УДК 539.3

Математична модель деформування пружного півпростору за дії нормального навантаження на його границі

Віталій Галазюк[1], Ґеоргій Сулим[2]

[1] к. ф.-м. н., доцент, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів
[2] д. ф.-м. н., професор, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів

Припущення про рівність нулю дотичних напружень на границі пружного півпростору при її гладкому нормальному навантаженні зумовлює парадокс взаємопроникнення точок матеріального континууму, якщо об'ємна деформація $|\theta|>0$. *При цьому з'ясовано, що для уникнення цієї фізичної некоректності досить наділити границю певними реологічними властивостями, які уможливлюють регулювання її вертикальних переміщень розподілом на ній за певним законом дотичних напружень. Доведено, що завжди існує такий закон розподілу дотичних напружень, за якого вертикальні переміщення границі є нульовими за довільного нормального навантаження. Ця ідея виявилась слушною у задачах зі змішаними крайовими умовами, оскільки дала можливість виконати додаткову фізичну умову неперервності компонент вектора* $\mathbf{\Omega}=0{,}5\,\mathrm{rot}\,\vec{u}$ *на лінії поділу крайових умов і цим забезпечити існування фізично коректного розв'язку, який узгоджується з обмеженнями лінійної моделі твердого деформівного тіла. Якщо зовні області навантаження вимагати рівності нулю дотичних напружень, то на межі області навантаження вони стають сингулярними з кореневою особливістю, так як і компоненти вектора* $\mathbf{\Omega}$. *При цьому виникає парадокс взаємопроникнення внаслідок розриву кутів повороту нормальних елементів навколо лінії поділу крайових умов.*

Ключові слова: пружні кути повороту, дотичні напруження, парадокс взаємопроникнення, фізично коректна математична модель.

Вступ. Класична математична модель деформування тіла за дії на нього тільки нормального навантаження як правило ставить другу умову — рівність нулю дотичних напружень на поверхнях, які його обмежують. Це припущення, зокрема, у задачах з мішаними крайовими умовами, може призвести до локального порушення симетрії тензора напружень і невиконання умови балансу моментів на лінії поділу крайових умов. Оскільки відповідно до закону Гука дотичні напруження визначаються деформаціями зсуву, які в свою чергу дорівнюють сумі пружних кутів повороту нормальних і дотичних до поверхні тіла елементів, то за певних обставин задання дотичних напружень нульовими визначає клас задач, у яких пружні кути повороту можуть на поверхні тіла бути розривними. І. Снеддон у монографії [1], аналізуючи розв'язок Тересава задачі Буссінеска за відсутності дотичних напружень, вказав на його фізичну суперечливість, виявивши парадокс взаємопроникнення точок континууму у певному об'ємі навколо точки прикладання зосередженої сили. Цей парадокс на думку багатьох авторів, зокрема й І. Снеддона, зумовлений тим, що реально не існує сил, прикладених до однієї точки, а тому за довільного гладкого навантаження ніяких протиріч із гіпотезою суцільності вже не повинно бути.

Нижче показано, що за умови рівності нулю дотичних напружень на поверхні півпростору навіть гладке «дзвонувате» навантаження у задачі І. Снеддона породжує за певних значень параметрів задачі той самий парадокс взаємопроникнення. З'ясовано, що для його уникнення достатньо наділити поверхню тіла певними реологічними властивостями і вертикальні переміщення границі пружного півпростору за довільного її нормального навантаження можна регулювати розподілом на ній дотичних напружень. Зокрема, завжди існує такий розподіл дотичних напружень, за якого вертикальні переміщення границі відсутні.

Для знаходження розподілу дотичних напружень сформульована некласична задача математичної фізики, у яку поряд з класичними мішаними умовами введена додаткова вимога неперервності компонент вектора локального жорсткого повороту $\mathbf{\Omega} = 0{,}5\,\mathrm{rot}\,\vec{u}$ на межі області навантаження. Ця задача зведена до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, серед множини розв'язків якого методом [2] розривних інтегралів Вебера-Шафгайтліна (далі В.-Ш.) відтворено фізично коректний розв'язок, який задовольняє умову неперервності компонент вектора $\mathbf{\Omega}$. З'ясовано також, що за виконання цієї умови дотичні напруження є неперервними на межі області навантаження і продовжуються поза нею для забезпечення умови балансу моментів. Це можна змоделювати накладеною на межу тіла мембраною, яка формує необхідний для існування коректного розв'язку задачі розподіл дотичних напружень.

Якщо прийняти, що зовні області навантаження дотичні напруження дорівнюють нулю, то на межі області навантаження вони мають кореневу особливість. При цьому, математична модель стає фізично некоректною, оскільки компонента вектора локального жорсткого повороту на межі області навантаження має розрив другого роду з кореневою особливістю. Одним із наслідків такого розподілу є виникнення області взаємопроникнення точок.

1. Розв'язок рівнянь статики пружного тіла у півпросторі $\gamma \geq 0$ за осесиметричної деформації

Однорідний ізотропний пружний півпростір віднесемо до циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$. Приймаємо, що під дією зовнішнього навантаження у півпросторі реалізується осесиметричний напружено-деформований стан (рис. 1). Тоді, для визначення ненульових компонент вектора пружного переміщення $\vec{u} = \vec{u}(Ru_\alpha, 0, Ru_\gamma)$ маємо систему рівнянь рівноваги

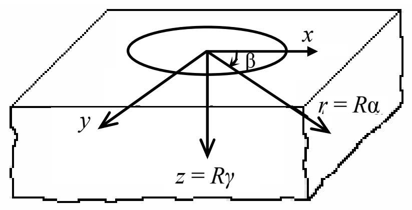

Рис. 1

$$k^2\partial_\alpha\theta + 2\partial_\gamma\omega_\beta = 0, \quad k^2\partial_\gamma\theta - 2\alpha^{-1}\partial_\alpha\left(\alpha\omega_\beta\right) = 0, \quad k^2 = \left(\lambda + 2\mu\right)/\mu \tag{1}$$

стосовно об'ємної деформації θ і єдиної у цьому випадку ненульової компоненти $\omega_\beta\left(\alpha,\gamma\right)$ вектора $\Omega = 0{,}5\,\mathrm{rot}\,\vec{u}$, де

$$\theta \equiv \mathrm{div}\,\vec{u} = \alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha u_\alpha) + \partial_\gamma u_\gamma,$$
$$2\omega_\beta \equiv \left(\mathrm{rot}\,\vec{u}\right)_\beta = \partial_\gamma u_\alpha - \partial_\alpha u_\gamma = \varphi_\gamma(\alpha,\gamma) - \varphi_\alpha(\alpha,\gamma)\,; \tag{2}$$

$\varphi_\alpha\left(\alpha,\gamma\right)$ і $\varphi_\gamma\left(\alpha,\gamma\right)$ — пружні кути повороту лінійних елементів, паралельних до координатних осей α і γ відповідно; λ і μ — сталі Ламе.

Безпосередньою підстановкою можна переконатися в тому, що функції

$$\theta\left(\alpha,\gamma\right) = -2\int_0^\infty \xi A\left(\xi\right)e^{-\xi\gamma}J_0\left(\alpha\xi\right)d\xi, \quad \omega_\beta\left(\alpha,\gamma\right) = k^2\int_0^\infty \xi A\left(\xi\right)e^{-\xi\gamma}J_1\left(\alpha\xi\right)d\xi \tag{3}$$

є розв'язками системи рівнянь (1) у півпросторі $\gamma \ge 0$, де $J_\nu\left(x\right)$ — функції Бесселя першого роду порядку v.

За відомими функціями $\theta\left(\alpha,\gamma\right)$ і $\omega_\beta\left(\alpha,\gamma\right)$ із системи диференціальних рівнянь (2) знайдемо компоненти вектора пружного переміщення

$$u_\alpha\left(\alpha,\gamma\right) = -\int_0^\infty \left[\left(k^2+1\right)A\left(\xi\right) - \xi B\left(\xi\right)\right]e^{-\xi\gamma}J_1\left(\alpha\xi\right)d\xi +$$
$$+\left(k^2-1\right)\gamma\int_0^\infty \xi A\left(\xi\right)e^{-\xi\gamma}J_1\left(\alpha\xi\right)d\xi,$$
$$u_\gamma\left(\alpha,\gamma\right) = \int_0^\infty \xi B\left(\xi\right)e^{-\xi\gamma}J_0\left(\alpha\xi\right)d\xi + \left(k^2-1\right)\gamma\int_0^\infty \xi A\left(\xi\right)e^{-\xi\gamma}J_0\left(\alpha\xi\right)d\xi, \tag{4}$$

вирази пружних кутів повороту

$$\varphi_\alpha\left(\alpha,\gamma\right) = -\int_0^\infty \xi^2 B\left(\xi\right)e^{-\xi\gamma}J_1\left(\alpha\xi\right)d\xi - \left(k^2-1\right)\gamma\int_0^\infty \xi^2 A\left(\xi\right)e^{-\xi\gamma}J_1\left(\alpha\xi\right)d\xi,$$
$$\varphi_\gamma\left(\alpha,\gamma\right) = \int_0^\infty \left[2k^2A\left(\xi\right) - \xi B\left(\xi\right)\right]\xi e^{-\xi\gamma}J_1\left(\alpha\xi\right)d\xi -$$
$$-\left(k^2-1\right)\gamma\int_0^\infty \xi^2 A\left(\xi\right)e^{-\xi\gamma}J_1\left(\alpha\xi\right)d\xi, \tag{5}$$

а за законом Гука та поданнями (4) — компоненти тензора напружень

$$\sigma_{\gamma\gamma}\left(\alpha,\gamma\right) = 2\mu\int_0^\infty \xi\left[A\left(\xi\right) - \xi B\left(\xi\right)\right]e^{-\xi\gamma}J_0\left(\alpha\xi\right)d\xi -$$
$$-2\mu\left(k^2-1\right)\gamma\int_0^\infty \xi^2 A\left(\xi\right)e^{-\xi\gamma}J_0\left(\alpha\xi\right)d\xi\ , \tag{6}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma) \equiv \mu\left[\varphi_\gamma(\alpha,\gamma) + \varphi_\alpha(\alpha,\gamma)\right] =$$
$$= 2\mu\int_0^\infty \xi\left[k^2 A(\xi) - \xi B(\xi)\right] e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\, d\xi -$$
$$-2\mu\left(k^2-1\right)\gamma\int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\, d\xi. \qquad (7)$$

У поданнях (3)-(7) $A(\xi)$ і $B(\xi)$ — довільні функції, які визначаються крайовими умовами задачі та забезпечують існування й обмеженість відповідних невласних інтегралів.

2. Постановка та розв'язок задачі Снеддона

Нехай на границі $\gamma = 0$ пружного півпростору задані такі крайові умови [1]

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,0) = -\frac{Pb}{2\pi\sqrt{\left(b^2+\alpha^2\right)^3}} \quad (0 \le \alpha < \infty, \quad b > 0), \qquad (8)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0) \equiv 0 \quad \left(0 \le \alpha < \infty\right). \qquad (9)$$

Тоді відповідно до подання (7) крайова умова (9) справджується, якщо $k^2 A(\xi) = \xi B(\xi)$, а подання (6) разом з крайовою умовою (8) визначать інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_0^\infty \xi A(\xi) J_0(\xi\alpha)\, d\xi = \frac{Pb}{4\pi\mu\left(k^2-1\right)\sqrt{\left(b^2+\alpha^2\right)^3}} \quad (0 \le \alpha \le 1)$$

відносно функції $A(\xi)$, яка у цьому випадку має вигляд

$$A(\xi) = \frac{Pe^{-a\xi}}{4\pi\mu\left(k^2-1\right)} = m\frac{e^{-a\xi}}{k^2-1},$$

де $m = P/(4\pi\mu)$; μ — модуль зсуву; P — параметр, який має розмірність напружень.

За відомою функцією $A(\xi)$ відповідно до співвідношень (3)-(7) можна обчислити усі характеристики напружено-деформованого стану. Зокрема

$$\theta(\alpha,\gamma) = -\frac{2m}{k^2-1}\frac{(b+\gamma)}{\left[\alpha^2+(b+\gamma)^2\right]^{3/2}}, \qquad (10)$$

$$u_\gamma(\alpha,\gamma) = m\left[\frac{h}{\sqrt{\alpha^2+(b+\gamma)^2}} + \frac{(b+\gamma)}{\sqrt{\left(\alpha^2+(b+\gamma)^2\right)^3}}\right], \tag{11}$$

де $h = k^2\left(k^2-1\right)^{-1}$. Зазначимо, що вираз (11) співпадає з результатом Снеддона [1, с. 529].

Відповідно до подань (10) і (11) на осі γ при $\alpha = 0$ одержимо, що

$$\theta(0,\gamma) = -\frac{2m}{k^2-1}\frac{1}{(b+\gamma)^2}, \quad u_\gamma(0,\gamma) = m\left[\frac{h}{b+\gamma} + \frac{\gamma}{(b+\gamma)^2}\right]. \tag{12}$$

При цьому взаємопроникнення точок на осі γ відбудеться, якщо справджується умова

$$u_\gamma(0,0) - \left[u_\gamma(0,\gamma)+\gamma\right] \ge 0, \tag{13}$$

яка у розглянутому випадку, відповідно до співвідношень (12), набуде вигляду квадратної нерівності

$$b^2z^2 - \left(mh-2b^2\right)z + \left(b^2 - m(h-1)\right) \le 0, \quad z = b^{-1}\gamma. \tag{14}$$

Ця нерівність виконується в межах $z_1 \le z \le z_2$, ($z_1 \ge 0$ і $z_2 \ge 0$), де

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\left(h\frac{m}{b^2}-2\right) \pm \sqrt{\frac{m}{b^2}}\sqrt{h^2\frac{m}{b^2}-4}\right], \tag{15}$$

за таких обмежень на параметри зовнішнього навантаження

$$\frac{4\left(k^2-1\right)^2}{k^4} \le \frac{m}{b^2} \le k^2-1. \tag{16}$$

Якщо $m/b^2 > k^2-1$, то один корінь рівняння (14) завжди від’ємний, а тому $0 \le z \le z_1$ і ефект взаємопроникнення починається з границі півпростору $z = 0$. Оскільки, відповідно до подання (10), максимальне значення об’ємної деформації $\theta(\alpha,\gamma)$ за навантаження (8) є таким

$$\left|\theta(\alpha,\gamma)\right| = \frac{2}{k^2-1}\frac{m}{b^2},$$

то нерівність (16) можна виразити через максимальне значення об’ємної деформації і записати так

$$8(k^2-1)k^{-4} \le |\theta(0,0)| \le 2\,. \tag{17}$$

Таким чином, за виконання нерівності (17) завжди існує шар $z_1 \le z \le z_2$, у який проникають точки граничної поверхні $\gamma = 0$, порушуючи при цьому гіпотезу суцільності.

3. Некласична математична модель деформування за нормального навантаження в коловій області

Нехай на межі пружного півпростору $\gamma = 0$ у коловій області $0 \le \alpha \le 1$ діє рівномірно розподілене нормальне навантаження інтенсивності *p*.

Віднайдемо розподіл дотичних напружень $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0)$, за якого вертикальні переміщення півпростору $u_\gamma(\alpha,0)$ будуть відсутні. Для цього розв'яжемо таку некласичну крайову задачу математичної фізики

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,0) = -p \quad (0 \le \alpha \le 1), \quad \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0) = g(\alpha^2) \quad (1 \le \alpha < \infty), \tag{18}$$

$$u_\gamma(\alpha,0) = 0 \quad (0 \le \alpha < \infty), \quad \lim_{\alpha\to 1-0} \omega_\beta(\alpha,0) = \lim_{\alpha \to 1+0} \omega_\beta(\alpha,0), \tag{19}$$

де $g(\alpha^2)$ — коригувальна функція, яка забезпечує виконання другої умови (19) і може бути побудована за допомогою методу розривних інтегралів В.-Ш.

Відповідно до другого подання (4), перша крайова умова (19) буде виконана, якщо $B(\xi) \equiv 0$, а співвідношення (6) разом із першою крайовою умовою (18) визначають інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_0^\infty \xi A(\xi) J_0(\xi\alpha)\, d\xi = -\frac{p}{2\mu} \quad (0 \le \alpha \le 1). \tag{20}$$

Для його розв'язання застосуємо метод розривних інтегралів В.-Ш. [2, 3], згідно з яким шукані функції необхідно подати у вигляді узагальненого ряду Ноймана

$$\xi A(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{J_{2m-q+1}(\xi)}{\xi^q} \tag{21}$$

із невизначеними коефіцієнтами b_m. Подальші дослідження базуватимуться на властивостях розривного інтеграла В.-Ш. [4]

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(\xi\alpha) J_\mu(\xi\beta)}{\xi^\lambda} d\xi = \frac{\alpha^\nu \Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right) F\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}; \frac{\nu-\mu-\lambda+1}{2}; \nu+1; \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)}{2^\lambda \beta^{\nu-\lambda+1} \Gamma\left(\frac{-\nu+\mu+\lambda+1}{2}\right) \Gamma(\nu+1)}$$

$$(0 \le \alpha \le \beta);$$

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(\xi\alpha)J_\mu(\xi\beta)}{\xi^\lambda}d\xi = \frac{\beta^\mu \Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right) F\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}; \frac{-\nu+\mu-\lambda+1}{2}; \mu+1; \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)}{2^\lambda \alpha^{\mu-\lambda+1}\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+1}{2}\right)\Gamma(\mu+1)}$$

$$(\beta \le \alpha \le \infty). \tag{22}$$

У виразах (22) $\Gamma(x)$ — гамма-функція, $F(a;b;c;x^2)$ — гіпергеометрична функція Ґаусса, задана гіпергеометричним рядом

$$F(a;b;c;x^2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)}\frac{x^{2k}}{k!} \tag{23}$$

з одиничним радіусом збіжності за умови $c-a-b>0$, до того ж

$$F(a;b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \quad (c-a-b>0);$$

$$F(a;b;c;x^2) = (1-x^2)^{c-a-b} F(c-a;c-b;c;x^2). \tag{24}$$

Зазначимо, що при $a=-k$ або $b=-k$, де $(k \in \mathbf{N}_0)$ розвинення (23) зводиться до полінома степеня 2*k*, який можна виразити через поліноми Якобі [4].

Відзначимо такі властивості інтеграла В.-Ш.:

а) інтеграли (22) неперервні в точці $\alpha=\beta$ за умови $\lambda>0$;

б) другий інтеграл (22) тотожно дорівнює нулю для всіх $\alpha>\beta$, якщо $\nu-\mu+\lambda+1=-2k$ $(k\in\mathbf{N}_0)$.

Якщо ряд (21) підставити в інтегральне рівняння (20) та обчислити розривний інтеграл В.-Ш. за формулами (22), то в області $0\le\alpha\le1$ одержимо алгебричне рівняння

$$\sum_{n=0}^\infty b_m \frac{\Gamma(m-q+1)F(m-q+1;\ -m\ ;\ 1\ ;\ \alpha^2)}{2^q\Gamma(m+q+1)} = -\frac{p}{2\mu} \quad (0\le\alpha\le1,\ q>-1). \tag{25}$$

Оскільки рівняння (25) щодо коефіцієнтів b_m є рядом за поліномами Якобі [4] з аргументом $(1-2\alpha^2)$, тобто $F(m-q+1;\ -m;\ 1;\ \alpha^2) = P_m^{(0,-q)}(1-2\alpha^2)$, які утворюють повну систему функцій на проміжку [0, 1], то, відповідно до апроксимаційної теореми Вайєрштрасса, рівняння (25) має єдиний розв'язок — набір коефіцієнтів b_m за довільної неперервної правої частини. У розглядуваному випадку постійної правої частини його розв'язок є таким

$$b_0 = -\frac{p}{\mu}\frac{2^q}{\Gamma(1-q)},\ b_m \equiv 0\ (m\in\mathbf{N}). \tag{26}$$

Відповідно до подання (21) тепер можна записати, що

$$A(\xi)=b_0\frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^{q+1}}\ \ (q>-1). \tag{27}$$

Далі за формулами (3)-(7) обчислимо характеристики напружено-деформованого стану у півпросторі за умов (18)-(19)

$$\theta(\alpha,\gamma)=-2b_0\int_0^\infty\frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^q}e^{-\xi\gamma}J_0(\alpha\xi)d\xi,$$

$$\omega_\beta(\alpha,\gamma)=k^2b_0\int_0^\infty\frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^q}e^{-\xi\gamma}J_1(\alpha\xi)d\xi,$$

$$u_\alpha(\alpha,\gamma)=-b_0\int_0^\infty\left(k^2+1\right)\frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^{q+1}}e^{-\xi\gamma}J_1(\alpha\xi)d\xi+$$

$$+\left(k^2-1\right)b_0\gamma\int_0^\infty\frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^q}e^{-\xi\gamma}J_1(\alpha\xi)d\xi,$$

$$u_\gamma(\alpha,\gamma)=\left(k^2-1\right)b_0\gamma\int_0^\infty\frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^q}e^{-\xi\gamma}J_0(\alpha\xi)d\xi,$$

$$\varphi_\alpha(\alpha,\gamma)=-\left(k^2-1\right)b_0\gamma\int_0^\infty\frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^{q-1}}e^{-\xi\gamma}J_1(\alpha\xi)d\xi,$$

$$\varphi_\gamma(\alpha,\gamma)=2b_0\int_0^\infty k^2\frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^q}e^{-\xi\gamma}J_1(\alpha\xi)d\xi-\left(k^2-1\right)b_0\gamma\int_0^\infty\frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^{q-1}}e^{-\xi\gamma}J_1(\alpha\xi)d\xi,$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma)=2\mu b_0\int_0^\infty\frac{J_{1-q}(\xi)J_0(\alpha\xi)}{\xi^q}e^{-\xi\gamma}d\xi-2\mu\left(k^2-1\right)b_0\gamma\int_0^\infty\frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^{q-1}}e^{-\xi\gamma}J_0(\alpha\xi)d\xi,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma)=2\mu b_0\int_0^\infty k^2\frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^q}\ e^{-\xi\gamma}J_1(\alpha\xi)d\xi-$$

$$-2\mu\left(k^2-1\right)b_0\gamma\int_0^\infty\frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^{q-1}}e^{-\xi\gamma}J_1(\alpha\xi)d\xi. \tag{28}$$

У загальному випадку інтеграли у виразах (28) можна обчислити числовими методами. Проте, на площині $\gamma=0$ вони вироджуються в розривні інтеграли В.-Ш. і за формулами (22) отримаємо, що в області $0\le\alpha\le1$

$$\theta(\alpha,0)=\frac{p}{\mu},\ \omega_\beta(\alpha,0)=-\frac{pk^2\Gamma(3/2-q)}{2\mu\sqrt{\pi}\Gamma(1-q)}\alpha F\left(3/2-q;\ 1/2;\ 2;\ \alpha^2\right); \tag{29}$$

$$u_\alpha(\alpha,0)=\frac{p(1+k^2)}{4\mu}\alpha,\quad u_\gamma(\alpha,0)=0; \tag{30}$$

$$\varphi_\alpha(\alpha,0)=0,\ \ \varphi_\gamma(\alpha,0)=-2k^2\frac{p}{\mu}\frac{2^q}{\Gamma(1-q)}\frac{\alpha\Gamma(3/2-q)F\left(3/2-q;\ 1/2;\ 2;\ \alpha^2\right)}{2^q\sqrt{\pi}}\ ; \quad (31)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,0)=-p,\qquad \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0)=-\frac{pk^2\Gamma(3/2-q)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1-q)}\alpha F\left(3/2-q;1/2;2;\alpha^2\right); \quad (32)$$

а в області $1<\alpha<\infty$ відповідно

$$\theta(\alpha,0)=\frac{p}{\mu}\frac{F\left(1-q;\ 1-q;\ 2-q;\ \alpha^{-2}\right)}{\alpha^{2-2q}\Gamma(2-q)\Gamma(q)},$$

$$\omega_\beta(\alpha,0)=-\frac{pk^2\Gamma(3/2-q)F\left(3/2-q;\ 1/2-q;\ 2-q;\ \alpha^{-2}\right)}{2\mu\alpha^{2-2q}\Gamma(1-q)\Gamma(2-q)\Gamma(1/2+q)}; \quad (33)$$

$$u_\alpha(\alpha,0)=\frac{p\left(1+k^2\right)}{4\mu}\frac{F\left(1-q;\ -q;\ 2-q;\ \alpha^{-2}\right)}{\alpha^{1-2q}\Gamma(2-q)\Gamma(1+q)},\ \ u_\gamma(\alpha,0)=0; \quad (34)$$

$$\varphi_\alpha(\alpha,0)=0,$$

$$\varphi_\gamma(\alpha,0)=-2k^2\frac{p}{\mu}\frac{2^q}{\Gamma(1-q)}\frac{\alpha\Gamma(3/2-q)F\left(3/2-q;\ -q+1/2;\ 2-q;\ \alpha^{-2}\right)}{2^q\alpha^{2-2q}\Gamma(2-q)\Gamma(q+1/2)}\ ; \quad (35)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,0)=-p\frac{F\left(1-q;\ 1-q;\ 2-q;\ \alpha^{-2}\right)}{\alpha^{2-2q}\Gamma(2-q)\Gamma(q)},$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0)=-\frac{pk^2\Gamma(3/2-q)F\left(3/2-q;\ 1/2-q;2-q;\alpha^{-2}\right)}{\alpha^{2-2q}\Gamma(1-q)\Gamma(2-q)\Gamma(1/2+q)}. \quad (36)$$

Аналіз формул (31) і (35) для пружних кутів повороту $\varphi_\alpha(\alpha,0)$ та $\varphi_\gamma(\alpha,0)$ вказує на те, що у площині $\gamma=0$ вони мають різні аналітичні вирази в областях $(0\le\alpha\le1)$ та $(1\le\alpha<\infty)$. Тому, згідно з гіпотезою суцільності, на лінії поділу крайових умов $\alpha=1$ повинні виконуватися граничні рівності

$$\lim_{\alpha\to1-0}\varphi_\alpha(\alpha,\pm0)=\lim_{\alpha\to1+0}\varphi_\alpha(\alpha,\pm0),\ \ \lim_{\alpha\to1-0}\varphi_\gamma(\alpha,\pm0)=\lim_{\alpha\to1+0}\varphi_\gamma(\alpha,\pm0), \quad (37)$$

наслідком яких є [2, 3]

$$\lim_{\alpha\to1-0}\omega_\beta(\alpha,\pm0)=\lim_{\alpha\to1+0}\omega_\beta(\alpha,\pm0). \quad (38)$$

Оскільки пружні кути повороту $\varphi_\alpha(\alpha,0)$ і $\varphi_\gamma(\alpha,0)$ відповідно до подань (31) і (35) задані гіпергеометричним рядом (23), який збіжний у точці $\alpha=1$ за умови $c-a-b>0$, то граничні рівності (37) і, як наслідок, гранична рівність (38) та відповідно друга умова (19) виконуватимуться, якщо $0<q<1/2$. За виконання цієї нерівності усі означені поданнями (29)-(36) характеристики напружено-деформованого стану неперервні на межі області навантаження $\alpha = 1$ (у цьому легко переконатися, застосувавши першу рівність (24)) і залежать від параметра q $(0 < q < 1/2)$.

Таким чином, за умови $0 < q < 1/2$, відповідно до співвідношення (36), нормальне напруження $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, 0)$ неперервно продовжується в область $1 < \alpha < \infty$, вимагаючи нормального довантаження границі $\gamma = 0$. Очевидно, що це довантаження можна зреалізувати за умови, що фізична границя тіла забезпечує неперервність пружних поворотів. Якщо $q = 0$, то це довантаження відсутнє, проте усі інші характеристики напружено-деформованого стану, означені поданнями (29)-(36), мають на межі $\alpha = 1$ області навантаження логарифмічну особливість. Натомість дотичне напруження $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 0)$ в області $1 < \alpha < \infty$ співвідношення (36) визначає керуючу функцію $g(\alpha^2)$, яка у класичній постановці завжди дорівнює нулю.

Керуюча функція $g(\alpha^2)$, яка залежить від параметра $0 < q < 1/2$, досягає максимального значення на лінії $\alpha = 1$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{\max} = \sigma_{\alpha\gamma}(1, 0) = g(1) = -\frac{2Pk^2}{\pi}\frac{\Gamma(q)\Gamma(1{,}5 - q)}{\Gamma(q + 0{,}5)\Gamma(1 - q)}.$$

Тому, при досягненні допустимого рівня дотичних напружень у точці $\alpha = 1$ може відбутися пластичне деформування або розтріскування матеріалу. На рис. 2 та 3

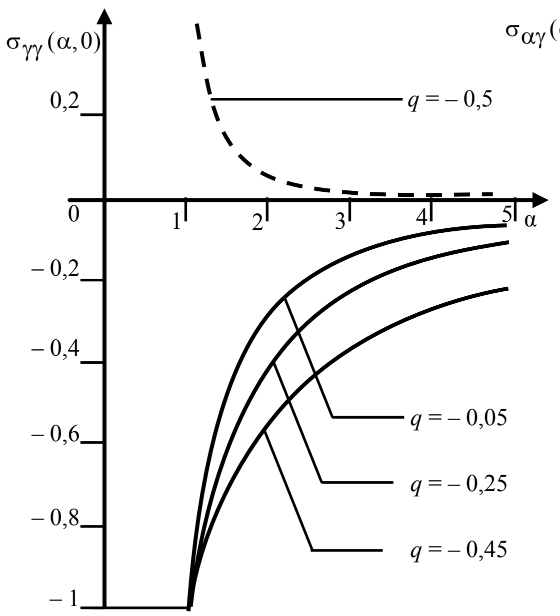

Рис. 2. Нормальне напруження $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, 0)$

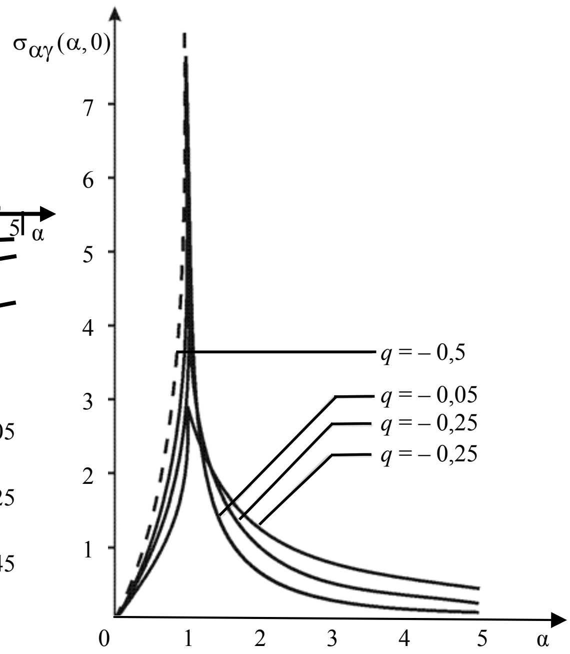

Рис. 3. Дотичне напруження $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 0)$

графічно зображений розподіл нормальних та дотичних напружень, обчислений за формулами (32) та (36) залежно від параметра $0 < q < 1/2$ (суцільні лінії) та у класичному випадку, коли $q = -0{,}5$ (штрихова лінія).

4. Класичний сингулярний розв'язок

Якщо реологічні властивості фізичної межі пружного півпростору допускають можливість розриву пружних кутів повороту, зокрема на межі області навантаження, то слід прийняти $q = -0{,}5$. Тоді, використовуючи формули підсумовування [4] гіпергеометричної функції Ґаусса, відповідно до подань (29)-(36) одержимо, що в області $0 \le \alpha < 1$

$$\theta(\alpha,0) = \frac{p}{\mu}, \quad \omega_\beta(\alpha,0) = -\frac{pk^2}{\mu\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}; \tag{39}$$

$$u_\alpha(\alpha,0) = \frac{p\left(1+k^2\right)}{4\mu}\alpha, \quad u_\gamma(\alpha,0) = 0; \tag{40}$$

$$\varphi_\alpha(\alpha,0) = 0, \quad \varphi_\gamma(\alpha,0) = \frac{4k^2 p}{\mu\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}; \tag{41}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,0) = -p, \quad \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0) = \frac{2pk^2}{\pi}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \tag{42}$$

і в області $1 < \alpha < \infty$ відповідно

$$\theta(\alpha,0) = -\frac{2p}{\pi\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} - \arcsin\frac{1}{\alpha}\right), \tag{43}$$

$$\omega_\beta(\alpha,0) = \varphi_\alpha(\alpha,0) = \varphi_\gamma(\alpha,0) = \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0) = 0; \tag{44}$$

$$u_\alpha(\alpha,0) = \frac{p\left(1+k^2\right)}{2\mu\pi}\left(\alpha\arcsin\frac{1}{\alpha} - \sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}\right), \quad u_\gamma(\alpha,0) = 0; \tag{45}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,0) = \frac{2p}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} - \arcsin\frac{1}{\alpha}\right). \tag{46}$$

Аналіз виразів (39)-(46) вказує на те, що за умови рівності нулю дотичних напружень поза областю навантаження математична модель напруженого деформованого стану є фізично некоректною, оскільки суперечить гіпотезі суцільності. Справді, відповідно до подань (39) та (44) компонента $\omega_\beta(\alpha,0)$ вектора локального жорсткого повороту $\mathbf{\Omega}$ на лінії $\alpha = 1$ має розрив другого роду. З фізичної точки зору це означає, що на лінії $\alpha = 1$ повинно би з'явитися взаємопроникнення безмежно малих пружних елементів внаслідок розриву пружних поворотів. Відповідно до подань (37) та (43) це призводить до невизначеності характеру деформування на лінії $\alpha = 1$, оскільки об'ємна деформація $\theta(\alpha, 0)$ там має розрив другого роду зі зміною знаку, що порушує її інваріантність. Разом з тим дотичні напруження $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 0)$ в області навантаження на лінії $\alpha = 1$ мають кореневу особливість і локально порушують симетрію тензора напружень.

Висновки

- З'ясовано, що математична модель деформування півпростору довільним нормальним навантаженням за припущення рівності нулю дотичних напружень на його границі визначає фізично некоректну картину деформування, оскільки при цьому виникає парадокс взаємопроникнення точок континууму.
- Показано, що за довільного нормального навантаження границі пружного півпростору в коловій області його вертикальні переміщення можна зробити нульовими відповідним розподілом дотичних напружень в області навантаження. При цьому, за фізичної умови неперервності пружних кутів повороту на лінії поділу крайових умов, для забезпечення умови балансу моментів дотичні напруження продовжуються поза межі області навантаження.
- Якщо припустити, що дотичні напруження поза областю навантаження дорівнюють нулю, то в області навантаження на її межі вони мають кореневу особливість, що є наслідком розриву пружних кутів повороту. При цьому виникає парадокс взаємопроникнення пружних елементів при їх повороті навколо лінії поділу крайових умов.

Література

[1] *Снеддон И.* Преобразование Фурье. — М.: Издат. иностр. л-ры, 1955. — 580 с.
[2] *Галазюк В. А.*, *Сулим Ґ. Т.* Рівновага дискової щілини з урахуванням на її поверхнях межового шару з реологічними властивостями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2004. — № 4. — С. 17-33.
[3] *Галазюк В. А.*, *Сулим Ґ. Т.* Некласична математична модель деформування пружного півпростору з тонким дисковим абсолютно жорстким включенням // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А: Природ. науки. — 2002. — Вип. 1. — С. 77-82.
[4] *Градштейн И. С.*, *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. — М.: Гос. издат. физ.-мат. л-ры, 1963. — 1100 с.

Математическая модель деформирования упругого полупространства под воздействием нормальной нагрузки на его границе

Виталий Галазюк, Георгий Сулим

Предположение о равенстве нулю касательных напряжений на границе упругого полупространства при ее гладкой нормальной нагрузке предопределяет парадокс взаимопроникновения точек материального континуума, если объемная деформация $|\theta| > 0$. *Показано, что для избегания этой физической некорректности достаточно предположить, что граница тела обладает реологическими свойствами, которые позволяют регулировать ее* *вертикальные перемещения распределением на ней по определенному закону касательных напряжений. Доказано, что всегда существует такой закон распределения касательных напряжений, который делает вертикальные перемещения границы нулевыми при произвольной нормальной нагрузке. Эта идея оказалась состоятельной в задачах со смешанными краевыми условиями, поскольку дала возможность выполнить дополнительное физическое требование непрерывности компонент вектора* $\Omega = 0{,}5\,\mathrm{rot}\,\vec{u}$ *на линии раздела краевых условий и этим обеспечить существование физически корректного решения, которое согласовано с ограничениями линейной модели деформируемого твердого тела. Если вне области нагрузки потребовать равенства нулю касательных напряжений, то на границе области нагрузки они становятся сингулярными с корневой особенностью так же, как и компоненты вектора* $\mathbf{\Omega}$. *При этом имеет место парадокс взаимопроникновения вследствие разрыва углов поворота нормальных элементов вокруг линии раздела краевых условий.*

Mathematical Model of Straining of Elastic Half Space under Normal Load on its Boundary

Vitaliy Halaziuk, Georgiy Sulym

The assumption on vanishing of the tangential stresses on the boundary of the elastic half space under its smooth normal load causes a paradox of infiltration of points of material continuum whenever the dilatational strain $|\theta| > 0$. *We demonstrate that, in order to avoid this physical ill-posedness, it is sufficient to assume that the boundary of the solid satisfies some flow properties that allow us to regulate its vertical displacements by means of distribution of tangential stresses on it, with respect to a certain law. It is proved that there always exists a distribution law such that the vertical displacements of the boundary are equal to zero under arbitrary normal load. This idea turned out to be meaningful in the problems with mixed boundary conditions, because it made possible to fulfill an additional physical condition of continuity of components of the vector* $\mathbf{\Omega} = 0{,}5\,\mathrm{rot}\,\vec{u}$ *on the separation curve of boundary conditions and therefore to ensure existence of physically correct solution that agrees with restrictions of linear model of solid deformable body. If we require that the tangential stresses vanish outside the load domain, then, on the boundary of the load domain, they became singular with kernel singularity, as well as components of the vector* $\mathbf{\Omega}$. *Here, a paradox of infiltration occurs, because of discontinuity of rotation angles of the normal elements around the separation curve of boundary conditions.*

Отримано 10.02.06