УДК 539.3

Некоторые волновые модели с активными и магнитомеханическими взаимодействиями

Игорь Селезов

Д. ф.-м. н., профессор, Институт гидромеханики НАН Украины, ул. Желябова, 8/4, Киев, 03680,
e-mail: selezov@uninet.kiev.ua

Рассматриваются обобщенные модели динамики сплошных сред, учитывающие активные взаимодействия и связанность полей и описывающие распространение возмущений с конечной скоростью. Сформулированы уравнения движения активной намагничиваемой магнитострикционной среды с активными взаимодействиями. Представлена новая обобщенная модель феррогидродинамики, включающая гиперболическое уравнение для потенциала скоростей φ, *гиперболическое уравнение для температуры* $\breve{t}$ *и эллиптическое уравнение для потенциала магнитного поля* ψ.

Ключевые слова: волновые модели, активные взаимодействия, магнетострикционная среда, феррогидродинамика, распространение возмущений.

Введение. Построение обобщенных моделей механики сплошных сред представляет большой интерес и требует привлечения дополнительных соображений физико-математического характера, реализация которых представляет существенные трудности [1-6]. В работе кратко рассматриваются три аспекта проблемы построения обобщенных моделей: активные взаимодействия, связанность магнитомеханических и тепловых полей и конечность скорости распространения возмущений (слабых разрывов).

Традиционно движение идеального упругодеформируемого континуума описывается в лагранжевой системе координат на основе законов сохранения и определяющих уравнений. В случае активных сплошных сред, допускающих существование самоподдерживающихся волн за счет источников накачки энергии, распределенных в среде, ситуация существенно усложняется. Естественно, такие модели принципиально отличаются от традиционных (пассивных) моделей механики сплошных сред. Построение такого рода моделей представляет большой интерес при исследовании биологических объектов [7-12]. Обычно для замыкания системы уравнений моделей привлекаются законы сохранения. Однако, в большинстве случаев этого недостаточно, поэтому используются еще дополнительные постулаты. Такой подход построения моделей можно рассматривать как аксиоматический [13]. Возможно также построение волновых моделей на основе набора гиперболических операторов [14] с их последующей расшифровкой и физической интерпретацией.

В работе рассматривается построение двух обобщенных моделей механики сопряженных полей. При этом модифицируются определяющие уравнения моделей посредством введения дополнительных слагаемых. В п. 1 представлены общие уравнения движения упругодеформируемого континуума и приведены соображения, каким образом они могут быть обобщены на случай активных сред, а также какие изменения необходимо внести для учета конечности скорости распространение возмущений. В п. 2 приведена и проанализирована нелинейная волновая модель активной намагничиваемой магнитострикционной среды. В п. 3 развита новая обобщенная волновая модель феррогидродинамики, учитывающая сжимаемость среды и тепловую релаксацию, что приводит к распространению волн с конечными скоростями.

1. Уравнения активного упругодеформируемого континуума

Для активного упругодеформируемого континуума основные уравнения в лагранжевых координатах представляются в виде

$$\rho_0 = \rho J, \qquad J = \det\left\{\partial x^k / \partial X^K\right\}, \tag{1}$$

$$T^{Kk}{}_{,K} + T^{Km}\begin{Bmatrix} k \\ ml \end{Bmatrix} x^l{}_{,K} + T^{Kk}\begin{Bmatrix} L \\ LK \end{Bmatrix} + \rho_0\left(f^k - A^k\right) = C^k, \tag{2}$$

$$T^{Kk} x^m{}_{,K} = T^{Km} x^k{}_{,K} \Rightarrow T^{KL} = T^{LK}, \tag{3}$$

$$\rho_0 \epsilon = T^{KL} E_{KL} + Q^K{}_{,K} + \begin{Bmatrix} k \\ kl \end{Bmatrix} x^l{}_{,K} Q^K + \rho_0 h, \tag{4}$$

$$T = \partial \epsilon / \partial S, \qquad DS/Dt \geq 0, \tag{5}$$

$$\epsilon = \epsilon\left(S;\, \psi_1, \ldots, \psi_m;\, X^1,\, X^2,\, X^3\right), \tag{6}$$

$$F_\alpha\left(T^{KL}, E_{KL}, T; \psi_1, \ldots, \psi_m; C^k\right) = 0, \quad \alpha = \overline{1,n}. \tag{7}$$

В (1)-(7) приняты следующие обозначения: T^{Kl} — компоненты тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа или Лагранжа, T^{KL} — компоненты тензора напряжений Кирхгофа, определяющего условные напряжения, отнесенные к недеформированным элементам, E_{KL} — компоненты тензора деформаций Лагранжа, ρ_0 — плотность среды в начальный момент времени, ρ — текущая плотность, f_k — массовая сила, A^k — ускорение, S — глобальная энтропия, T — абсолютная температура, ϵ — внутренняя энергия, F_α — определяющие уравнения и постулаты, Q^K — подводимая теплота, h — энергия на единицу массы, генерируемая распределенными источниками, C^k — оператор активной среды, $\begin{Bmatrix} k \\ i\, j \end{Bmatrix}$ —

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2006, вип. 3, 159-166

символы Кристоффеля второго рода. По повторяющимся индексам предполагается суммирование, индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующей координате.

Уравнения (1) и (2) — законы сохранения массы и импульса, соотношения (3) выражают симметричность тензора напряжений при отсутствии объемных моментов, уравнения (4) и (5) — первый и второй законы термодинамики. Оператор активного взаимодействия C^k входит в закон сохранения импульса (2) и в определяющие уравнения (7).

2. Уравнения активной магнитострикционной среды

Движение активной намагничиваемой магнитострикционной среды описывается системой уравнений [15]

$$\sigma_{ij,j} = \rho\partial_{tt}u_i + \varepsilon_{ijk}J_jB_k + \rho_eE_i\,, \tag{8}$$

$$\varepsilon_{ijk}H_{k,j} = J_i + \partial_tD_i\,,\quad D_{k,k} = \rho_e\,, \tag{9}$$

$$\varepsilon_{ijk}E_{k,j} = -\partial_tB_i\,,\quad B_{k,k} = 0\,, \tag{10}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda e\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} + \alpha\left(\vec{H}\right)H_iH_j + b\left(\vec{H}\right)H_kH_k\delta_{ij}\,, \tag{11}$$

$$\varepsilon_{ij} = \left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)/2,\quad e = u_{k,k}\,, \tag{12}$$

$$J_i = \sigma\left(E_i + \varepsilon_{ijk}\partial_tu_jB_k\right), \tag{13}$$

$$B_i = \mu\left(\vec{H}\right)H_i - 2\left[\alpha\left(\vec{H}\right)\varepsilon_{ij} + b\left(\vec{H}\right)e\delta_{ij}\right]H_j + \int\limits_0^t M_i\left(\vec{H}\right)d\tau,\ \left\{i,j,k = \overline{1,3}\right\}. \tag{14}$$

В уравнениях (8)-(14) приняты следующие обозначения: σ_{ik} и ε_{ik} — компоненты тензоров напряжения и деформации соответственно; u_i — компоненты вектора перемещений; J_i — компоненты вектора плотности электрического тока; H_i; E_i и B_i, D_i — компоненты векторов напряженностей и индукций магнитного и электрического полей соответственно; λ и G — постоянные Ламе; σ — электропроводность; ρ_e — плотность электрических зарядов; $\alpha\left(\vec{H}\right)$ и $b\left(\vec{H}\right)$ — сдвиговая и дилатационная магнитострикционные постоянные; ε_{ijk} — кососимметричный символ Кронекера; δ_{ij} — дельта-символ Кронекера. В отличие от известных моделей в уравнение (14) введено дополнительное слагаемое, учитывающее активное взаимодействие.

В дальнейшем, в уравнениях (8) и (9) пренебрегаем токами смещения и электрическими зарядами, а в выражении (11) учитываем только дилатационную магнитострикционную составляющую $b(\vec{H})$. На основе уравнений (8)-(14) проведено исследование распространения волн от импульса, мгновенно приложенного к границе полупространства. В рассматриваемом случае система уравнений (8)-(14) сводится к двум связанным сильно нелинейным дифференциальным уравнениям относительно $u_3(z,t)$ и $H_1(z,t)$. Численное исследование соответствующей начально-краевой задачи показывает, что активное взаимодействие приводит к сильному искажению распространяющегося импульса и возмущения магнитного поля.

3. Волновые уравнения феррогидродинамики

Представим обобщенные уравнения феррогидродинамики, описывающие поведение магнитной жидкости (суспензии с феррочастицами размером 3-15 нм) с учетом температурной релаксации. В обобщенной модели учитываются эффекты сжимаемости и временной релаксации, что приводит к гиперболической системе уравнений, описывающей распространение волн с конечными скоростями.

Традиционная модель включает обычное уравнение теплопроводности параболического типа, которое описывает диффузию тепла в среде, и при возбуждении среды предсказывает распространение слабого разрыва с бесконечной скоростью. Для связанных полей, в данном случае магнитогидродинамических, этот парадокс преодолевается заменой параболического оператора гиперболическим. Такая процедура ведет свое начало от Максвелла (1867) [16] — основоположника теории электромагнетизма. Он представил гиперболическую модель, которая описывает распространение электромагнитных волн с конечной скоростью, равной скорости света. Впоследствии Максвелл на основе кинетической теории газов развил гиперболическую модель теплопроводности, которая описывает распространение тепла с конечной скоростью, и вывел формулу для этой скорости. С математической точки зрения в обоих случаях параболический оператор расширялся до гиперболического. Все последующие многочисленные исследования по обобщению параболических моделей в гиперболические, в частности гиперболические модели термоупругости, основаны на этой идее [3].

Исследование распространения волн в магнитных жидкостях без учета временной релаксации проводилось в [17-21].

Рассмотрим уравнения, описывающие слабые возмущения покоящейся в начальном состоянии сжимаемой невязкой жидкости, для которой балансовые и определяющие уравнения принимают следующий вид:
уравнение сохранения импульса

$$\breve{\rho}\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{V}\right]=-\vec{\nabla}P+\mu_0(\vec{M}\cdot\vec{\nabla})\vec{H}\,, \tag{15}$$

уравнение состояния

$$\frac{\partial P}{\partial t}=-K\vec{\nabla}\cdot\vec{V}+\beta K\frac{\partial T}{\partial t}\,, \tag{16}$$

обобщенное гиперболическое уравнение распространения тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t}+T=\kappa\nabla^2 T-\tau\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}-\gamma\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\,, \tag{17}$$

уравнения для потенциала магнитного поля

$$\nabla^2\psi=0\,,\quad \vec{H}=\vec{\nabla}\psi\,, \tag{18}$$

определяющие уравнения

$$\vec{M}=\chi\vec{H},\quad \vec{B}=\mu_0(1+\chi)\vec{H}\,, \tag{19}$$

где $\vec{V}$ — вектор скорости, p — давление, χ — магнитная восприимчивость, κ — температуропроводность, μ_0 — магнитная постоянная, K — объемный модуль упругости, β — объемный коэффициент температурного расширения, τ — время релаксации, $\gamma=\dfrac{c_p-c_v}{\beta c_v}$ — коэффициент термоупругого рассеяния.

Влияние температуры на плотность и намагниченность не учитывается.

Представляем поле в виде суммы невозмущенного и возмущенного полей

$$P(\vec{x},t)=p_0+p(\vec{x},t),\quad \breve{\rho}(\vec{x},t)=\rho_0+\rho(\vec{x},t),$$
$$\vec{V}(\vec{x},t)=0+\vec{v}(\vec{x},t),\quad T(\vec{x},t)=T_0(\vec{x})+\breve{t}(\vec{x},t),$$
$$\vec{H}(\vec{x},t)=\vec{H}_0(\vec{x})+\vec{h}(\vec{x},t),\quad \vec{M}(\vec{x},t)=\vec{M}_0(\vec{x})+\vec{m}(\vec{x},t). \tag{20}$$

После подстановки (20) в систему (15)-(19) получаем две задачи: статическую и динамическую. В первой задаче искомые функции не зависят от времени. Для второй задачи, полагая возмущенные величины малыми по сравнению с невозмущенными и вводя потенциал скоростей $\vec{v}=\vec{\nabla}\varphi$, получаем систему линеаризованных уравнений

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-c_0^2\nabla^2\varphi=-\beta c_0^2\frac{\partial\breve{t}}{\partial t}+\frac{\mu_0(1+\chi)}{\rho_0}\left(\vec{\nabla}\psi_0\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right), \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2\breve{t}}{\partial t^2}-c_t^2\nabla^2\breve{t}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial\breve{t}}{\partial t}=\frac{1}{\tau}\nabla^2\varphi\,, \tag{22}$$

$$\nabla^2\psi=0\,, \tag{23}$$

где $c_0=\sqrt{K/\rho}$ — скорость распространения волн объемной дилатации, $c_t=\sqrt{K/\tau}$ — скорость распространения тепла. Уравнение (21) включает в правой части слагаемое, учитывающее влияние температуры, и диссипативный член, связанный с потерями энергии в магнитной жидкости, а уравнение (22) включает член с временной релаксацией $\tau\dfrac{\partial^2 \breve{t}}{\partial t^2}$ и составляющую, учитывающую влияние дилатационного поля. Как видно из уравнения (15), последний член не равен нулю только в том случае, когда $\vec{\nabla}\psi \neq 0$.

Исходные уравнения для векторного поля сведены к замкнутой системе уравнений (21)-(23) относительно трех скалярных функций $\varphi, \breve{t}$ и ψ. Можно показать, что решение этой системы уравнений в классе одномерных бегущих волн $\exp[i(\kappa x - \omega t)]$ не существует. Более того, решение вида $f(z)\exp[i(\kappa x - \omega t)]$ также не существует. Это связано с тем, что магнитное поле описывается в квазистатическом приближении и, как следствие, это приводит к ортогональности операторов термогидродинамики $L_1(\varphi, t)$ и магнитного поля $L_2(\psi)$ в уравнениях (22) и (23). Для существования решения задачи в классе бегущих волн требуется более точное описание магнитного поля.

Выводы. Представлены обобщенные уравнения движения упругодеформируемого континуума с учетом активных взаимодействий. Такое обобщение реализуется введением оператора активного взаимодействия в закон сохранения импульса и в определяющие уравнения. Для конечности скорости распространения возмущений система уравнений (1)-(7) должна быть гиперболического типа (необходимое условие), что в ряде случаев требует обобщения определяющих уравнений.

Приведены уравнения движения активной намагничиваемой магнитострикционной среды, обобщающие классическую модель посредством введения в определяющее уравнение для магнитной индукции слагаемого, описывающего активное взаимодействие. Проведенный численный анализ обнаруживает существенное влияние активного взаимодействия на распространение волн.

Приведена обобщенная модель феррогидродинамики, в которой учитывается конечность скорости распространения тепла. Показано, что решение задачи в классе бегущих дилатационных волн не существует в связи с ортогональностью операторов термогидродинамики и магнитного поля.

Литература

[1] *Селезов И. Т.* Концепция гиперболичности в теории управляемых динамических систем // Кибернетика и вычислительная техника. — К.: Наук. думка, 1969. — Вып. 1. — С. 131-137.

[2] *Селезов И. Т.* Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. — К.: Наук. думка, 1989. — 204 с.

[3] *Selezov I.* Some hyperbolic models for wave propagation // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. Intern. Series of Numer. Mathematics / Eds. M. Fey and R. Jeltch. Basel / Switzerland: Birkhauser, 1999. — **130**. — P. 833-842.

[4] *Selezov I.* Degenerated hyperbolic approximations of the wave theory of elastic plates // Operator Theory. Advances and Applications. Vol. 117. Differential Operators and Related

Topics: Proc. of Mark Krein Intern. Conf. — Odessa, Ukraine, 1997, Basel: Birkhauser, 2000. — P. 339-354.

[5] *Selezov I.* Some models of coupled magnetoelastic fields and their applications to the investigation of propagation and diffraction of waves // J. Math. Sci. 2001. — **104**, № 5. — P. 1490-1500.

[6] *Selezov I.* Nonlinear wave propagation in close to hyperbolic systems // Int. Series of Numerical Mathematics, Birkhauser Verlag Basel / Switzerland, 2001. — **141**. — P. 851-860.

[7] *Fung Y. C.* Biorheology of soft tissues // Biorheology, 1973. — № 10. — P. 139-155.

[8] *Селезов И. Т., Берсенев В. А.* Математическое моделирование распространения лекарственных препаратов от метамерных инъекций // Матер. 11 междунар. научно-практ. конференции «Прикл. задачи математики и механики». — Севастополь, 16-21 сент. 2002. — Изд. СевНТУ. — С. 267-271.

[9] *Селезов И. Т., Берсенев В. А.* Обобщенная модель распространения и локализации возмущений медицинского препарата при метамерных инъекциях // Матер. 12 междунар. научно-практической конференции «Прикл. задачи математики и механики». — Севастополь, сентябрь 2003. — С. 177-181.

[10] *Selezov I., Bersenev V.* Medicine spreading in tissue from metameric injections // Book of Abstracts, 5th Euromech Fluid Mechanics Conference, 24-28 Aug. 2003, Toulouse, France. — P. 262.

[11] *Селезов И. Т. Берсенев В. А.* Теоретический анализ реакции фермент-субстрат // Матер. 11 междунар. научно-практ. конференции «Прикл. задачи математики и механики». — Севастополь, 12-16 сент. 2005. — Изд. СевНТУ. — С. 143-146.

[12] *Selezov I., Bersenev V.* Excitation of transmembrane potential by subthreshold stimulus // Theses, Int. Conf. «Dynamical System Modelling and Stability Investigation». — Kiev, May 23-25, 2005. — P. 162.

[13] *Truesdell C.* A first course in rational continuum mechanics. — The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland, 1972. Русский перевод: *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975. — 592 с.

[14] *Селезов И. Т., Ткалич В. С.* О конечности скорости распространения и локализации возмущений в реальных системах // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. — Ереван: Ин-т мех. АН Арм. ССР, 1987. — С. 255-258.

[15] *Selezov I. T.* Wave processes in fluids and elastic media // Int. J. Fluid Mechanics Research. — 2003. — **30**, № 2. — P. 219-249.

[16] *Maxwell J. C.* On the dynamical theory of gases // Phil. Roy. Soc. — 1867. — **157**. — P. 49-89.

[17] *Берковский Б. М., Медведєв В. Ф., Краков М. С.* Магнитные жидкости. — М.: Химия, 1989. — 240 с.

[18] *Gotoh K., Isler W. E., Chang D. Y.* Theory of ultrasonic attenuation in magnetic fluids // IEEE Trans. Magnetics. — 1980. — MAG-16, № 2. — P. 211-213.

[19] *Tarapov I. Ye., Patsegon N. F.* Nonlinear waves in conductive magnetizable fluid // IEEE Trans. Magnetics. — 1980. — MAG-16, № 2. — P. 309-316.

[20] *Гогосов В. В., Мартынов С. И., Цуриков С. Н., Шапошникова Г. А.* Распространение ультразвука в магнитной жидкости. 1. Учет агрегирования частиц; вывод и анализ дисперсионного уравнения // Магнитная гидродинамика. — 1987. — № 2. — С. 19-27.

[21] *Селезов И. Т., Корсунский С. В.* Нелинейные волны в гидроупругих системах с магнитными жидкостями // Магнитная гидродинамика. — 1991. — № 2. — С. 41-44.

Деякі хвильові моделі з активними та магнітомеханічними взаємодіями

Ігор Селезов

Розглядаються узагальнені моделі динаміки суцільних середовищ, які враховують активні взаємодії та зв'язаність полів і описують розповсюдження збурень зі скінченною швидкістю. Сформульовано рівняння руху намагніченого магнітострикційного середовища з активними взаємодіями. Приведено нову узагальнену модель ферогідродинаміки, яка включає гіперболічне рівняння для потенціалу швидкостей φ*, гіперболічне рівняння для температури* $\breve{t}$ *й еліптичне рівняння для потенціалу магнітного поля* ψ*.*

Some Wave Models with Active and Magnetomechanical Interactions

Ihor Selezov

Extended models of the dynamics of continuous media taking into account active interactions and field connectness and describing disturbance propagation with a finite velocity are considered. The equations of motion of magnetizable magnetostrictive medium with active interactions are presented. A new extended model of ferrohydrodynamics including the hyperbolic equation for the velocity potential φ*, hyperbolic equation for the temperature* $\breve{t}$ *and elliptic equation for the potential of magnetic field* ψ *are presented and analyzed.*

Отримано 13.01.06