УДК 628.113.2 : 66.067.1

Моделювання процесу очищення стічної води з урахуванням залежності коефіцієнта дифузії від концентрації

Андрій Бомба[1], Ігор Присяжнюк[2], Андрій Сафоник[3]

[1] д. т. н., професор, Рівненський державний гуманітарний університет, вул. Остафова, 31, Рівне, 33000, e-mail: abomba@mail.ru
[2] к. т. н., Рівненський державний гуманітарний університет, вул. Остафова, 31, Рівне, 33000, e-mail: igor_pri@mail.ru
[3] Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, e-mail: safonik@ukr.net

Узагальнено модель процесу очищення стічної води на каркасно-засипних фільтрах шляхом «дифузійного збурення» відомої моделі Мінца. Запропоновано алгоритм асимптотичного розвинення розв'язку відповідної сингулярно-збуреної задачі для нелінійної системи диференціальних рівнянь типу «конвекція-дифузія-масообмін» із запізненням у часі. Отримано формули для характеристики співвідношення між концентраціями забруднень стічної води та фільтра. На цій основі проведено комп'ютерний експеримент. При цьому застосовуються класичні форми законів, які описують процеси руху рідини та забруднень у пористих середовищах. Це дозволяє при розв'язуванні відповідних збурених задач, не починаючи «все спочатку», доповнювати відомі «незбурені» розв'язки певними поправками.

Ключові слова: фільтрування, запізнення, асимптотика, сингулярно-збурені задачі.

Вступ. Моделюванням процесу очищення стічних вод під час їх фільтрування на каркасно-засипних фільтрах займались такі відомі вчені, як Мінц Д. М., Шехтман Ю. М., Жуковицький А. А. [1-3]. Зокрема, відомою є модель Мінца Д. М.: $\partial\rho(x, t) / \partial t + \nu\, \partial c(x, t) / \partial x = 0$, $\partial\rho(x, t) / \partial t = \beta\, c(x, t) - \alpha\, \rho(x, t)$ (відповідно закон збереження маси та рівняння кінетики), де $c(x, t)$ — концентрація домішок у рідині, що фільтрується; $\rho(x, t)$ — концентрація осаду в завантаженні; β — коефіцієнт, який характеризує обсяги сорбованих за одиницю часу домішкових частинок; α — коефіцієнт, який характеризує обсяги адсорбованих за той же час частинок осаду; v — швидкість фільтрування.

Проте деякі важливі компоненти процесу очищення забруднених вод у цих моделях залишилися неврахованими. Зокрема, знехтувано явищем поздовжньої дифузії. Щодо доцільності урахування цього явища в літературних джерелах існують певною мірою суперечливі точки зору. Так, в адсорбційній лабораторії Московського хіміко-технологічного університету встановлено, що на асимптотичній стадії, у широкому діапазоні швидкостей потоку, ефект розмивання поздовжньої дифузії дуже малий порівняно з ефектом розмивання масообмінних процесів. З іншого боку, в монографії [4] показано, що при сорбції деяких речовин поздовжня дифузія вносить певні зміни в динаміку процесу.

На даний час актуальними є питання узагальнення моделі Мінца шляхом її дифузійного збурення з метою дослідження нелінійних процесів очищення стічних вод на каркасно-засипних фільтрах з урахуванням малої дифузії, запізненої у часі. Виходячи з цього та враховуючи зворотній вплив характеристик процесу (концентрацій) на характеристики середовища (коефіцієнт дифузії) із запізненням у часі [6], розглянемо таку модельну сингулярно-збурену задачу конвективної дифузії

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + v\dfrac{\partial c(x,t)}{\partial x} = \varepsilon\dfrac{\partial}{\partial x}\left[b\big(c(x,t-\tau)\big)\dfrac{\partial c(x,t)}{\partial x}\right],\ t>0, \\ \dfrac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \beta c(x,t) - \alpha\rho(x,t) + \varepsilon\dfrac{\partial}{\partial x}\left[b_*\big(\rho(x,t-\tau)\big)\dfrac{\partial \rho(x,t)}{\partial x}\right], \end{cases} \quad (1)$$

$$c(0,t) = c_*(t),\ \rho(0,t) = \rho_*(t),\ \left.\dfrac{\partial c}{\partial x}\right|_{x=L} = 0,\ \left.\dfrac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x=L} = 0,\ 0\le x\le L,$$

$$c(x,\tilde{t}) = c_0^0(x,\tilde{t}),\quad \rho(x,\tilde{t}) = \rho_0^0(x,\tilde{t}),\quad -\tau\le\tilde{t}\le 0, \quad (2)$$

де $c_*(t)$, $\rho_*(t)$ — концентрації відповідно завислих домішкових частинок та осаду на вході фільтра, b, b_* — коефіцієнти дифузії, ε — малий параметр, τ — час запізнення ($\tau > 0$), L — довжина фільтра. Відзначимо, що функції $c_*(t)$, $\rho_*(t)$, $c_0^0(x,t)$, $\rho_0^0(x,t)$ є достатньо гладкими й узгодженими в кутових точках області їх задання. Окрім цього, вважаємо, що функції $c_0^0(x,t)$, $\rho_0^0(x,t)$ при $t = -\tau$ та $t = 0$ задовольняють умови гладкості розв'язку ($c(x, t)$, $\rho(x, t)$) цієї задачі при $t = \tau n$ (n = 1, 2, ...) [5].

1. Асимптотика розв'язку

Розв'язування задачі (1)-(2) із запізненням τ на часових проміжках $[(n-1)\tau, n\tau]$, n = 1, 2, ... замінимо послідовним розв'язуванням n задач без запізнення [6]

$$\begin{cases} \rho_t^{[n]} + vc_x^{[n]} = \varepsilon b_{n\tau}c_{xx}^{[n]} + \varepsilon c_x^{[n]}b_{n\tau x},\quad \rho_t^{[n]} = \beta c^{[n]} - \alpha\rho^{[n]} + \varepsilon b_{*n\tau}\rho_{xx}^{[n]} + \varepsilon\rho_x^{[n]}b_{*n\tau x}, \\ c^{[n]}(0,t) = c_*(t),\ c^{[n]}(x,t-\tau) = c^{[n-1]}(x,t-\tau), \\ b_{n\tau}(x,t) = b\Big(c^{[n]}(x,t-\tau)\Big) = b\Big(c^{[n-1]}(x,t-\tau)\Big),\quad c^{[0]}(x,0) = c_0^0(x,0), \\ \rho^{[n]}(0,t) = \rho_*(t),\quad \rho^{[n]}(x,t-\tau) = \rho^{[n-1]}(x,t-\tau), \\ b_{*n\tau}(x,t) = b_*\Big(\rho^{[n]}(x,t-\tau)\Big) = b_*\Big(\rho^{[n-1]}(x,t-\tau)\Big),\quad \rho^{[0]}(x,0) = \rho_0^0(x,0). \end{cases} \quad (3)$$

Тут $c^{[n]}$, $\rho^{[n]}$ — відповідно концентрації домішок та осаду на часовому проміжку $[(n-1)\tau, n\tau]$.

Розв'язок задач (3) з точністю $O(\varepsilon^{m+1})$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів за степенями малого параметра ε [7]

$$c^{[n]}(x,t) = c_0^{[n]}(x,t) + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i c_i^{[n]}(x,t) + \sum_{i=0}^{m+1} \varepsilon^i \Pi_i^{[n]}(\xi,t) + R_1^{[n]}(x,t,\varepsilon),$$

$$\rho^{[n]}(x,t) = \rho_0^{[n]}(x,t) + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i \rho_i^{[n]}(x,t) + \sum_{i=0}^{m+1} \varepsilon^{i/2} P_i^{[n]}(\mu,t) + R_2^{[n]}(x,t,\varepsilon), \tag{4}$$

де $c_i^{[n]}(x,t), \rho_i^{[n]}(x,t)$ ($i = \overline{0,m}$) — складові регулярних частин відповідних асимптотик, зокрема, $c_0^{[n]}, \rho_0^{[n]}$ — розв’язок відповідної виродженої задачі, а $c_1^{[n]}, ..., c_m^{[n]}$ — поправки, які враховують «вклад» дифузії вздовж фільтра (за винятком деякої його примежової зони); $\Pi_i^{[n]}(\xi,t)$, $P_i^{[n]}(\mu,t)\left(i = \overline{0,m+1}\right)$ — функції типу пограншару, які враховують вплив джерел забруднень в околі $x = L$ (поправки на виході фільтраційного потоку); $\xi = (L - x)\,\varepsilon^{-1}$, $\mu = (L - x)\,\varepsilon^{-1/2}$ — відповідні регуляризуючі перетворення, $R_i^{[n]}(x,t,\varepsilon)$ — залишкові члени ($i = 1, 2$).

Якщо співвідношення (4) підставити у систему (3) та застосувати стандартну «процедуру прирівнювання» [8], то для визначення функцій $c_i^{[n]}$, $\rho_i^{[n]}\left(i = \overline{0,m}\right)$ отримаємо такі задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_0^{[n]}}{\partial t} + v\dfrac{\partial c_0^{[n]}}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial \rho_0^{[n]}}{\partial t} = \beta c_0^{[n]} - \alpha \rho_0^{[n]}, \\ c_0^{[n]}(0,t) = c_*(t), \quad c_0^{[n]}(x,0) = c_0^0(x,0), \\ \rho_0^{[n]}(0,t) = \rho_*(t), \quad \rho_0^{[n]}(x,0) = \rho_0^0(x,0), \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_i^{[n]}}{\partial t} + v\dfrac{\partial c_i^{[n]}}{\partial x} = \Psi_i^{[n]}, \ \dfrac{\partial \rho_i^{[n]}}{\partial t} = \beta c_i^{[n]} - \alpha \rho_i^{[n]} + \Phi_i^{[n]}, \\ c_i^{[n]}(0,t) = 0, \quad c_i^{[n]}(x,0) = 0, \ \rho_i^{[n]}(x,0) = 0, \quad \rho_i^{[n]}(0,t) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

де $\Psi_i^{[n]}(x,t) = c_{i-1,xx}^{[n]} + c_{i-1,x}^{[n]}\, b_{n\tau x}$, $\quad \Phi_i^{[n]}(x,t) = \rho_{i-1,xx}^{[n]} + \rho_{i-1,x}^{[n]}\, b_{*n\tau x}$, $\quad i = 1, 2, ...$

Знаходження розв’язку задачі (5) зводиться до розв’язування рівнянь [9]

$$\frac{\partial^2 c_0^{[n]}}{\partial x \partial t} + \frac{\beta}{v}\frac{\partial c_0^{[n]}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial c_0^{[n]}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \rho_0^{[n]}}{\partial x \partial t} + \alpha \frac{\partial \rho_0^{[n]}}{\partial x} + \frac{\beta}{v}\frac{\partial \rho_0^{[n]}}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

за додаткових умов $c_0^{[n]}(0,t) = c_*(t)$, $c_0^{[n]}(x,0) = c_0^0(x,0)$, $\rho_0^{[n]}(0,t) = \rho_*(t)$, $\rho_0^{[n]}(x,0) = = \rho_0^0(x,0)$.

Використовуючи метод Рімана, маємо [9]

$$c_0^{[n]}(x,t)=e^{-\frac{\beta x}{v}-\alpha t}\left\{c_0^0(0,0)I_0\left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}xt}\right)+\int_0^x e^{\frac{\beta\xi}{v}}I_0\left[2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}(x-\xi)t}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{dc_0^0(\xi,0)}{d\xi}+\frac{\beta}{v}c_0^0(\xi,0)\right]d\xi+\int_0^t e^{\alpha\eta}I_0\left[2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}x(t-\eta)}\right]\left[\frac{dc_*(\eta)}{d\eta}+\alpha c_*(\eta)\right]d\eta\right\},$$
$$\rho_0^{[n]}(x,t)=e^{-\frac{\beta x}{v}-\alpha t}\left\{\rho_*(0)I_0\left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}xt}\right)+\int_0^t e^{\alpha\eta}I_0\left[2\sqrt{\frac{\alpha\beta x}{v}(t-\eta)}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{d\rho_*(\eta)}{d\eta}+\frac{\beta}{v}\rho_*(\eta)\right]d\eta+\int_0^x e^{\frac{\beta\xi}{v}}I_0\left[2\sqrt{\frac{\alpha\beta t}{v}(x-\xi)}\right]\left[\frac{d\rho_0^0(\xi,0)}{d\xi}+\frac{\beta}{v}\rho_0^0(\xi,0)\right]d\xi\right\},$$

де I_0 — функції Бесселя першого роду нульового порядку від уявного аргументу.

Аналогічно [10], отримаємо задачі для знаходження $c_i^{[n]}(x,t),\rho_i^{[n]}(x,t)$, $i=1,2,\ldots$

$$\frac{\partial^2 c_i^{[n]}}{\partial x\partial t}+\frac{\beta}{v}\frac{\partial c_i^{[n]}}{\partial t}+\alpha\frac{\partial c_i^{[n]}}{\partial x}-\frac{1}{v}G_i^{[n]}(x,t)=0,$$
$$\frac{\partial^2 \rho_i^{[n]}}{\partial x\partial t}+\frac{\beta}{v}\frac{\partial \rho_i^{[n]}}{\partial t}+\alpha\frac{\partial \rho_i^{[n]}}{\partial x}-Q_i^{[n]}(x,t)=0,$$
$$c_i^{[n]}(0,t)=0,\quad c_i^{[n]}(x,0)=0,\quad \rho_i^{[n]}(x,0)=0,\quad \rho_i^{[n]}(0,t)=0, \tag{8}$$

де $G_i^{[n]}(x,t)=\frac{\partial\Psi_i^{[n]}}{\partial t}+\alpha\Psi_i^{[n]}-\frac{\partial\Phi_i^{[n]}}{\partial t}$, $Q_i^{[n]}(x,t)=\frac{\partial\Phi_i^{[n]}}{\partial x}+\frac{\beta}{v}\Psi_i^{[n]}$.

Розв’язавши систему (8) методом Рімана, одержимо рекурентні формули для визначення $c_i^{[n]}(x,t)$ і $\rho_i^{[n]}(x,t)$

$$c_i^{[n]}(x,t)=\frac{e^{-\frac{\beta x}{v}-\alpha t}}{v}\int_0^x\int_0^t e^{\frac{\beta\xi}{v}+\alpha\eta}I_0\left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}(x-\xi)(t-\eta)}\right)G_i^{[n]}(\xi,\eta)\,d\eta\, d\xi,$$
$$\rho_i^{[n]}(x,t)=e^{-\frac{\beta x}{v}-\alpha t}\int_0^x\int_0^t e^{\frac{\beta\xi}{v}+\alpha\eta}I_0\left(2\sqrt{\frac{\alpha\beta}{v}(x-\xi)(t-\eta)}\right)Q_i^{[n]}(\xi,\eta)\,d\eta\, d\xi. \tag{9}$$

Функції $\Pi^{[n]}\equiv\sum_{i=0}^{m+1}\Pi_i^{[n]}\varepsilon^i$, $P^{[n]}\equiv\sum_{i=0}^{m+1}P_i^{[n]}\varepsilon^{i/2}$, які входять у подання (4), введені для усунення неузгодженостей, внесених побудованими регулярними частинами $c^{[n]}=\sum_{i=0}^{m}c_i^{[n]}\varepsilon^i$, $\rho^{[n]}=\sum_{i=0}^{m}\rho_i^{[n]}\varepsilon^i$ в околі точки $x=L$, тобто забезпечують виконання

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2007, вип. 6, 101-108

умов: $\frac{\partial}{\partial x}\left(c^{[n]}+\Pi^{[n]}\right)=O\left(\varepsilon^{m+1}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho^{[n]}+P^{[n]}\right)=O\left(\varepsilon^{m+1}\right)$. Для знаходження цих функцій маємо такі задачі

$$b_{n\tau}\Pi^{[n]}_{0\xi\xi}+v\Pi^{[n]}_{0\xi}=0,\ \Pi^{[n]}_{0}\underset{\xi\to\infty}{\to}0,\ \Pi^{[n]}_{0\xi}(L,t)=K_0(t),$$

$$b_{n\tau}\Pi^{[n]}_{i\xi\xi}+v\Pi^{[n]}_{i\xi}=U^{[n]}_{i},\ \Pi^{[n]}_{i}\underset{\xi\to\infty}{\to}0,\ \Pi^{[n]}_{i\xi}(L,t)=K_i(t),\ i=\overline{1,m},$$

$$U^{[n]}_{i}=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\xi^i}{i}b_{n\tau}\Pi^{[n]}_{i-1,\xi\xi}+b_{n\tau\xi}\Pi^{[n]}_{i-1,\xi}\right)+I(i)P^{[n]}_{i-1,t}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\mu^i b_{*n\tau\mu}P^{[n]}_{i-1,\mu\mu}-\mu^i b_{*n\tau\mu}P^{[n]}_{i-1,\mu\mu}\right)+I(i)\varepsilon^{i/2}P^{[n]}_{it}+I(i+1)P^{[n]}_{it},$$

$$b_{*n\tau}P^{[n]}_{i\mu\mu}-\alpha P^{[n]}_{i}-P^{[n]}_{it}=Z^{[n]}_{i},\ P^{[n]}_{i}\underset{\mu\to\infty}{\to}0,\ P^{[n]}_{i\mu}(L,t)=H_i(t),\ i=\overline{0,m},$$

$$Z^{[n]}_{i}=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\mu^i}{i}b_{*n\tau}P^{[n]}_{i-1,\mu\mu}+b_{*n\tau\mu}P^{[n]}_{i-1,\mu}\right)-\beta M(i)\Pi^{[n]}_{i-1}, \qquad (10)$$

$$I(a)=\begin{cases}0, & a \text{ — парне},\\ 1, & a \text{ — непарне},\end{cases}\qquad M(a)=\begin{cases}1, & a \text{ — парне},\\ 0, & a \text{ — непарне},\end{cases}$$

$$K_i(t)=\begin{cases}0,\ i=m+1,\\ -c^{[n]}_{ix}(L,t),\ i=\overline{0,m},\end{cases}\qquad H_i(t)=\begin{cases}0,\ i=m+1,\\ -\rho^{[n]}_{ix}(L,t),\ i=\overline{0,m}.\end{cases}$$

З огляду на те, що (10) є звичайними диференціальними рівняннями другого порядку та параболічними рівняннями зі сталими коефіцієнтами, розв’язки відповідних задач можна записати в явному вигляді.

Для оцінки залишкових членів маємо задачу

$$\begin{cases}\frac{\partial R^{[n]}_2}{\partial t}+v\frac{\partial R^{[n]}_1}{\partial x}-\varepsilon b_{n\tau}\frac{\partial^2 R^{[n]}_1}{\partial x^2}-\varepsilon b_{n\tau x}\frac{\partial R^{[n]}_1}{\partial x}=\varepsilon^{m+1}g(x,t,\varepsilon),\\ \frac{\partial R^{[n]}_2}{\partial t}-\beta R^{[n]}_1+\alpha R^{[n]}_2-\varepsilon b_{*n\tau}\frac{\partial^2 R^{[n]}_2}{\partial x^2}-\varepsilon b_{*n\tau x}\frac{\partial R^{[n]}_2}{\partial x}=\varepsilon^{m+1}g_1(x,t,\varepsilon),\end{cases}$$

де

$$g(x,t,\varepsilon)=b_{n\tau}\frac{\partial^2 c^{[n]}_m}{\partial x^2}+\frac{\xi^2 b_{n\tau\xi\xi}}{2}\frac{\partial^2\Pi^{[n]}_m}{\partial\xi^2}-\xi b_{n\tau\xi}\frac{\partial^2\Pi^{[n]}_{m+1}}{\partial\xi^2}+\varepsilon\frac{\xi^2 b_{n\tau\xi\xi}}{2}\frac{\partial^2\Pi^{[n]}_{m+1}}{\partial\xi^2}+$$

$$+\varepsilon^2 b_{n\tau x}\frac{\partial c^{[n]}_m}{\partial x}-\frac{\xi^2 b_{n\tau\xi\xi\xi}}{2}\frac{\partial\Pi^{[n]}_{m-1}}{\partial\xi}+\xi b_{n\tau\xi\xi}\frac{\partial\Pi^{[n]}_m}{\partial\xi}+\varepsilon\frac{\xi^2 b_{n\tau\xi\xi\xi}}{2}\frac{\partial\Pi^{[n]}_m}{\partial\xi}-$$

$$-b_{n\tau\xi}\frac{\partial\Pi^{[n]}_{m+1}}{\partial\xi}+\varepsilon\xi b_{n\tau\xi\xi}\frac{\partial\Pi^{[n]}_{m+1}}{\partial\xi}-\varepsilon^2\frac{\xi^2 b_{n\tau\xi\xi\xi}}{2}\frac{\partial\Pi^{[n]}_{m+1}}{\partial\xi},$$

$$g_1\left(x,t,\varepsilon\right)=\beta\Pi_{m+1}^{[n]}+b_{*n\tau}\frac{\partial^2\rho_m^{[n]}}{\partial x^2}+b_{*n\tau}\frac{\partial^2 P_{m+1}^{[n]}}{\partial\mu^2}-\varepsilon^{\frac{5}{4}}\mu b_{*n\tau\mu}\frac{\partial^2 P_{m+1}^{[n]}}{\partial\mu^2}+$$

$$+\varepsilon\frac{\mu^2 b_{*n\tau\mu\mu}}{2}\frac{\partial^2 P_{m+1}^{[n]}}{\partial\mu^2}+b_{*n\tau x}\frac{\partial\rho_m^{[n]}}{\partial x}-\frac{\mu^2 b_{*n\tau\mu\mu\mu}}{2}\frac{\partial P_m^{[n]}}{\partial\mu}+b_{*n\tau\mu}\frac{\partial P_{m+1}^{[n]}}{\partial\mu}-$$

$$-\varepsilon^{\frac{5}{4}}\mu b_{*n\tau\mu\mu}\frac{\partial P_{m+1}^{[n]}}{\partial\mu}+\varepsilon\frac{\mu^2 b_{*n\tau\mu\mu\mu}}{2}\frac{\partial_{m+1}^{[n]}}{\partial\mu},$$

$$R_1^{[n]}(0,t,\varepsilon)=R_1^{[n]}(L,t,\varepsilon)=R_1^{[n]}(x,0,\varepsilon)=R_2^{[n]}(0,t,\varepsilon)=R_2^{[n]}(L,t,\varepsilon)=$$

$$=R_2^{[n]}(x,0,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{m+1}\right).$$

Вимагаючи достатньої гладкості початкової та граничних умов і коефіцієнтів системи рівнянь (1), а також їх узгодженості, з використанням принципу максимуму одержуємо, що $R_i^{[n]}(x,t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{m+1}\right)(i=1,2)$ [7].

2. Результати числових розрахунків

Наведемо результати розрахунків за формулами (4), (9) при $\rho_0(x, t)\equiv 0$, $c_0(t) = e^{-t}$, $\beta = 1/36\ c^{-1}$, $\alpha = 1/18000\ c^{-1}$, $v = 1/36\ мс^{-1}$. На рис. 1 зображено розподіли концентрацій $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ при $t_0 = 0{,}1;\ 1;\ 2;\ 3$ (відповідно криві 1*a*-4*a* при $\varepsilon = 0$ та криві 1*b*-4*b* при $\varepsilon = 0{,}05$). Розподіли концентрацій $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ для $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}03;\ 0{,}01$ (відповідно криві 1-4) зображено на рис. 2.

При цьому бачимо, що малі зміни коефіцієнтів дифузії (і відповідно малі зміни концентрації домішок) приводять до відносно суттєвих змін концентрації осаду завантаження, що не враховує класична модель Мінца.

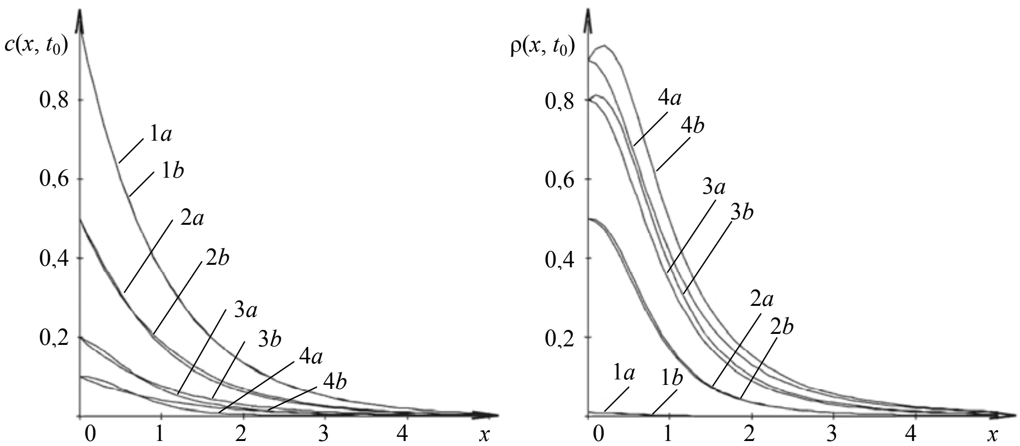

Рис. 1. Розподіл $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ у різні моменти часу.
Криві *a* відповідають $\varepsilon = 0$, а *b* — $\varepsilon = 0{,}05$

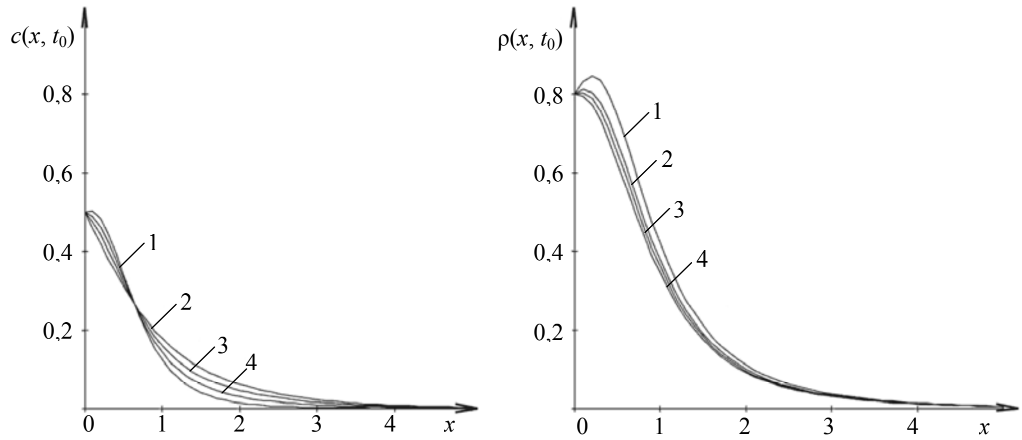

Рис. 2. Розподіл $c(x, t_0)$ і $\rho(x, t_0)$ для різних значень ε

Висновки. Запропонована в роботі методика уточнення відомої моделі Мінца шляхом переходу до відповідної «збуреної» задачі (1), (2) дозволяє застосувати класичні форми законів, які описують процеси руху рідини в пористих середовищах, а при побудові розв'язку задач, не починаючи «спочатку», доповнювати відомі «незбурені» розв'язки відповідними поправками. Слід відзначити, що запропонований вище підхід можна також використати для розв'язування відповідних задач за умови $\tau = 0$ (підсилення нелінійності) й у випадках складнішої структури коефіцієнта дифузії, наприклад, якщо $D = \varepsilon\,[1 + \mu\, h(c(x, y, t))]$, або $D = \varepsilon\left(1 + \mu\int_0^t c(x, y, \tilde{t})\,d\tilde{t}\right)$, чи $D = \varepsilon\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i a_i c^i\right)$ [6, 11], де μ, a_i — довільні дійсні числа. Планується поширити запропоновану методику на відповідні нелінійні задачі, а також аналогічні дво- та тривимірні задачі.

Література

[1] *Минц Д. М.* Теоретические основы технологии очистки воды. — М.: Стройиздат, 1964. — 156 с.

[2] *Шехтман Ю. М.* Фильтрация малоконцентрированных суспензий. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — 212 с.

[3] *Жуковицкий А. А., Забежинский Я. Л., Тихонов А. Н.* Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала // Журн. физ. химии. — 1945. — Т. 19, вып. 6. — С. 253-261.

[4] *Смирнов А. Д.* Сорбционная очистка воды. — Л.: Химия, 1982. — 166 с.

[5] *Єльсгольц Л. Є., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М: Наука, 1971.– 296 с.

[6] *Бомба А. Я., Присяжнюк І. М.* Асимптотичне розвинення розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу «конвекція-дифузія» із запізненням // Доповіді НАН України. — 2005. — № 3. — С. 60-66.

[7] *Бомба А. Я.* Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн. — 1982. — Т. 4, № 4. — С. 493-496.
[8] *Лаврик В. И., Бомба А. Я., Власюк А. П.* Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной среде. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. — 16 с. (Препр.; 85.72).
[9] *Демчик І. І.* Лінійна модель фільтрування (модель Мінца) та її узагальнення // Вісник УДУВГП (збірник наукових праць). — 2004. — Вип. 1(25). — С. 107-118.
[10] *Кочмарский В. З., Демчик И. И.* Интегрирование системы уравнений фильтрования методом Римана. В сб.: Дифференциальные уравнения и их приложения. — Днепропетровск: Днепропетр. гос. ун-т, 1986. — С. 50-53.
[11] *Бомба А. Я., Присяжнюк И. М., Климюк Ю. Е.* Численно-асимптотическое приближение решений одного класса модельных нелинейных сингулярно возмущенных краевых задач конвективной диффузии с последействием // Компьютерная математика. — 2005. — № 3. — С. 3-12.

Моделирование процесса очистки сточной воды с учетом зависимости коэффициента диффузии от концентрации

Андрей Бомба, Игорь Присяжнюк, Андрей Сафоник

Обобщена модель процесса очистки сточной воды на каркасно-засыпных фильтрах путем «диффузионного возмущения» известной модели Минца. Предложен алгоритм асимптотического развития решения соответствующей сингулярно возмущенной задачи для нелинейной системы дифференциальных уравнений типа «конвекция-диффузия-массообмен» с опозданием во времени. Получены формулы для характеристики соотношения между концентрациями загрязнений сточной воды и фильтра. На этой основе проведен компьютерный эксперимент. При этом применяются классические формы законов, которые описывают процессы движения жидкости и загрязнений в пористых средах. Это разрешает при решении соответствующих возмущенных задач, не начиная «всё сначала», дополнять известные «невозмущенные» решения соответствующими поправками.

Modelling of sewerage treatment process allowing for diffusion coefficient dependence of concentration

Andriy Bomba, Igor Prysyazhnyuk, Andriy Safonyk

The model of sewerage treatment process on wire-frame filling filters is generalized by a way «diffusive disturbance» of the known model by Mints as well as the algorithm of asymptotic developing decision of the corresponding singular perturbative task for the nonlinear system of differential equations of «convection-diffusion-mass exchange» type with time delay. Formulae are obtained for describing a relation between contamination concentrations of both sewerage and filter. On this basis the computer experiment is carried out. At that settles the classic forms of laws, which describe the processes of motion of both liquid and contaminations in porous media, are saved. At solving the corresponding perturbative problems it gives an opportunity to complement the known «unperturbative» decisions by certain amendments, not beginning «everything at first».

Отримано 19.06.07