**УДК 518.5**

# Модифікований алгоритм Валле-Пуссена

Петро Малачівський

к. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: psmal@cmm.lviv.ua

*Описано алгоритм одноточкової заміни наближення до точок альтернансу у разі знаходження найкращої рівномірної апроксимації з інтерполюванням. Він полягає в отриманні такого уточнення наближення до точок альтернансу, при якому знаки похибки в точках альтернансу, сусідніх з точкою інтерполювання, співпадають. Цей алгоритм ґрунтується на ідеї алгоритму Валле-Пуссена — збереженні порядку зміни знаку похибки апроксимації в новому наближенні до точок альтернансу. Наведено приклад функціонування запропонованого алгоритму.*

**Ключові слова:** чебишовське (рівномірне) наближення, точки чебишовського альтернансу, схема Ремеза, алгоритм Валле-Пуссена.

**Вступ.** Алгоритм Валле-Пуссена [1] визначає спосіб отримання наступного наближення до точок чебишовського альтернансу зі збереженням черговості зміни знаку похибки в сусідніх точках альтернансу. Проте в деяких задачах найкращого рівномірного наближення знак похибки в сусідніх точках альтернансу не завжди чергується [2-5]. Зокрема, у випадку рівномірного наближення з інтерполюванням знаки похибки в точках альтернанту, сусідніх з точкою інтерполювання, співпадають [4, 6-8]. Тому для заміни точок альтернансу в цих випадках алгоритм Валле-Пуссена не годиться, оскільки він передбачає чергування зміни знаку похибки. Деякі часткові алгоритми заміни наближення до точок альтернансу, у разі співпадання знаків похибки апроксимації в точках альтернансу, сусідніх з точкою інтерполювання, розглянуто в роботах [7, 9]. У цих роботах описано схеми отримання нового наближення до точок альтернансу лише для невеликої їх кількості, а саме — двох і трьох точок альтернансу.

## 1. Опис алгоритму заміни наближення до точок альтернансу у випадку рівномірної апроксимації з інтерполюванням

Розглянемо можливий варіант заміни наближення до точок альтернансу для рівномірної апроксимації з інтерполюванням, дотримуючись ідеї алгоритму Валле-Пуссена. Алгоритм Валле-Пуссена — це алгоритм одноточкової заміни наближення до точок альтернансу. Його суть полягає в тому, що нова точка, а саме точка, в якій досягається найбільша за абсолютною величиною похибка апроксимації, вводиться в альтернанс так, щоб не порушити порядку зміни знаку похибки в новому наближенні до точок альтернансу відповідно до характеристичної властивості. Важливим моментом алгоритму заміни наближення до точок альтернансу, у випадку рівномірного наближення з однією точкою інтерполювання $u$, є дотримання умови співпадання похибки апроксимації в точках альтернанту, сусідніх з точкою $u$. Нехай після $j$-ої ітерації за схемою Ремеза на множині точок альтернансу $z_i^{(j)}$, $i=\overline{1, m+1}$ з'ясувалося, що максимальна за модулем похибка апроксимації $\rho_j$ більша від похибки в точках альтернансу $\mu_j$ $\left(\rho_j > |\mu_j|\right)$ і вона досягається в деякій точці $x_r$

$$\rho_j \equiv \left|\rho_j(x_r)\right| = \max_{x_1 \le x \le x_N} \left|\rho_j(x)\right|, \tag{1}$$

де $\rho_j(x)$ — похибка апроксимації функції $f(x)$ виразом $F_m\left(a^{(j)}; x\right)$ з ваговою функцією $w(x)$

$$\rho_j(x) = \frac{f(x) - F_m\left(a^{(j)}; x\right)}{w(x)},$$

$a^{(j)}$ — параметри апроксимації, що відповідають $j$-ій ітерації за схемою Ремеза. Нехай взаємне розташування точки $u$ щодо $j$-го наближення до точок альтернансу буде таким

$$z_1^{(j)} < z_2^{(j)} < \ldots < z_k^{(j)} < u < z_{k+1}^{(j)} < \ldots < z_{m+1}^{(j)}. \tag{2}$$

Якщо точка $x_r$, у якій досягається максимальна за модулем похибка апроксимації, розташована лівіше $k$-ої точки альтернансу $x_r < z_k^{(j)}$, або правіше $(k+1)$-ої — $x_r > z_{k+1}^{(j)}$, то заміна наближення до точок альтернансу проводиться за алгоритмом Валле-Пусенна. Особливість уточнення наближення до точок альтернансу стосується лише випадку, коли точка $x_r$ знаходиться поруч із точкою інтерполювання $u$, тобто коли вона розташована поміж точками альтернансу $z_k^{(j)}$ і $z_{k+1}^{(j)}$

$$z_k^{(j)} < x_r < z_{k+1}^{(j)}. \tag{3}$$

У цьому випадку можливі два варіанти розташування точки $x_r$ щодо точки $u$

1) $z_k^{(j)} < x_r < u$ — точка $x_r$ розташована зліва точки $u$;
2) $u > x_r > z_{k+1}^{(j)}$ — точка $x_r$ розташована справа від точки $u$.

Розглянемо отримання $(j+1)$-го наближення до точок альтернансу для кожного з цих випадків. У першому випадку, коли точка $x_r$ розташована зліва від точки $u$, її введення в наближення до точок альтернансу проводимо таким чином. Якщо знак похибки апроксимації в точці $x_r$ співпадає зі знаком похибки в точці альтернансу $z_k^{(j)}$

$$\operatorname{sign}\left(\rho_j(x_r)\right) = \operatorname{sign}\left(\rho_j\left(z_k^{(j)}\right)\right), \tag{4}$$

то в новому наближенні до точок альтернансу замінюємо точку $z_k^{(j)}$

$$z_k^{(j+1)} = x_r, \tag{5}$$

а у протилежному разі замінюємо точку $z_{k+1}^{(j)}$

$$z_{k+1}^{(j+1)} = x_r. \tag{6}$$

Решта точок альтернансу залишається без зміни. Такий порядок отримання нового наближення до точок альтернансу забезпечує дотримання умов співпадання знаку похибки апроксимації в точках альтернансу, сусідніх із точкою *u*.

Розглянутий випадок уточнення наближення до точок альтернансу на $(j+1)$-ій ітерації графічно ілюструють рисунки 1 і 2. Криві, зображені на цих рисунках, є графіками похибки апроксимації деякої функції $f(x)$ виразом від п'яти параметрів $F_5\left(a^{(j)}; x\right)$. Точка $x_r$, в якій досягається найбільше за модулем значення похибки апроксимації, розташована поміж точкою альтернансу $z_3^{(j)}$ і точкою $u$. Оскільки знак похибки апроксимації в точці $x_r$ співпадає зі знаком похибки в точці альтернансу $z_3^{(j)}$ (див. рис. 1), то точка $x_r$ вводиться в наступне наближення до точок альтернансу замість $z_3^{(j)}$. На цьому рисунку і на наступних зірочкою відзначено точку альтернансу, замість якої вводиться точка $x_r$.

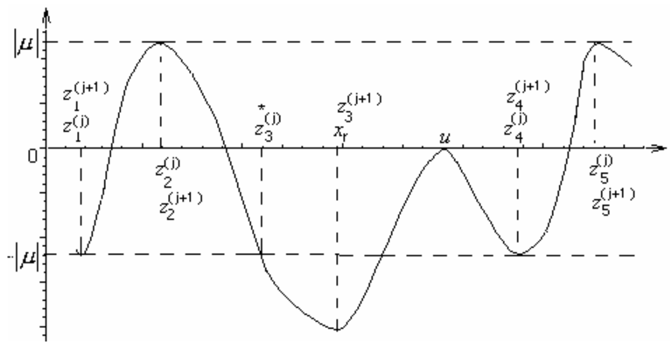


Рис. 1. Заміна точок альтернансу у разі виконання умови (4)

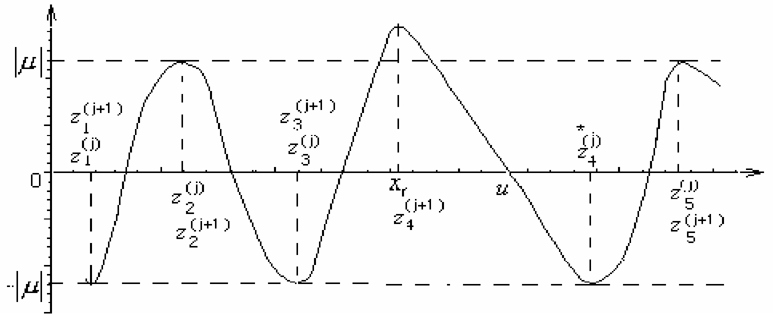


Рис. 2. Заміна точок альтернансу у разі невиконання умови (4)

На рис. 2 зображено порядок заміни наближення до точок альтернансу у випадку невиконання умови (3). У цьому разі точка $x_r$ вводиться в наступне наближення до точок альтернансу замість точки $z_4^{(j)}$. У новому наближенні до точок альтернансу точка $u$ буде розташована вже поміж четвертою й п'ятою точками альтернансу $z_4^{(j+1)} < u < z_5^{(j+1)}$, в яких знаки похибки апроксимації збігаються.

У другому випадку, коли точка $x_r$, у котрій досягається найбільша похибка апроксимації, розташована справа від точки $u$ $\left(u > x_r > z_{k+1}^{(j)}\right)$, нове наближення до точок альтернансу отримується в такий спосіб. Якщо знак похибки апроксимації в точці $x_r$ співпадає зі знаком похибки в точці альтернансу $z_{k+1}^{(j)}$

$$\operatorname{sign}\left(\rho_j(x_r)\right) = \operatorname{sign}\left(\rho_j\left(z_{k+1}^{(j)}\right)\right), \tag{7}$$

то в новому наближенні цю точку замінюємо

$$z_{k+1}^{(j+1)} = x_r\,, \tag{8}$$

а решту точок альтернансу залишаємо без зміни.

Якщо ж умова (7) не виконується, то $(j+1)$-е наближення до точок альтернансу отримується з $j$-го, в якому точка $z_k^{(j)}$ замінюється на точку $x_r$

$$z_k^{(j+1)} = x_r\,. \tag{9}$$

Зазначимо, що в цьому разі сусідніми точками альтернансу до точки $u$ будуть точки $z_{k-1}^{(j+1)}$ і $z_k^{(j+1)}$. В отриманому таким чином $(j+1)$-му наближенні до точок альтернансу також забезпечується дотримання умови співпадання знаків похибки апроксимації в точках альтернансу, сусідніх із точкою $u$. Рис. 3 і 4 ілюструють можливі варіанти вибору чергового наближення до точок альтернансу у випадку, коли точка $x_r$, з найбільшою похибкою апроксимації, розташована

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2005, вип. 2, 159-166

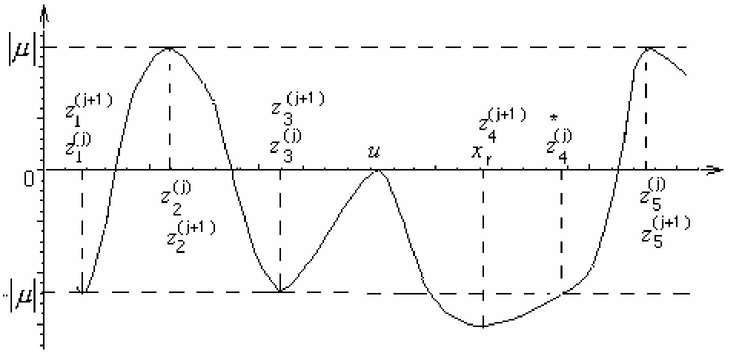


Рис. 3. Заміна точок альтернансу в разі виконання умови (7)

справа від точки $u$. Оскільки знак похибки апроксимації в точці $x_r$ співпадає зі знаком похибки в точці альтернанансу $z_4^{(j)}$ (див. рис. 3), то точка $x_r$ вводиться в наступне наближення до точок альтернансу замість $z_4^{(j)}$ .

На рис. 4 показано порядок заміни наближення до точок альтернансу у разі неспівпадання знаку похибки апроксимації в точці $x_r$ і точці альтернансу $z_4^{(j)}$ , тобто невиконання умови (7). У цьому випадку точка $x_r$ вводиться в наближення до точок альтернансу замість точки $z_3^{(j)}$.

Таким чином, у модифікованому алгоритмі Валле-Пуссена наступне наближення до точок альтернансу, як і в алгоритмі Валле-Пуссена, відрізняється від попереднього тим, що замість однієї із його точок розглядаємо точку $x_r$, в якій досягається найбільша за модулем похибка апроксимації. При цьому задовольняється умова дотримання порядку зміни знаку похибки апроксимації відповідно до характеристичної (альтернансної) властивості.

Введення в нове наближення до точок альтернасу точки $x_r$, в якій досягається найбільша похибка апроксимації, з дотриманням порядку зміни знаку похибки апроксимації в точках альтернансу, призводить до збільшення похибки

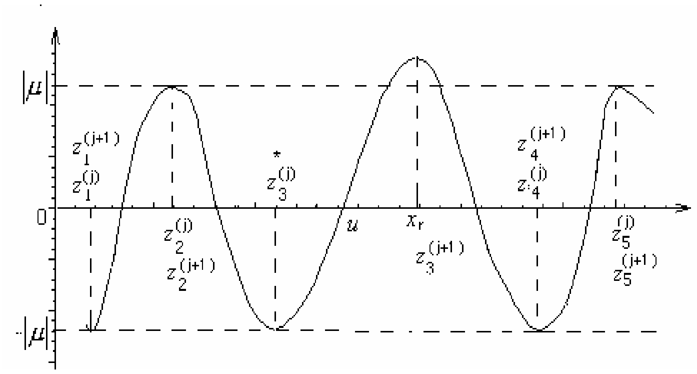


Рис. 4. Заміна точок альтернансу в разі невиконання умови (7)

апроксимації $\mu_{j+1}$ у точках альтернансу на черговій $(j+1)$-ій ітерації схеми Ремеза.

Згідно ідеї Є. Я. Ремеза [1], це водночас зумовлює зменшення значення похибки апроксимації $\rho_{j+1}$. Саме цей факт використовується для доведення збіжності алгоритму Ремеза [1, 7].

Зазначимо, що в монографіях [7, 8] обґрунтовано, що у разі виконання умов існування найкращого рівномірного наближення з інтерполюванням, метод Ремеза збігається за скінченну кількість кроків, незалежно від початкового наближення до точок альтернансу, а саме під час апроксимації виразом з $m$ параметрами він збігається щонайбільше за $(m+2)$-і ітерації. А тому, із застосуванням модифікованого алгоритму Валле-Пуссена для заміни точок альтернансу, він також збігатиметься не більше, ніж за $(m+2)$-і ітерації.

У разі рівномірної апроксимації з інтерполюванням у декількох точках, особливості заміни наближення до точок альтернансу стосуються лише тих випадків, коли точка, в якій досягається найбільша похибка апроксимації, знаходиться поруч котроїсь із точок інтерполювання. Тоді, залежно від співвідношення між знаками похибок апроксимації в точці, в якій спостерігається найбільше за модулем значення похибки, і сусідній з нею точці альтернансу, уточнення наближення до точок альтернансу, проводиться відповідно до опису (5-9).

## 2. Приклад функціонування модифікованого алгоритму Валле-Пуссена

Функціонування модифікованого алгоритму Валле-Пуссена розглянемо на прикладі апроксимації поліномом третього степеня функції, яка задана значеннями в 13 точках (див. колонки $x$ і $f(x)$ у таблиці) на відрізку $[-3; 1{,}8]$ із найменшою абсолютною похибкою і точним відтворенням значення в точці $x = 0{,}6$.

У колонках $\Delta_1$, $\Delta_2$ і $\Delta_3$ наведено значення похибок апроксимації відповідно після першої, другої і третьої ітерації схеми Ремеза. Значення похибки апроксимації у точках альтернансу серед результатів кожної ітерації виділено підкресленням, найбільше значення похибки апроксимації — жирним шрифтом, а точка інтерполювання — курсивом. Як і очікувалось, наведені в таблиці результати знаходження рівномірної апроксимації з найменшою абсолютною похибкою функції $f(x)$ підтверджують поступове зменшення похибки апроксимації до виконання характеристичної властивості: досягнення максимальної похибки апроксимації у точках альтернансу.

Графіки похибок апроксимації після кожної ітерації схеми Ремеза зображено на рис. 5. Точка інтерполювання на цьому графіку відзначена кружечком. Такими ж кружечками відзначені й точки альтернансу. Проміжкові точки наближення до точок альтернансу, які відмінні від кінцевих, відзначені зірочками.

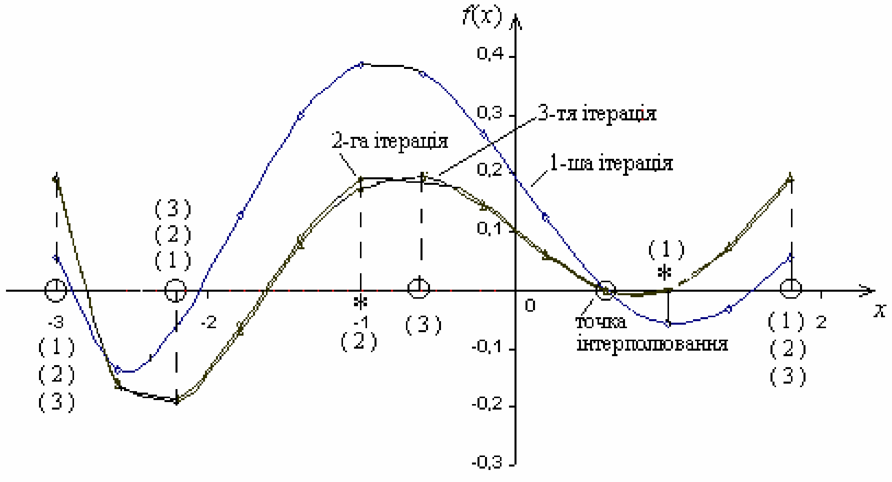


Рис. 5. Графіки похибок апроксимації на окремих ітераціях схеми Ремеза

Цифри у дужках поруч із точками альтернансу та наближення до них вказують на номер ітерації.

*Таблиця*

Значення похибок апроксимації на ітераціях схеми Ремеза із застосуванням модифікованого алгоритму Валле-Пуссена

| № з/п | $x$ | $f(x)$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3,00 | -106,28223739 | <u>0,05838</u> | <u>0,18723</u> | <u>0,19388</u> |
| 2 | -2,60 | -68,16379261 | -0,13444 | -0,16007 | -0,16139 |
| 3 | -2,20 | -39,11139393 | <u>-0,05838</u> | <u>-0,18723</u> | <u>-0,19388</u> |
| 4 | -1,80 | -17,95729155 | 0,12603 | -0,06171 | -0,07140 |
| 5 | -1,40 | -3,57409732 | 0,29860 | 0,08931 | 0,07851 |
| 6 | -1,00 | 5,11705941 | **0,38766** | <u>0,18723</u> | 0,17689 |
| 7 | -0,60 | 9,14591688 | 0,37066 | **0,20255** | <u>0,19388</u> |
| 8 | -0,20 | 9,50026281 | 0,26703 | 0,14773 | 0,14158 |
| 9 | 0,20 | 7,13973959 | 0,12432 | 0,06338 | 0,06023 |
| 10 | *0,60* | *3,01408459* | *-0,00000* | *-0,00000* | *-0,00000* |
| 11 | 1,00 | -1,91705674 | <u>-0,05838</u> | -0,00180 | 0,00112 |
| 12 | 1,40 | -6,66590037 | -0,03141 | 0,07044 | 0,07570 |
| 13 | 1,80 | -10,20270491 | <u>0,05838</u> | <u>0,18723</u> | <u>0,19388</u> |

**Висновки.** Розвиваючи ідею алгоритму Валле-Пуссена, запропоновано спосіб отримання нового наближення до точок альтернансу, із дотриманням порядку зміни знаку похибки апроксимації відповідно до характеристичної властивості рівномірної апроксимації з інтерполюванням. Власне модифікація алгоритму Валле-Пуссена стосується лише випадку, коли точка з найбільшою за модулем похибкою апроксимації розташована поруч із точкою інтерполювання. Залежно від знаків похибок апроксимації в точці з найбільшою за модулем похибкою і сусідній з нею точці альтернансу запропоновано чотири варіанти проведення заміни наближення до точок альтернансу (5)-(9). При цьому, як і в разі застосування алгоритму Валле-Пуссена, під час чергових ітерацій схеми Ремеза значення похибки апроксимації в точках альтернансу щоразу збільшується, а значення максимальної за модулем похибки апроксимації — зменшується. За такого уточнення наближення до точок альтернансу схема Ремеза збігається.

**Література**

[1] *Ремез Е. Я.* Основы численных методов чебышевского приближения. — К.: Наук. думка, 1969. — 623 с.
[2] *Fike C. T.* Computer evaluation of mathematical function // New Jersey: Prentice-Hall, 1968. — 228 p.
[3] *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972. — 368 с.
[4] *Коллатс Л., Альберт Ю.* Задачи по прикладной математике. — М.: Мир, 1978. — 168 с.
[5] *Коллатс Л., Крабе В.* Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения: Пер. с нем. — М.: Наука, 1978. — 272 с.
[6] *DeVore R., Yan Z.* Error analysis for piecewise curve fitting algorithms, Computer Aided Geometric Design 3, 1986. — P. 205-215.
[7] *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Приближение функций для технических приложений. — К.: Наук. думка, 1980. — 352 с.
[8] *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами. — К.: Наук. думка, 1989. — 272 с.
[9] *Мельничук Л. С., Попов Б. А.* Наилучшее приближение табличных функций с условием // В книге: Алгоритмы и программы для вычисления функций на ЭЦВМ. — К.: Ин-т кибернетики, 1977. — Вып.4. — С. 189–200.

## Modified Vallee-Poussin Algorithm

Petro Malachivskyj

*The one-for-one exchange algorithm for alternance points in case of the best uniform (Chebyshev) approximation with interpolation is described. It consists in obtaining so approaching to alternance points, in which the error signs at alternance points, that neighbouring with interpolating point, are the same. As it is known, the error signs are alternative in traditional Vallee-Poussin algorithm. There is given an example of proposed algorithm application.*

## Модифицированный алгоритм Валле-Пуссена

Петро Малачивский

*Описан алгоритм одноточечной замены приближения к точкам альтернанса в случае нахождения наилучшей равномерной аппроксимации с интерполированием. Он заключается в получении такого уточнения приближения к точкам альтернанса, при котором знаки погрешностей в точках альтернанса, соседних с точкой интерполирования, совпадают. Этот алгоритм основывается на идее алгоритма Валле-Пуссена — сохранения порядка изменения знака погрешностей аппроксимации в новом приближении к точкам альтернанса. Приведен пример функционирования предложенного алгоритма.*

Отримано 25.09.05