

## Вплив дисперсії розмірів пор на напружено-деформований стан пористого шару при несиметричному осушенні

Богдана Гайвась

К. ф.-м. н., Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, Україна

*Сформульовано незв'язану задачу несиметричного осушення пористого шару, розв'язання якої полягає в послідовному знаходженні поля вологовмісту з наступним визначенням напружено-деформованого стану за заданими вологісними дисторсіями. Вплив дисперсії розмірів пор враховується на першому етапі задачі осушення, яка формулюється з урахуванням конвективного, дифузійного та капілярного механізмів масоперенесення в порах. Такий вплив проявляється, зокрема, у виникненні між зонами осушених і насичених рідиною пор двофазної зони, ширина якої змінюється у процесі осушення. Механічні напруження найбільшого значення досягають в області двофазної зони. Рівень напружень у разі врахування дисперсії розмірів пор вищий, ніж без такого врахування.*

**Ключові слова:** осушення, дисперсія розмірів пор, пружний пористий шар, двофазна зона, напружено-деформований стан.

**Вступ.** Математичне моделювання процесу осушення базується на виборі моделі структури пористого матеріалу, врахуванні специфіки багатофазного масоперенесення (взаємодії фаз між собою, врахуванні фазових і капілярних сил, які визначають взаємний розподіл фаз в елементарному фізичному об'ємі пористого тіла з однієї сторони, а з другої — є рушійними силами процесу), формулюванні крайових задач, які відображають взаємодію зовнішнього середовища з пористим матеріалом при різних способах інтенсифікації сушіння.

Побудові моделей осушення пористих тіл присвячено низку праць, зокрема, [1-4]. У монографії [5] процес масоперенесення у пористих тілах вивчається із використанням капілярних моделей, згідно яких простір пор моделюють системою каналів із певними геометричними властивостями. У моделі однакових паралельних капілярів вводять еквівалентний радіус, рівний радіусу циліндричного капіляра, в якому рідина піднімається на висоту виміряного капілярного підйому змочуючої рідини в пористому середовищі. Такі моделі узагальнюють шляхом введення у розгляд системи паралельних капілярів різних радіусів. При цьому приймають, що всі капіляри пов'язані між собою системою мікропор. Для докладнішого вивчення взаємодії гідродинамічних, теплових і масообмінних процесів у роботі [6] на прикладі ізотермічної сушки досліджено взаємовплив деформування та масоперенесення в пористому шарі.

У цій роботі для врахування впливу структурних параметрів пористого тіла на процес осушення будемо його описувати з використанням капілярної моделі, згідно якої пори розглядають як систему взаємозв'язаних паралельних капілярів різних радіусів. Напружений стан тіла будемо визначати на базі гомогенізованої моделі вологопружного тіла за встановленим розподілом вологовмісту.

Метою роботи є дослідження впливу дисперсії розмірів пор на напружено-деформований стан тіла. У більшості робіт щодо осушення пористих тіл питання про вплив дисперсії розмірів пор на процес осушення не досліджувалося. За рушійні сили вологоперенесення у газовій фазі прийнято різницю атмосферного тиску та тиску пароповітряної суміші в порах. Рушійними силами вологоперенесення у рідкій фазі є градієнти капілярних сил. У процесі осушення від вологи вивільняються насамперед найширші пори, які виходять на поверхню тіла. Вузькі пори при цьому залишаються заповненими рідиною, яка під впливом різниці капілярних тисків витікає з ширших пор. Таким чином, біля поверхні тіла формується двофазна зона, ширина якої змінюється з часом. Домінантними механізмами вологоперенесення у ній є конвективно-дифузійне перенесення пари та капілярне натікання рідини. Надалі двофазна зона переміщується вглиб тіла. З боку поверхні осушення вона межує із зоною осушених пор, а з внутрішньої сторони — із зоною насичених рідиною пор. Долі насичених рідиною й осушених пор у двофазній зоні визначаються функцією розподілу пор за радіусами. У процесі осушення змінюється розподіл вологовмісту тіла, яке поступово насичується газом. Зменшення вологовмісту призводить до усадки матеріалу та виникнення відповідних механічних деформацій і напружень.

## **1. Постановка та розв'язування задачі осушення**

Розглянемо віднесений до декартової системи координат  $(x, y, z)$  початково насичений водою пористий безмежний шар, який займає область  $0 < y < L_0$ . Радіус  $r$  пор є випадковою величиною зі щільністю розподілу ймовірностей  $f(r)$ . Радіуси пор належать проміжку  $[r_{\min}, r_{\max}]$ , де  $r_{\min}$  є значно більше від середньої довжини вільного пробігу молекул газу так, що кнудсенівської дифузії не виникає. Поверхнями  $y = 0, y = L_0$  шар контактує з газовим середовищем, яке є сумішшю повітря та ненасиченої водяної пари. Вологість шару будемо характеризувати параметром відносної насиченості  $\kappa_f$ , який визначається як відношення маси рідини в тілі в актуальний момент часу до її значення в початковий момент. Вважаємо, що насиченість змінюється тільки за товщиною пори. При цьому відтік вологи спостерігається лише через поверхню  $y = L_0$ .

Перенесення повітря та пари в газовій зоні  $L_{\max} < y < L_0$  всередині шару описується рівняннями Стефана-Максвелла [5] ( $L_{\max}$  — координата межі контакту газової та двофазної зони всередині пористого шару)

$$\gamma_a \frac{K}{\mu_g} \frac{\partial P}{\partial y} + D \frac{\partial \gamma_a}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \gamma_v \frac{K}{\mu_g} \frac{\partial P}{\partial y} + D \frac{\partial \gamma_v}{\partial y} \right) = 0. \quad (1)$$

Тут  $(\gamma_a/M_a + \gamma_v/M_v)RT = P$ ,  $P$  — тиск газу в порах;  $\gamma_v, \gamma_a$  — густина пари та повітря в порах;  $M_v, M_a$  — молекулярні ваги пари та повітря;  $D$  — коефіцієнт бінарної дифузії у пористому тілі;  $R$  — газова стала;  $T$  — абсолютна температура,  $K$  — коефіцієнт проникливості тіла щодо газу;  $\mu_g$  — коефіцієнт динамічної в'язкості газу.

Умови конвективного масообміну на поверхні  $y = L_0$  мають вигляд

$$\gamma_v \frac{K}{\mu_g} \frac{\partial P}{\partial y} + D \frac{\partial \gamma_v}{\partial y} = -j_1, \quad \gamma_a = \gamma_{a1}, \quad (2)$$

де  $j_1 = \beta(\gamma_v - \gamma_{v1})$ ,  $\gamma_{v1}, \gamma_{a1}$  — густина пари та повітря у зовнішньому середовищі, з яким межує пористий шар,  $\beta$  — коефіцієнт масообміну. У випадку моделі циліндричних капілярів різних радіусів на рухомій границі «газ–двофазна зона»  $y = L_{\max}$  і у двофазній зоні вважаємо, що внаслідок великої площі контакту фаз «рідина–газ» пара є насиченою

$$\gamma_v = \gamma_n \text{ на поверхні } y = L_{\max}, \quad (3)$$

де  $\gamma_n$  — густина насиченої пари.

Без урахування дисперсії розмірів пор (у випадку моделі паралельних капілярів однакового радіуса) двофазна зона відсутня й  $y = L_{\max}$  відповідає границі розділу рідина–газ. Границя розділу «рідина–двофазна зона» співпадає з поверхнею  $y = L_{\min}$ .

Кількісна оцінка показує, що в двофазній зоні ( $L_{\max}, L_{\min}$ ) потік вологи підсмоктування визначається потоком рідини  $\gamma_L \frac{K_L}{\mu_L} g_L \frac{dP_k(y)}{dy}$ , тут  $K_L$  — коефіцієнт про-

никливості відносно рідини в двофазній зоні;  $\mu_L$  — коефіцієнт в'язкості рідини;  $\gamma_L$  — густина рідини,  $P_k = 2\sigma \cos \theta / \rho_k$  — капілярний тиск;  $\theta$  — кут змочування;  $\rho_k$  — радіус капілярів;  $\sigma$  — поверхневий натяг рідини; функція  $g_L(y)$  визначає відносну долю насичених рідиною пор у перерізі  $y$  і визначається через щільність розподілу пор за радіусами  $\phi(\rho)$  формулою  $g_L(y) = \int_{\rho_{\min}}^{\rho_f(y)} \phi(\rho) d\rho$ . Потік вологи

в газовій зоні визначається потоком пари  $j$ , який отримується з розв'язку задачі (1)-(3). Задача масоперенесення у двофазній зоні ( $L_{\max}, L_{\min}$ ) зводиться до такої крайової задачі

$$\gamma_L \frac{K_L}{\mu_L} g_L \frac{dP_k}{dy} = j \quad (4)$$

за умови

$$\rho_f(L_0) = \rho_{\min}, \quad (5)$$

де  $\rho_f$  — критичний радіус пори.

Для визначення коефіцієнта проникливості  $K_L$  рідини маємо  $K_L(y) = \frac{k_{L0}}{\rho^2} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_f(y)} \varphi(\rho) \rho^2 d\rho$ , де  $k_{L0}$  — коефіцієнт проникливості рідини у насиченому тілі,

$$\text{а } \overline{\rho^2} = \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \varphi(\rho) \rho^2 d\rho.$$

У результаті розв'язування нелінійної крайової задачі (1)-(3) отримано розподіл густини пари  $\gamma_v$  за товщиною шару залежно від безрозмірної координати рухомої внутрішньої границі осушеної зони  $\kappa_m$ ,

$$\gamma_v(\kappa, \kappa_m) = \gamma_n \left[ a_1 + \sqrt{a_4(\kappa_m) + a_3(\kappa_m)|\kappa|} \right], \quad a_1 = -\frac{1+a}{b}, \quad a_2 = (1-a_1)^2,$$

$$a_3 = 2a_1\beta'(\eta_1 - \eta_0), \quad a_4 = a_2 - a_3\kappa_m, \quad a = DM_a / \left[ (K/\mu_g) \gamma_{a1} RT \right],$$

$$b = \gamma_n M_a / (\gamma_{a1} M_v), \quad \eta_0 = \gamma_{v1} / \gamma_n, \quad \kappa = y / L_0.$$

$\eta_1, \eta_0$  — безрозмірна густина пари на стінці та в навколишньому середовищі відповідно,  $\beta' = L_0\beta/D$ ,  $\kappa_m$  — координата границі контакту двофазної й осушеної зон.

Розв'язок задачі (4), (5) дозволяє знайти залежність безрозмірної координати  $\kappa_f$  критичного радіуса  $\rho_f$  від координати  $\kappa_m$  границі контакту двофазної й осушеної зон і параметра  $z_f = \rho_{\min} / \rho_f$ . Для рівномірного закону розподілу маємо

$$\kappa_f = \kappa_m - \frac{2 + 7z_f - 6z_f^4 + 6z_f^3 \ln z_f - 3z_f}{6Az_f^3}, \quad (6)$$

де  $A$  залежить від густини потоку пари в порах, величини максимального та мінімального радіусів, товщини пористого шару, густини, в'язкості та коефіцієнта проникливості рідини. Вираз для  $A$  не записуємо у зв'язку з його громіздкістю. Покладаючи у формулі (6)  $\rho_f = \rho_{\max}$ , отримуємо співвідношення для визначення безрозмірної координати  $\kappa_f = \kappa_{\min}$  границі контакту двофазної та насиченої рідиною зон.

Означимо параметри вологовмісту  $\tilde{w}$  у різних зонах шару

$$\tilde{w}_0 = \frac{\Pi\gamma_L}{(1-\Pi)\gamma_s} \quad (7)$$

— параметр початкового вологовмісту,

$$\tilde{w} = w_L = \frac{\Pi\gamma_L\kappa_{\min}}{(1-\Pi)\gamma_s} \quad (8)$$

— вологовміст у рідинній зоні,

$$\tilde{w} = w_v = \frac{\Pi\gamma_v(1-\kappa_m)}{(1-\Pi)\gamma_s} \quad (9)$$

— вологовміст в осушеній зоні. У формулах (7)-(9)  $\Pi$  — пористість,  $\gamma_s$  — густина скелета тіла. Зміна вологовмісту в пористому шарі приведе до його деформування та виникнення внутрішніх механічних напружень.

## 2. Визначення напружено-деформованого стану шару

Залежність між деформаціями та напруженнями з врахуванням зміни вологовмісту у процесі осушення така [2]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + Q(y,t) \delta_{ij}, \quad (10)$$

де  $Q(y,t) = \beta_w \eta(y,t)$  — дисторсія;  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коефіцієнт Пуассона,  $\eta(y,t) = \tilde{w} - \tilde{w}_0$ ,

$$\beta_w = \beta_L, \quad Q(y,t) = Q_L(y,t), \quad \eta(y,t) = \eta_L(y,t) \quad \text{для } (0 < \kappa < \kappa_{\min});$$

$$\beta_w = \beta_v, \quad Q(y,t) = Q_v(y,t), \quad \eta(y,t) = \eta_v(y,t) \quad \text{для } (\kappa_m < \kappa < 1).$$

Тут  $\beta_L, \beta_v$  — коефіцієнти набухання й усадки тіла. Механізм набухання й усадки пояснюють існуванням двох груп сил, які спричинені випаровуванням вологи, а саме, капілярних сил, які виникають при частковому заповненні пор водою, та сил, які є наслідком видалення зв'язаної води при низькій вологості, що призводить до інтенсивного розвитку усадкових явищ.

При формулюванні задачі в напруженнях приходимо до задачі вологопружності, що полягає у визначенні шести компонент тензора напружень, які справджують рівняння рівноваги, сумісності Бельтрамі-Мітчела та відповідні граничні умови. У випадку одновимірної задачі сушки в умовах самозрівноваження напружений стан характеризується ненульовими компонентами тензора напружень  $\sigma_{xx} = \sigma_{zz} \equiv \sigma$ , а рівняння сумісності зводяться до одного

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \sigma(y) + \frac{E}{1-\nu} Q \right) = 0. \quad (11)$$

Рівняння рівноваги та граничні умови задовольняються тотожно при  $\sigma_{yy}(y) = 0$ . З умов відсутності сил на поверхнях  $y = 0, y = L_0$  шару випливає, що результуючі зусилля та момент, які діють на пористий шар, дорівнюють нулеві

$$\int_0^{L_0} \sigma(y) dy = 0, \quad \int_0^{L_0} \sigma(y) y dy = 0. \quad (12)$$

При цьому напружений стан у площині  $y = const$  в усіх точках однаковий. Проінтегрувавши рівняння (11), отримаємо

$$\sigma = -\frac{E}{(1-\nu)} Q + \tilde{C}_1 y + \tilde{C}_2, \quad (13)$$

де сталі  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$  визначаються з умов (12) і мають вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{C}_1 &= \frac{12}{L_0^3} \frac{E}{1-\nu} \left[ -\frac{L_0}{2} \int_0^{L_0} Q(y) dy + \int_0^{L_0} Q(y) y dy \right] = \frac{6E}{(1-\nu)L_0} [-\tilde{C}_1^1 + 2\tilde{C}_1^2], \\ \tilde{C}_2 &= \frac{12}{L_0^2} \frac{E}{1-\nu} \left[ -\frac{1}{2} \int_0^{L_0} Q(y) y dy + \frac{L_0}{3} \int_0^{L_0} Q(y) y dy \right] = \frac{2E}{(1-\nu)} [-3\tilde{C}_1^2 + 2\tilde{C}_1^1], \\ \tilde{C}_1^1 &= \left[ \int_0^{\kappa_{\min}} Q^L(\kappa) d\kappa + \int_{\kappa_{\min}}^{\kappa_m} Q^{Lv}(\kappa) d\kappa + \int_{\kappa_m}^1 Q^v(\kappa) d\kappa \right], \\ \tilde{C}_1^2 &= \left[ \int_0^{\kappa_{\min}} Q^L(\kappa) \kappa d\kappa + \int_{\kappa_{\min}}^{\kappa_m} Q^{Lv}(\kappa) \kappa d\kappa + \int_{\kappa_m}^1 Q^v(\kappa) \kappa d\kappa \right], \\ Q_L &= \beta_L (w_L - w_0) = \beta_L \gamma_L \alpha (\kappa_{\min} - 1), \quad \alpha = \frac{\Pi}{\gamma_s (1 - \Pi)}, \\ Q_{Lv} &= \beta_{Lv} (C_1^{Lv} + C_2^{Lv} \kappa) = \beta_L (\kappa_m - \kappa) (C_1^{Lv} + C_2^{Lv} \kappa), \\ Q_v(\kappa, \kappa_m) &= C_3 (\kappa_m) + C_1 (\kappa_m) \sqrt{a_4 + a_3 \kappa}, \\ C_1 &= \beta_v \gamma_n \alpha (1 - \kappa_m), \quad C_2 = -\beta_v \gamma_L \alpha, \quad C_3 = C_1 a_1 + C_2, \\ C_1^{Lv} &= \alpha (\gamma_n \kappa_m - \gamma_L \kappa_{\min}), \quad C_2^{Lv} = \alpha (\gamma_L - \gamma_n). \end{aligned} \tag{14}$$

Тут  $\beta_{Lv}$  — коефіцієнт набухання у двофазній зоні.

Враховуючи приведені вище формули, вирази (13), (14) запишемо так

$$\begin{aligned}\tilde{C}_1^1 &= \beta_L \left\{ \kappa_m \left[ C_1^{Lv} (\kappa_m - \kappa_{\min}) + C_2^{Lv} \frac{(\kappa_m^2 - \kappa_{\min}^2)}{2} \right] - C_1^{Lv} \frac{(\kappa_m^2 - \kappa_{\min}^2)}{2} - \right. \\ &\quad \left. - C_2^{Lv} \frac{(\kappa_m^3 - \kappa_{\min}^3)}{3} \right\} + C_3 (1 - \kappa_m) + 2 \frac{C_1}{a_3} G_1 + Q_L \kappa_{\min}, \\ \tilde{C}_1^2 &= C_3 \frac{(1 - \kappa_m^2)}{2} + 2 \frac{C_1}{a_3^2} (G_2 - a_4 G_1) + \beta_L \left\{ \kappa_m \left[ C_1^{Lv} \frac{(\kappa_m^2 - \kappa_{\min}^2)}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C_2^{Lv} \frac{(\kappa_m^3 - \kappa_{\min}^3)}{3} \right] - C_1^{Lv} \frac{(\kappa_m^3 - \kappa_{\min}^3)}{3} - C_2^{Lv} \frac{(\kappa_m^4 - \kappa_{\min}^4)}{4} \right\} + Q_L \frac{\kappa_{\min}^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_1(\kappa_m) &= \frac{1}{3} \left\{ \left[ a_4(\kappa_m) + a_3 \right]^{3/2} - \left[ a_4(\kappa_m) + a_3 \kappa_m \right]^{3/2} \right\}, \\ G_2(\kappa_m) &= \frac{1}{5} \left\{ \left[ a_4(\kappa_m) + a_3 \right]^{5/2} - \left[ a_4(\kappa_m) + a_3 \kappa_m \right]^{5/2} \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для моделі капілярів однакових радіусів вирази для  $\tilde{C}_1^1, \tilde{C}_1^2$  отримуються з формул (14), (15) при  $\kappa_{\min} = \kappa_m$ .

Зі співвідношень (10) та (11) одержуємо

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon = \frac{(1-\nu)\sigma_{xx}}{E} + Q, \quad \varepsilon_{yy} = -\frac{2\nu}{E}\sigma_{xx} + Q, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \quad (16)$$

В отриманих співвідношеннях слід врахувати залежність ефективного модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона від вологовмісту. Вважаємо, що ефективні характеристики тіла та дисторсія є функціями характеристичної функції відрізка

$$\Theta_i(\kappa_m) = \Theta(\kappa_m - \kappa_{m,i-1}) - \Theta(\kappa_m - \kappa_{m,i}),$$

де  $\Theta(\kappa_m - \kappa_{m,i})$  — одинична функція Гевісайда.

Прийmemo, що коефіцієнт набухання  $\beta_L$  у насиченій рідиною зоні є сталим, а  $\beta_{Lv}$  лінійно зменшується від значення  $\beta_L$  на межі контакту двофазної зони із зоною насичених рідиною пор до нуля на межі контакту двофазної зони із зоною осушених пор. На основі експериментальних даних [9] усадку  $\beta_v$  в осушеній зоні апроксимуємо неперервними лінійними сплайнами відносно насиченості  $\kappa_m$

$$\beta_v(\kappa_m) = \sum_{i=1}^n \beta_{vi}(\kappa_m) \Theta_i(\kappa_m).$$

Тут  $\beta_{vi} = \tilde{\alpha}_i \kappa_m + \tilde{\beta}_i$ ,  $\tilde{\alpha}_i = (\beta_{vi1} - \beta_{vi0}) / (\kappa_{mi2} - \kappa_{mi1})$ ,  $\tilde{\beta}_i = \beta_{vi0} - \tilde{\alpha}_i \kappa_{mi1}$  — коефіцієнти апроксимації. З урахуванням рівняння (11) компоненти тензора напружень  $\sigma_{xx} = \sigma_{zz}$  можна подати так

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(\kappa, \kappa_m) = \sigma_{zz}(\kappa, \kappa_m) &= \frac{E_L}{(1-\nu_L)} \left[ F(\kappa, \kappa_m, \kappa_{\min}) - Q_L(\kappa, \kappa_m) \right] \quad (0 < \kappa < \kappa_{\min}), \\ \sigma_{xx}(\kappa, \kappa_m) = \sigma_{zz}(\kappa, \kappa_m) &= \frac{E_{Lv}}{(1-\nu_{Lv})} \left[ F(\kappa, \kappa_m, \kappa_{\min}) - Q_{Lv}(\kappa, \kappa_m) \right] \quad (\kappa_{\min} < \kappa < \kappa_m), \\ \sigma_{xx}(\kappa, \kappa_m) = \sigma_{zz}(\kappa, \kappa_m) &= \frac{E_v}{(1-\nu_v)} \left[ F(\kappa, \kappa_m, \kappa_{\min}) - Q_v(\kappa, \kappa_m) \right] \quad (\kappa_m < \kappa < 1), \\ F(\kappa, \kappa_m, \kappa_{\min}) &= \sum_{i=1}^n \left[ \tilde{C}_{1i}(\kappa_{\min}, \kappa_m) \kappa + \tilde{C}_{2i}(\kappa_{\min}, \kappa_m) \right] \Theta_i(\kappa_m), \end{aligned} \quad (17)$$

де  $E_L, E_{Lv}, E_v, \nu_L, \nu_{Lv}, \nu_v$  — модулі Юнга та коефіцієнти Пуассона у відповідних фазах,  $\tilde{C}_{1i}, \tilde{C}_{2i}$  обчислюються за приведеними вище формулами для  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$  для

кожної ділянки  $i$ , де змінюються аналітичні вирази для коефіцієнтів усадки й інших ефективних коефіцієнтів.

Для ненульових компонент тензора деформацій маємо

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}(\kappa, \kappa_m) &= \varepsilon_{zz}(\kappa, \kappa_m) = F(\kappa, \kappa_m, \kappa_{\min}), \\ \varepsilon_{xx}(\kappa, \kappa_m) &= \varepsilon_{zz}(\kappa, \kappa_m) = -\frac{2\nu}{1-\nu} F(\kappa, \kappa_m, \kappa_{\min}) - \alpha\gamma_L \frac{1+\nu}{1-\nu} (1-\kappa_m)\beta_L, \quad (0 < \kappa < \kappa_{\min}), \\ \varepsilon_{yy}(\kappa, \kappa_m) &= -\frac{2\nu}{1-\nu} F(\kappa, \kappa_m, \kappa_{\min}) + \frac{1+\nu}{1-\nu} (C_1^{Lv} + C_2^{Lv}\kappa), \quad (\kappa_{\min} < \kappa < \kappa_m), \\ \varepsilon_{yy}(\kappa, \kappa_m) &= -\frac{2\nu}{1-\nu} F(\kappa, \kappa_m, \kappa_{\min}) + \\ &+ \frac{1+\nu}{1-\nu} \left\{ \gamma_n (1-\kappa_m) \left[ a_1 + \sqrt{a_4 + a_3\kappa} \right] - \gamma_L \right\} \alpha\beta_\nu, \quad \kappa_m < \kappa < 1.\end{aligned}\quad (18)$$

Зауважимо, що компоненти тензорів напружень і деформацій змінюють знак у точці  $\kappa = \kappa_f$  місцезнаходження критичного радіуса  $\rho_f$ . Це пов'язано, очевидно, зі стрибкоподібною зміною густини вологи у точці, де здійснюється фазовий перехід рідини в пару.

### 3. Кількісний аналіз напружень і деформацій

Проведено кількісний аналіз виразів (6), (17), (18) для ширини двофазної зони та компонент тензорів напружень і деформацій. Основна увага зосереджена на вивченні залежності досліджуваних величин від коефіцієнта проникливості  $K_L$ , а також зміни напружень і деформацій у процесі осушення та їх розподілу впоперек шару за наявності та відсутності дисперсії розмірів пор.

На рис. 1, 2 зображено залежність напружень від координати внутрішньої границі осушеної зони в площинах  $\kappa=0,1$  (криві 3, 3a);  $\kappa=0,5$  (криві 2, 2a);  $\kappa=0,8$  (криві 1, 1a). Криві з індексом  $a$  обчислені згідно моделі циліндричних пор із врахуванням дисперсії, без індексу — при нехтуванні дисперсією. Піки та зміни знаків напружень відповідають умові  $\kappa_m = \kappa_f$ . Бачимо, що врахування дисперсії розмірів пор приводить до підвищення рівня пікових напружень (криві 3, 3a).

При  $\kappa_m = \kappa_f$  змінює свій знак також компонента деформацій  $\varepsilon_{yy}$ , що ілюструють криві на рис. 3, де знехтувано впливом дисперсії розмірів пор. Криві на рис. 4 ілюструють розподіл напружень уперек шару при  $K_L = 10^{-11} \text{ м}^2$  для різних етапів осушення (різних значень параметрів  $\kappa_m$ ). Напруження є самозрівноваженими. Найбільших (пікових) величин напруження досягають у приповерхневих і глибинних областях шару. Їхній рівень зростає зі зменшенням вологості.

Таблиця відображає зміну безрозмірної ширини двофазної зони під час осушення при рівномірному розподілі пор за радіусами та різних коефіцієнтах проникливості. Як видно з таблиці, чим більша величина коефіцієнтів проникливості  $K_L$ , тим ширша двофазна зона. З наближенням відносної вологості до рівноважної ширина двофазної зони прямує до нуля й у граничному випадку перетворюється в поверхню.



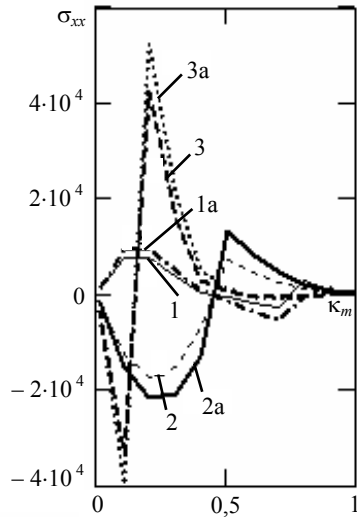


Рис. 1. Розподіл напружень у площинах  $\kappa = 0,8; \kappa = 0,5; \kappa = 0,1$  при зміні границі осушеної зони, який відповідає коефіцієнту проникливості  $K_L = 3,5 \cdot 10^{-9} (\kappa_m - \kappa_r)^2 \text{ м}^2$  та початковій ширині двофазної зони  $\kappa_m - \kappa_{\min} = 0,97$

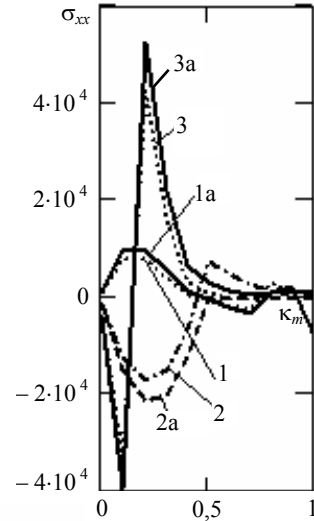


Рис. 2. Розподіл напружень у площинах  $\kappa = 0,8; \kappa = 0,5; \kappa = 0,1$  при зміні границі осушеної зони, який відповідає коефіцієнту проникливості  $K_L = 2 \cdot 10^{-9} \times (\kappa_m - \kappa_r)^2 \text{ м}^2$  та початковій ширині двофазної зони  $\kappa_m - \kappa_{\min} = 0,553$

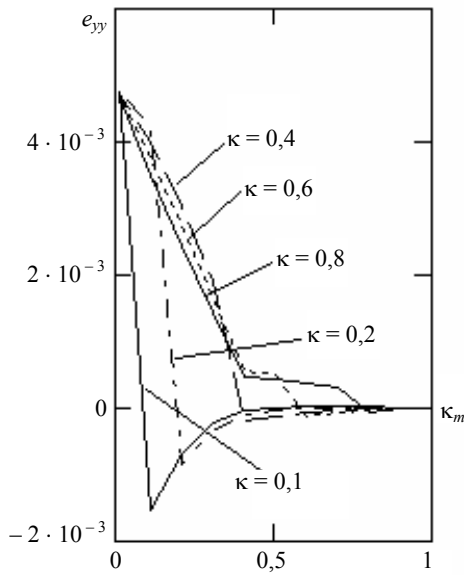


Рис. 3. Залежність компоненти деформації від координати  $\kappa_m$  у різних площинах  $\kappa = const$

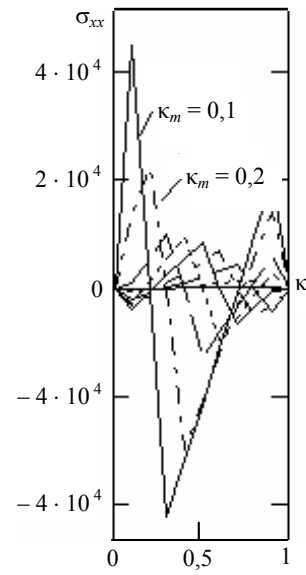


Рис. 4. Розподіл самозрівноважених напружень

Зміна ширини двофазної зони  
зі зміною координати межі розділу осушеної та двофазної зон

$K_L = 10^{-9}(\kappa_m - \kappa_r)^2$	$\kappa_m$	1	0,8	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1
	шир. зони	0,281	0,137	0,053	0,013	0,004	0,002	0,00001
$K_L = 3 \cdot 10^{-9} \times (\kappa_m - \kappa_r)^2$	$\kappa_m$	1	0,8	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1
	шир. зони	0,842	0,41	0,159	0,039	0,013	0,002	0,0002

**Висновки.** Врахування дисперсії розмірів пор приводить до виникнення двофазної зони між зонами осушених і насичених рідиною пор. Ширина двофазної зони тим більша, чим більший коефіцієнт проникливості тіла відносно рідини. Ширина двофазної зони в процесі осушення зменшується. Напруження та деформації  $\epsilon_{yy}$  змінюють знак при  $\kappa = \kappa_f$ . Врахування дисперсії розмірів пор при несиметричному осушенні спричиняє збільшення пікових механічних напружень.

### Література

- [1] Лыков А. В. Теория сушки. — М.: Энергия, 1968. — 471 с.
- [2] Луцык Р. П. Уравнения теории сушки деформируемых твердых изотропных тел // Промышленная теплотехника. — 1985. — Т. 7, № 6. — С. 8-20.
- [3] Соколовский Я. И. Взаимосвязь деформационно-релаксационных и тепломассообменных процессов при сушке капиллярно-пористых тел // Прикладная механика. — 1998. — Т. 34, № 7. — С. 101-107.
- [4] Бурак Я., Кондрат В., Гайвась Б. До математичного моделювання процесу сушки пористих тіл // Інформативно-математичне моделювання складних систем. — МІМУЗ'-Львів: 2002. — С. 153-159.
- [5] Хейфец Л. И., Неймарк Ф. В. Многофазные процессы в пористых средах. — М.: Химия, 1982. — 320 с.
- [6] Бурак Я. Й., Гайвась Б. І. Математична модель сушки пористого шару з врахуванням обмежень на параметри напружено-деформованого стану // Механіка середовища, методи комп'ютерних наук. — 2004. — С. 12-26.
- [7] Бурак Я, Кондрат В., Гайвась Б. Вплив дисперсії розмірів пор на початковий етап осушення пористих тіл // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2005. — Вип. 2. — С. 20-29.
- [8] Кондрат В. Ф., Гайвась Б. І., Губер Ю. М., Гнідець Б. М. До вивчення впливу зовнішнього електричного поля на осушення пористих тіл // Науковий Вісник ЛДДУ. — 2000. — Вип. 16.2. — С. 97-107.
- [9] Цилосани З. Н. Усадка и ползучесть бетона. — Тбилиси: Мецниереба, 1975. — 329 с.

## A Dispersion Effect of Pore Sizes on a Stressed-Deformed State of a Porous Layer at Non-Symmetric Drying

Bogdana Gayvas

*A decoupled problem of non-symmetric drying of a porous layer is formulated. Its solving leads to consequential finding of a moisture-content field with post-determination of stress-deformable state by given moisture distortions. An influence of pore sizes dispersion is taken into account at the*

*first stage of the drying problem formulated taking into consideration convective, diffusive and capillary mass transfer mechanisms in pores. This influence manifests, in particular, in the advent a two-phase zone between zones of dried pores and water saturated ones. The width of the two-phase zone changes during the drying process. Mechanical stresses reach its maximal values in the area of two-phase zone. A stress level is higher in the case of consideration of pore sizes dispersion then in the case of its neglecting.*

## **Влияние дисперсии размеров пор на напряженно-деформированное состояние пористого слоя при несимметрической сушке**

Богдана Гайвась

*Сформулирована несвязанная задача несимметрической сушки пористого слоя, решение которой состоит в последовательном нахождении поля влагосодержания с последующим определением напряженно-деформированного состояния по заданным влажностным дисторсиям. Влияние дисперсии размеров пор учитывается на первом этапе задачи сушки, формулируемой с учетом конвективного, диффузионного и капиллярного механизмов массопереноса в порах. Такое влияние проявляется в возникновении между зонами осушенных и насыщенных жидкостью пор двухфазной зоны, ширина которой изменяется в процессе сушки. Механические напряжения достигают наибольшей величины в области двухфазной зоны. Уровень напряжений с учетом дисперсии размеров пор выше, чем без такого учета.*

Отримано 03.05.07