УДК 539.3:538.6:534.1

# Застосування гамільтонового формалізму в теорії поширення магнітов'язкопружних хвиль зсуву в неоднорідно-періодичних середовищах

Микола Шульга

Д. ф.-м. н., член-кор. НАН України, професор, Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, вул. П. Нестерова, 3, Київ, 03057, тел.: (044) 454-77-53, e-mail: mo_shulga@ukr.net

*Побудовано і проаналізовано структуру загального розв'язку задачі про поширення плоских магнітов'язкопружних хвиль зсуву в неоднорідно-періодичних середовищах в рамках моделі лінеаризованої магнітострикції феритів кубічної системи з врахуванням феромагнітного резонансу і дисипації енергії.*

**Ключові слова*:*** неоднорідно-періодичне магнітострикційне середовище, феромагнітний резонанс, дисипація енергії, плоскі магнітов'язкопружні хвилі.

**Вступ.** Взаємодія механічних деформацій твердих тіл з електромагнітним полем базується на різних фізичних механізмах і моделях залежно від електричних і магнітних властивостей матеріалів [1-10]. Усі тверді діелектрики, незалежно від їх структури і симетрії, мають електрострикційні властивості. Особливо важлива електрострикція в сегнетоелектриках: у разі їх попередньої поляризації постійним електричним полем для них характерний аномально високий п'єзоефект (лінеаризована електрострикція). У деяких кристалах (кварц, титанат барію та ін.) проявляється лінійний п'єзоелектричний ефект (п'єзоефект). Деформації і напруження в твердих тілах із п'єзоефектом або електрострикцією називаються електропружними (акустоелектричними). Магнітним упорядкованим структурам властива магнітострикція, яка досягає значних величин у феро- й антиферомагнетиках та феритах. Питання про існування лінійного п'єзомагнітного ефекту є дискусійним, і він якщо і є (в антиферомагнетиках), то дуже слабкий [1]. Деформації та напруження в твердих тілах із магнітострикцією називаються магнітопружними (акустомагнітними). У твердих тілах і за відсутності п'єзоелектричних, електро- і магнітострикційних властивостей проявляється взаємодія електромагнітного поля з деформаціями твердих тіл шляхом силової дії електромагнітного поля (сила Лоренца, тензор напружень Максвела) і виникнення індукційних струмів [4, 6, 8-10]. Деформації і напруження в твердих тілах, спричинені силовим впливом електромагнітного поля, називаються електромагнітопружними (акустоелектромагнітними). Якщо механізм силової дії слабкий, то електричні струми відповідно до закону Джоуля-Ленца та співвідношень термопружності Дюамеля-Неймана можуть викликати значні теплові напруження.

Важливе значення мають дослідження поширення електропружних та магнітопружних, і в певній мірі електромагнітопружних, хвиль у періодично-неоднорідних середовищах із різними фізико-механічними властивостями, зважаючи на перспективність таких структур при створенні різного типу пристроїв на зв'язаних хвилях. Цьому питанню присвячена значна кількість робіт [12-14]. Можливості вивчення загальних питань теорії значно розширюються, якщо рівняння хвильової задачі вдається звести до гамільтонової системи та скористатися відповідними теоремами для аналізу загального розв'язку такої системи [12-16]. Зупинимося докладніше на цьому питанні в задачах про поширення магнітов'язкопружних хвиль зсуву в періодично-неоднорідних середовищах із властивостями магнітострикції феритів кубічної системи.

## 1. Рівняння лінеаризованої магнітострикції феритів

Лінеаризовану в стані магнітного насичення $\vec{M}_S = \vec{M}_0 = M_0 \vec{e}_z$ полем $\vec{H}_0 = H_0 \vec{e}_z$ систему рівнянь магнітострикції за антиплоскої деформації $w\,(x, y, t)$ для феритів кубічної системи можна записати [7, 14-16] у вигляді

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} = 0,$$

$$\sigma_{xz} = c_{55} \gamma_{xz} + \beta_2 M_0^{-1} m_x,$$

$$\sigma_{yz} = c_{55} \gamma_{yz} + \beta_2 M_0^{-1} m_y,$$

$$b_x = h_x + 4\pi m_x, \quad b_y = h_y + 4\pi m_y,$$

$$h_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad h_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} + \omega_r m_x + \omega_H m_y = \frac{\omega_M}{4\pi} h_y - \gamma \beta_2 \gamma_{yz},$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} + \omega_r m_y - \omega_H m_x = -\frac{\omega_M}{4\pi} h_x + \gamma \beta_2 \gamma_{xz}. \qquad (1)$$

У системі (1) прийняті загальновживані позначення: $\rho$ — густина; $c_{55}$ — пружна стала, $\beta_2$ — магнітопружна стала; $\gamma$ — гіроскопічне відношення; $h_\alpha$, $b_\alpha$, $m_\alpha$ — відхилення магнітного поля від поля підмагнічування $\vec{M}_0$ та $\vec{H}_0$; $\varphi$ — магнітний потенціал; $\sigma_{zx}$, $\sigma_{zy}$ і $\gamma_{zx} = \dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\gamma_{zy} = \dfrac{\partial w}{\partial y}$ — механічні напруження і деформації;

$\gamma H_0 = \omega_H$ — частота феромагнітного резонансу; $\omega_M = 4\pi\gamma M_0$; $\omega_r$ — частота релаксації ($\omega_r^{-1} = \tau_r$ — час релаксації).

Система (1) ускладнюється квазікласичними рівняннями прецесії магнітного моменту, в яких на відміну від робіт [14-16] по поширенню хвиль, враховано дисипацію енергії. Для її врахування використовуються [11] модифіковані рівняння Блоха для прецесії магнітного моменту

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\gamma \vec{M} \times \vec{H} + \omega_r (\chi_0 \vec{H}_0 - \vec{M}), \tag{2}$$

де $\chi_0 = M_0 / H_0$ — значення магнітної сприйнятливості для статичного поля підмагнічування.

Зауважимо, що поряд із співвідношенням (2) у літературі відомі інші, близькі до нього, залежності. В усіх подібних співвідношеннях втрати характеризуються одним параметром на зразок $\omega_r$; експериментальні дані та їх теоретичні інтерпретації свідчать про достатність одного параметра для опису втрат у феромагнетиках.

## 2. Перетворення рівнянь за монохроматичних коливань до системи гамільтонового типу

При гармонічних коливаннях (часовий множник exp (- $i\,\omega\, t$) опущений і амплітудні функції позначені тими ж самими літерами) з рівнянь (1) можна визначити амплітудні значення $m_x$, $m_y$. Тоді $\sigma_{xz}$, $\sigma_{yz}$, $b_x$, $b_y$ і похідні від переміщень $w\,(x, y)$ та магнітного потенціалу $\varphi\,(x, y)$ пов'язують залежності

$$\sigma_{xz} = c_{55*}\frac{\partial w}{\partial x} - ic_{54*}\frac{\partial w}{\partial y} + \beta_{51}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\beta_{52}\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\sigma_{yz} = ic_{54*}\frac{\partial w}{\partial x} + ic_{55*}\frac{\partial w}{\partial y} + i\beta_{52}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta_{51}\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$b_x = -\mu\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial x} + 4\pi\beta_{51}\frac{\partial w}{\partial x} - 4\pi i\beta_{52}\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$b_y = i\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mu\frac{\partial \varphi}{\partial x} + 4\pi i\beta_{52}\frac{\partial w}{\partial x} + 4\pi\beta_{51}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{3}$$

Комплексні модулі в'язкопружності $c_{55*}$, $c_{54*}$, комплексні компоненти тензора Польдера $\mu$, $\alpha$ та магнітов'язкопружні модулі $\beta_{51}$, $\beta_{52}$ визначаються формулами

$$c_{55*} = c_{55} + \frac{\omega_H \gamma \beta_2^2 M_0^{-1}}{(\omega + i\omega_r)^2 - \omega_H^2}, \quad c_{54*} = \frac{(\omega + i\omega_r)\gamma \beta_2^2 M_0^{-1}}{(\omega + i\omega_r)^2 - \omega_H^2},$$

$$\mu = 1 - \frac{\omega_H \omega_M}{(\omega + i\omega_r)^2 - \omega_H^2}, \quad \alpha = \frac{(\omega + i\omega_r)\omega_M}{(\omega + i\omega_r)^2 - \omega_H^2},$$

$$\beta_{51} = \frac{\omega_H \gamma \beta_2}{(\omega + i\omega_r)^2 - \omega_H^2}, \quad \beta_{52} = \frac{(\omega + i\omega_r)\gamma \beta_2}{(\omega + i\omega_r)^2 - \omega_H^2}. \tag{4}$$

Перетворимо сукупність матеріальних співвідношень (3) і рівняння

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \rho\omega^2 w = 0,$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

таким чином, щоб одержати систему рівнянь відносно $\sigma_{xz}$, $b_x$, $w$, $\varphi$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} = r_{11} i \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} + r_{21} i \frac{\partial b_x}{\partial y} + \alpha_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \rho\omega^2 w + \alpha_{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} = r_{21} i \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} + r_{22} i \frac{\partial b_x}{\partial y} + \alpha_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \alpha_{22} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\mu}{\Delta_0} \sigma_{xz} + \frac{b_{51}}{\Delta_0} b_x - r_{11} i \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{r_{21} i}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{4\pi b_{51}}{\Delta_0} \sigma_{xz} - \frac{c_{55*}}{\Delta_0} b_x - 4\pi r_{12} i \frac{\partial w}{\partial y} - r_{22} i \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{6}$$

У рівняннях системи (6) використані позначення

$$r_{11} = -(4\pi\beta_{51}\beta_{52} + \mu c_{54*})/\Delta_0, \quad r_{12} = -(\beta_{51} c_{54*} - \beta_{52} c_{55*})/\Delta_0,$$

$$r_{21} = -4\pi(\mu\beta_{52} + \alpha\beta_{51})/\Delta_0, \quad r_{22} = -(4\pi\beta_{51}\beta_{52} - \alpha c_{55*})/\Delta_0,$$

$$\alpha_{11} = -c_{55*} - c_{54*} r_{11} - 4\pi\beta_{52} r_{12},$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4\pi}\alpha_{21} = -\beta_{51} - c_{54*}\frac{r_{21}}{4\pi} - \beta_{52} r_{22},$$

$$\alpha_{22} = \mu - \alpha r_{22} - \beta_{52} r_{21}, \qquad \Delta_0 = \mu c_{55*} + 4\pi\beta_{51}^2. \tag{7}$$

Для плоских хвиль приймаємо

$$\{\sigma_{xz}, b_x, w, \varphi\} = \mathrm{Re}\left\{c_{00} q_1(\xi), H_0 q_2(\xi), \frac{h_{00}}{4\pi} p_1(\xi),, \frac{h_{00} c_{00}}{H_0} p_2(\xi)\right\} e^{i n_2 k y - i\omega t}, \tag{8}$$

де змінна $\xi = x / h_{00}$; $(n_1, n_2)$ — напрямні косинуси нормалі до фронту хвиль, причому $n_1 = 0$, $n_2 = \pm 1$.

Для амплітудних функцій $q_1(\xi)$, $q_2(\xi)$, $p_1(\xi)$, $p_2(\xi)$ з рівнянь у часткових похідних (6) одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь ($i, j = 1, 2$)

$$\frac{dq_i}{d\xi} = R_{ij} q_j + Q_{ij} p_j,$$

$$\frac{dp_i}{d\xi} = -P_{ij} q_j - R_{ji} p_j, \tag{9}$$

постійні коефіцієнти якої є такими

$$R_{11} = -k n_2 r_{11} h_{00}, \quad R_{12} = -k n_2 r_{12} \frac{h_{00} H_0}{c_{00}},$$

$$R_{21} = -k n_2 r_{21} \frac{c_{00} h_{00}}{H_0}, \quad R_{22} = -k n_2 r_{22} h_{00},$$

$$P_{11} = -\frac{4\pi\mu}{\Delta_0} c_{00}, \quad P_{12} = P_{21} = -\frac{4\pi\beta_{51}}{\Delta_0} H_0,$$

$$P_{22} = \frac{c_{55*}}{\Delta_0} \frac{H_0^2}{c_{00}}, \quad Q_{11} = -\frac{1}{4\pi}(\rho\omega^2 + \alpha_{11} k^2) \frac{h_{00}^2}{c_{00}},$$

$$Q_{12} = Q_{21} = -k^2 \alpha_{12} \frac{h_{00}^2}{H_0}, \quad Q_{22} = -k^2 \alpha_{22} \frac{h_{00}^2 c_{00}}{H_0^2}. \tag{10}$$

Система (9) є [12-14] гамільтоновою системою з функцією Гамільтона

$$H = \frac{1}{2} q_i P_{ij} q_j + p_i R_{ij} q_j + \frac{1}{2} p_i Q_{ij} p_j. \tag{11}$$

## 3. Загальний розв'язок для періодично-неоднорідного середовища

Якщо фізико-механічні параметри регулярно-шаруватого півпростору будуть періодичними функціями координати $x$ з періодом $h$, то система (9) буде гамільтоновою періодичною системою з періодом $\xi_{00} = h / h_{00}$. Структура загального розв'язку періодичної системи визначається теоремою Флоке, виходячи з якої йому можна надати [13, 14] вигляду

$$\left[\vec{q}(\xi), \vec{p}(\xi)\right]^T = \sum_{m=1}^{4} c_m \rho_m^{n-1} \mathbf{\Omega}(\xi - (n-1)\xi_{00}, 0) \vec{d}_m, \tag{12}$$

де $\mathbf{\Omega}(\xi, 0)$ — матрицант системи (5) на першому (основному) періоді $(0, \xi_{00})$, $c_m$ — невідомі сталі інтегрування.

Власні значення (мультиплікатори) $\rho_m$ і власні вектори $\vec{d}_m$ матриці монодромії $\mathbf{\Omega}(\xi_{00},0)$ четвертого порядку визначаються з характеристичного рівняння

$$\det\left[\mathbf{\Omega}(\xi_{00},0)-\rho\mathbf{I_4}\right]=0 \tag{13}$$

та однорідної системи

$$\left[\mathbf{\Omega}(\xi_{00},0)-\rho\mathbf{I_4}\right]\vec{d}_m=0\,. \tag{14}$$

Тут $\mathbf{I}_4$ — одинична матриця четвертого порядку. Передбачається, що мультиплікатори $\rho_m$ прості. Випадок кратних мультиплікаторів, який практично не зустрічається, вимагає особливого розгляду.

Характеристичне рівняння (13) матриці монодромії гамільтонової періодичної системи є зворотним

$$\rho^4-a_1\rho^3+a_2\rho^2-a_1\rho+1=0 \tag{15}$$

і його можна звести до двох квадратних рівнянь

$$\rho^2-2b_1\rho+1=0\,,\quad \rho^2-2b_2\rho+1=0\,. \tag{16}$$

Коефіцієнти цих рівнянь $b_1$, $b_2$ визначаються з квадратного рівняння

$$4b^2-2a_1b+a_2-2=0\,. \tag{17}$$

Якщо покласти $\rho=\exp(\pm is)$, то характеристичні рівняння (16) можна записати в тригонометричній формі

$$\cos s_1=b_1\,,\quad \cos s_2=b_2\,. \tag{18}$$

Для дисипативних середовищ коефіцієнти $a_1$, $a_2$, а отже і корені $b_1$ і $b_2$ рівнянь (16), завжди є комплексними величинами. У свою чергу комплексними будуть і характеристичні числа $\rho_1$, $\rho_2$ та $\rho_3$, $\rho_4$, що визначаються з рівнянь (16). Виразимо характеристичні числа через комплексні корені $s_1=s_{1.re}+is_{1.im}$, $s_2=s_{2.re}+is_{2.im}$ рівнянь (18)

$$\rho_1=\exp\left(is_{1.re}-s_{1.im}\right),\quad \rho_2=\exp\left(-is_{1.re}+s_{1.im}\right),$$

$$\rho_3=\exp\left(is_{2.re}-s_{2.im}\right),\quad \rho_4=\exp\left(-is_{2.re}+s_{2.im}\right).$$

Таким чином розв'язок (12) набуде вигляду

$$[\vec{q}(\xi),\vec{p}(\xi)]^T=c_1e^{(is_{1.re}-s_{1.im})(n-1)}\mathbf{\Omega}(\xi-(n-1)\xi_{00},0)\vec{d}_1+$$

$$+c_2 e^{(-is_{1.re}+s_{1.im})(n-1)}\mathbf{\Omega}(\xi-(n-1)\xi_{00},0)\vec{d}_2 +$$
$$+c_3 e^{(is_{2.re}-s_{2.im})(n-1)}\mathbf{\Omega}(\xi-(n-1)\xi_{00},0)\vec{d}_3 +$$
$$+c_4 e^{(-is_{2.re}-s_{2.im})(n-1)}\mathbf{\Omega}(\xi-(n-1)\xi_{00},0)\vec{d}_4 \,. \tag{19}$$

Перший і третій доданки цього виразу при $s_{j.re} > 0$, $s_{j.im} > 0$ ($j = 1, 2$) відповідають хвилям, які поширюються з затуханням у додатному напрямку $\xi \to +\infty$ ($n \to +\infty$) осі $\xi$, а другий і четвертий доданки — хвилям, які поширюються у від'ємному напрямку $\xi \to -\infty$ ($n \to -\infty$) осі $\xi$.

Для напівобмежених областей $\xi < 0$ у формулі (19) необхідно покласти сталі $c_2 = c_4 = 0$, а для обмежених областей $|\xi| < \infty$ — слід враховувати всі чотири доданки.

**Висновки.** У статті узагальнюються отримані раніше автором результати досліджень поширення плоских хвиль у неоднорідно-періодичних магнітострикційних середовищах. Використовуються лінеаризовані рівняння моделі, в якій враховується феромагнітний резонанс і дисипація енергії. Побудовано і проведено аналіз структури загального розв'язку задачі про поширення плоских магнітов'язкопружних хвиль зсуву в неоднорідно-періодичному середовищі.

### Література

[1] Физическая акустика. Т. 1, часть А. Методы и приборы ультразвуковых исследований. — М.: Мир, 1966. — 592 с.
[2] *Сиротин Ю. И., Шаскольская Н. П.* Основы кристаллографии. — М.: Наука, 1975. — 680 с.
[3] *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. — М.: Наука, 1982. — 424 с.
[4] *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. — М.: Мир, 1986. — 160 с.
[5] *Шульга Н. А., Болкисев А. Н.* Колебания пьезоэлектрических тел. — К.: Наук. думка, 1990. — 228 с.
[6] *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. — М.: Мир, 1991. — 560 с.
[7] *Такер Дж., Рэмптон В.* Гиперзвук в физике твердого тела. — М.: Мир, 1975. — 453 с.
[8] *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В.* Термоупругость электропроводных тел. — К.: Наук. думка, 1977. — 247 с.
[9] *Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Гнідець Б. М.* Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. — К.: Наук. думка, 1978. — 230 с.
[10] *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.* Магнитотермоупругость электропроводных тел. — К.: Наук. думка, 1982. — 293 с.
[11] *Гуревич А. Г.* Ферриты на сверхвысоких частотах. — М.: ГИФМЛ, 1960. — 407 с.

[12] *Шульга Н. А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. — К.: Наук. думка, 1981. — 200 с.
[13] *Shul'ga N. A.* Propagation of elastic waves in periodic-nonhomogeneous space // Int. Appl. Mech. — 2003. — Vol. 39, № 7. — P. 763-796.
[14] *Shul'ga N. A.* Propagation of coupled waves in layered-periodic continua for interaction with an electromagnetic field // Int. Appl. Mech. — 2003. — Vol. 39, № 10. — P. 1146-1172.
[15] *Шульга М. О.* Про поширення поперечних хвиль в магнітопружних періодичних середовищах // Доп. НАН України. — 2002. — № 7. — С. 60-63.
[16] *Шульга М. О.* До теорії магнітопружних хвиль в періодичних середовищах // Доп. НАН України. — 2002. — № 8. — С. 55-59.

## Use of Hamiltonian Formalism in the Theory of Propagation of Magnetoviscoelastic Shear Waves in Nonhomogeneous-Periodic Spaces

Mykola Shul'ga

*The structure of general solution for problem of propagation of magnetoviscoelastic shear waves in nonhomogeneous-periodic spaces is got and analyzed, using the model of linearized magnetostriction of ferrit of cubic system considering ferromagnetic resonance and energy dissipation.*

## Использование гамильтонового формализма в теории распространения магнитовязкоупругих волн сдвига в неоднородно-периодических средах

Николай Шульга

*Получено и проанализировано структуру общего решения задачи о распространении плоских магнитовязкоупругих волн сдвига в неоднородно-периодических средах в рамках модели линеаризированной магнитострикции ферритов кубической системы с учетом ферромагнитного резонанса и диссипации энергии.*

Отримано 08.08.05