різних точках відрізка $[\alpha, \beta]$

$$X_k = \{x \in X_k : \alpha \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{j_1} < u_1 < x_{j_1+1} < \ldots$$

$$\ldots < x_{j_k} < u_k < x_{j_k+1} < \ldots < x_n \le \beta\} \;, \tag{18}$$

вираз $F_m(a; x)$ із m параметрами $(m > k)$ задовольняє умову Хаара на відрізку $[\alpha, \beta]$ і вагова функція $w(x)$ неперервна на $[\alpha, \beta]$ така, що не набуває нульового значення на $[\alpha, \beta]$. Необхідно функцію $f(x)$ наблизити виразом $F_m(a;x)$ так, щоб у точках u_i ($i = \overline{1, k}$) її значення v_i $\left(f(u_i) = v_i,\, i = \overline{1, k}\right)$ відтворювались точно

$$F_m(a; u_i) = v_i\,, \quad i = \overline{1, k} \tag{19}$$

і найбільше значення зваженої похибки апроксимації (3) було найменшим можливим на множині точок X_k. Таке наближення називають рівномірним наближенням з інтерполюванням у k точках [1].

Властивості найкращого рівномірного наближення виразом, що задовольняє умову Хаара, з інтерполюванням у декількох точках сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 2. Нехай неперервна функція $f(x)$ ($f(x) \in C[\alpha, \beta]$) задана в точках множини X_k (18), $w(x)$ — функція неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$ така, що не набуває нульового значення на $[\alpha, \beta]$ $\left(w(x) \ne 0,\ x \in [\alpha, \beta]\right)$ і вираз $F_m(a;x)$ з m параметрами $(m > k)$ задовольняє умову Хаара [1] на відрізку $[\alpha, \beta]$. Тоді найкраще рівномірне наближення функції $f(x)$ виразом $F_m(a; x)$ на множині точок X_k з ваговою функцією $w(x)$ і точним відтворенням її значень v_i $\left(i = \overline{1, k}\right)$ у відповідних точках u_i $\left(f(u_i) = v_i, i = \overline{1, k}\right)$ існує і до того ж єдине. Для того, щоб вираз $F_m(a^*; x)$ був найкращим рівномірним наближенням функції $f(x)$ на множині точок X_k з ваговою функцією $w(x)$ й інтерполюванням у точках u_i $\left(i = \overline{1, k}\right)$ необхідно й достатньо, щоб для точок u_i $\left(i = \overline{1, k}\right)$ і ще деяких $(m - k + 1)$-ої відмінних від них точок z_i $\left(i = \overline{1, m-k+1}\right)$ із множини (18) $\left(z_j \in X_k,\ z_j \ne u_i,\ j = \overline{1, m-k+1},\ i = \overline{1, k}\right)$, упорядкованих за зростанням

$$\alpha \le z_1 < z_2 < \ldots < z_{m-k+1} \le \beta\,, \tag{20}$$

виконувалися рівності

$$\begin{cases} F_m\left(a^*; u_i\right) = v_i\,, \quad i = \overline{1, k}, \\ \left[f(z_i) - F_m\left(a^*; z_i\right)\right] / \, w(z_i) = (-1)^{i + \Theta\left[\prod\limits_{j=1}^{k}(z_i - u_j)\right]} \mu\,, \quad i = \overline{1, m-k+1}, \end{cases} \tag{21}$$

де

$$|\mu| = \max_{1\le i\le n} \left| \left[f(x_i) - F_m\left(a^*; x_i\right) \right] / w(x_i) \right|,$$

а $\Theta(x)$— функція Хевісайда (8).

Доведення. Справедливість цієї теореми у випадку однієї точки інтерполювання $k = 1$ встановлює *теорема 1*. Послідовно збільшуючи кількість точок інтерполювання, долучаючи щоразу по одній новій точці u_i ($i=\overline{2,k}$), і повторюючи для кожної з них міркування, викладені при доведенні *теореми 1*, можна показати її справедливість для всіх k точок інтерполювання.

Згідно цієї теореми кількість точок альтернансу найкращого рівномірного наближення з інтерполюванням у декількох точках дорівнює $m - k + 1$, де m — кількість параметрів апроксимуючого виразу, а k — кількість точок інтерполювання. Крім того, подібно до найкращого рівномірного наближення з інтерполюванням в одній точці, характеристична властивість наближення з інтерполюванням у декількох точках також проявляється в дотриманні співпадіння знаків похибки апроксимації у точках альтернансу, сусідніх із точкою інтерполювання. Це правило стосується усіх точок інтерполювання. Наприклад, розглянемо рівномірне наближення з найменшою абсолютною похибкою деякої неперервної функції $f(x)$ виразом із п'ятьма параметрами

$$Q_5(a;x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4e^x \tag{22}$$

й інтерполюванням у двох точках u_1 і u_2. Оскільки співвідношення (22) задовольняє умову Хаара для будь-яких дійсних значень x $\left(x \in (-\infty; \infty)\right)$ [9], то для нього справедлива *теорема 2*. Відповідно до цієї теореми рівномірне наближення виразом (22) з найменшою абсолютною похибкою й інтерполюванням у точках u_1 і u_2 матиме чотири точки альтернансу z_i $\left(i = \overline{1, 4}\right)$. Нехай ці точки альтернансу розташовані в такій послідовності щодо точок інтерполювання u_1 і u_2

$$z_1 < u_1 < z_2 < u_2 < z_3 < z_4 . \tag{23}$$

Згідно альтернансної властивості, встановленої *теоремою 2*, коефіцієнти a_i $\left(i = \overline{0,4}\right)$ у співвідношенні (22) і значення похибки апроксимації μ задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} f(u_1) - a_0 - a_1u_1 - a_2u_1^2 - a_3u_1^3 - a_4e^{u_1} = 0 \\ f(u_2) - a_0 - a_1u_2 - a_2u_2^2 - a_3u_2^3 - a_4e^{u_2} = 0 \\ f(z_1) - a_0 - a_1z_1 - a_2z_1{}^2 - a_3z_1{}^3 - a_4e^{z_1} = \mu \\ f(z_2) - a_0 - a_1z_2 - a_2z_2{}^2 - a_3z_2{}^3 - a_4e^{z_2} = \mu \\ f(z_3) - a_0 - a_1z_3 - a_2z_3{}^2 - a_3z_3{}^3 - a_4e^{z_3} = \mu \\ f(z_4) - a_0 - a_1z_4 - a_2z_4{}^2 - a_3z_4{}^3 - a_4e^{z_4} = -\mu . \end{cases} \tag{24}$$

Оскільки точки інтерполювання u_1 і u_2 розташовані поміж точками альтернансу z_1, z_2 і z_3, то знаки похибки апроксимації у цих точках альтернансу співпадають.

Характеристична властивість найкращого рівномірного наближення з інтерполюванням у двох точках дещо спрощується, і знак похибки апроксимації у точках альтернансу набуває звичного знакозмінного характеру, якщо точки інтерполювання співпадають із крайніми точками відрізка, на якому шукається наближення. Наприклад, нехай потрібно знайти найкраще рівномірне наближення функції $f(x)$ виразом $F_m(a; x)$, що задовольняє умову Хаара, на множині точок X_k з ваговою функцією $w(x)$ й інтерполюванням у точках u_1 і u_2, які співпадають відповідно з точками α і β ($u_1 = \alpha$, $u_2 = \beta$). У цьому випадку, згідно *теореми 2*, матимемо $(m-1)$-у точку альтернансу та параметри найкращого рівномірного наближення з абсолютною похибкою задовольнятимуть систему рівнянь

$$\begin{cases} F_m\left(a^*;\, u_1\right) = f\left(u_1\right) \\ F_m\left(a^*;\, u_2\right) = f\left(u_2\right) \\ \left[f\left(z_i\right) - F_m\left(a^*; z_i\right)\right] / w\left(z_i\right) = (-1)^i \mu\,, \quad i = \overline{1,\, m-1}, \end{cases} \tag{25}$$

де z_i $\left(i = \overline{1,\, m-1}\right)$ — точки альтернансу. Ці точки альтернансу повинні бути впорядкованими за зростанням $z_i < z_{i+1}$ $\left(i = \overline{1,\, m-2}\right)$ і не співпадати з точками α і β.

Висновок. Найкраща рівномірна апроксимація функцій із точним відтворенням її значень у заданих точках виразами, що задовольняють умову Хаара, характеризується альтернансною властивістю (21). Згідно з цією властивістю кількість точок альтернансу найкращого рівномірного наближення з інтерполюванням у декількох точках дорівнює $m - k + 1$, де m — кількість параметрів апроксимуючого виразу, а k — кількість точок інтерполювання. Крім того, характеристична властивість наближення з інтерполюванням у декількох точках проявляється ще в дотриманні умови співпадіння знаків похибки апроксимації в точках альтернансу, сусідніх із точкою інтерполювання. Для визначення параметрів такої апроксимації можна застосувати схему Ремеза з одноточковим уточненням наближення до точок чебишовського альтернансу за модифікованим алгоритмом Валле-Пуссена.

Література

[1] *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Приближение функций для технических приложений. — К.: Наук. думка, 1980. — 352 с.
[2] Температурные измерения / *Геращенко О. А., Гордов А. И., Еремина А. К.* и др. — К.: Наук. думка, 1989. — 704 с.
[3] Методы и устройства интерпретации экспериментальных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов / *Верлань А. Ф., Адбусадаров Б. Б., Игнатенко А. А., Максимович Н. А.* — К.: Наук. думка, 1993. — 208 с.
[4] *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами. — К.: Наук. думка, 1989. — 272 с.

[5] *Кондратьев В. П.* Равномерная аппроксимация с ограничениями интерполяционного типа // Алгоритмы и программы приближения функций. — Свердловск: Ин-т матем. и мех. УНЦ АН СССР, 1981. — С. 40-69.
[6] *Dunham C., Zhu C.* Strong uniqueness of nonlinear Chebyshev approximation (with interpolation) // Numerical mathematics and computing, Proc. 20th Manitoba Conf., Winnipeg / Can. 1990, Congr. Numerantium 80. P 161-169 (1991).
[7] *Мельничок Л. С., Попов Б. А.* Наилучшее приближение табличных функций с условием // Алгоритмы и программы для вычисления функций на ЭЦВМ. — К.: Ин-т кибернетики, 1977. — Вып. 4. — С. 189-200.
[8] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников. — М.: Мир, 1977. — 831 с.
[9] *Ремез Е. Я.* Основы численных методов чебышевского приближения. — К.: Наук. думка, 1969. — 623 с.
[10] *Малачівський П.* Модифікований алгоритм Валле-Пуссена // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2005. — Вип. 2. — С. 159-166.

Uniform Approximation of Function with Interpolation in the Choosed Points

Petro Malachivskyy

It the problem of the best uniform (Chebyshev) approximation for a discrete function with exact reproduction of its values in certain given points is considered. The properties of such approximation by expressions under Haar condition are studied. Necessary and sufficient conditions of approximation existence are established as well as the Remez scheme is proposed for determining the approximation parameters with application of modificate Vallee-Poussin algorithm.

Равномерное приближение функций с интерполированием в заданных точках

Петро Малачивский

Рассматривается задача наилучшей равномерной (чебишевской) аппроксимации дискретных функций с точным восстановлением ее значений в заданных точках. Исследованы свойства такой аппроксимации выражениями, которые удовлетворяют условию Хаара. Определены необходимые и достаточные условия существования равномерной аппроксимации такими выражениями с интерполированием в заданных точках и предложен алгоритм определения ее параметров на основании схемы Ремеза с применением модифицированного алгоритма Валле-Пуссена.

Отримано 03.10.06