УДК 539.3:537.8

Рівняння електромагнітомеханіки пористого насиченого середовища

Василь Кондрат

д. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С.Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: kon@cmm.lviv.ua

За двоконтинуумного наближення отримано повну систему співвідношень моделі електромагнітомеханіки статистично однорідного та ізотропного пористого насиченого середовища. Враховано наявність подвійного електричного шару в околі межі контакту твердої і рідкої фаз.

Ключові слова: пористе насичене середовище, подвійний електричний шар, механоелектромагнітні процеси, просторове усереднення.

Вступ. Пористі тіла характеризуються великою площею внутрішньої поверхні розділу фаз, питома величина якої може досягати $4 \cdot 10^5$ ì ^{2}/êã [9]. У зв'язку з цим можна очікувати суттєвого впливу поверхневих явищ на протікання в них фізико-механічних процесів. Одним із наслідків взаємодії скелета і порової рідини є наявність подвійного електричного шару в околі поверхні їхнього контакту [6, 22]. Саме з ним пов'язують взаємодію механічних та електромагнітних процесів у пористих насичених тілах та ефекти, зумовлені такою взаємодією [1, 5, 8, 11, 23, 24, 27]. До них належать насамперед стаціонарні електрокінетичні явища, а саме: відкрите в 1808 році Реусом явище електроосмосу (протікання рідини в пористому тілі під дією зовнішнього постійного електричного поля) та в другій половині дев'ятнадцятого століття Квінке обернене явище виникнення потенціалу протікання (різниці електричних потенціалів під впливом фільтрації рідини через пористу діафрагму). Відповідні динамічні аналоги — явища сейсмоелектричного та оберненого йому електросейсмічного ефектів —були відкриті Івановим [8] в 1939 році та Анциферовим [1] в 1963 році. Електрокінетичні явища надалі знайшли широке використання в практиці, зокрема, у вимірювальній техніці [5]. На основі поєднання рівнянь механіки пористого середовища та електрокінетичних співвідношень, Френкель [21] у 1944 році вперше запропонував опис сейсмоелектричного ефекту. Дослідження впливу електрокінетичних властивостей пористого насиченого середовища на параметри поздовжніх хвиль провів Мігунов [14, 15] наприкінці сімдесятих років. За основу була прийнята взаємозв'язана система рівнянь, яка включала рівняння механіки пористого середовища з урахуванням кулонівської пондеромоторної сили, рівняння Максвела з урахуванням впливу рухомості середовища та електрокінетичні співвідношення. Зазначимо однак, що послідовна побудова моделі електромагнітомеханіки пористого насиченого середовища повинна базуватися на загальнішій, ніж прийнято в механіці пористих тіл, фізичній моделі. Існуюча фізична модель середовища не враховувала достатньо повно взаємодію твердої та рідкої фаз, зокрема, подвійний електричний шар в околі поверхні їх контакту.

Вперше спроба послідовного отримання взаємозв'язаної системи макроскопічних рівнянь електромагнітомеханіки пористого насиченого тіла на основі фізичної моделі, яка враховує подвійні електричні шари, та методу просторового усереднення була здійснена в роботі [10] (див. також [18]). Однак, використані там додаткові припущення щодо співвідношення між векторами електромагнітного поля у фазах і середовищі обмежували область застосування побудованої моделі. Пізніше, з використанням такого ж підходу, Прайдом [26] одержано систему макроскопічних лінійних рівнянь електромагнітної механіки для опису гармонічних хвильових процесів. У цій роботі будується система макроскопічних рівнянь електромагнітомеханіки, в якій відсутні згадані вище додаткові обмеження.

1. Фізична модель

Розглянемо деформівне пористе тіло $K=K_S \cup K_f$, яке складається зі зцементованих між собою твердих пружних неферомагнітних непровідних поляризовних зерен (тіло K_S, яке утворює скелет тіла K), простір між якими заповнює електропровідна неферомагнітна рідина — розчин електроліту (тіло K_f). Тіло K займає область $(V)=(V_1)\cup(V_2)$ евклідового простору, де (V_1) і (V_2) — області, які займають відповідно тіла K_f і K_S. Пористість відкрита, тому області (V_1) і (V_2) є однозв'язними. Розміри пор та зерен достатньо великі, так що для тіл K_f і K_S виконуються базові положення механіки та електродинаміки суцільного середовища [2, 12, 19]. У вихідному стані середовище статистично однорідне та ізотропне.

Подвійний електричний шар в околі межі контакту твердої та рідкої фаз утворює вихідну зарядову систему тіла. Структура подвійного електричного шару є такою, що одна його частина (адсорбційна, щільна) зв'язана з твердою фазою, а інша (дифузна) може переміщатися разом із рідиною [6, 22]. Вважаємо, що межею (S_{12}) контакту фаз є поверхня ковзання [22], для якої справджуються умови гладкості, а самі фази (тіла K_S і K_f) — електрично заряджені, хоча тіло K є макроскопічно електронейтральним і для нього виконується умова

$$\alpha_{10}\rho_{e0}^{(1)} + \alpha_{20}\rho_{e0}^{(2)} = 0 . \qquad (1)$$

Тут α_{10} — вихідне значення параметра пористості $\alpha_1=V_1/V$, V_1 — об'єм порового простору в області (V) середовища, V — об'єм області (V), $\alpha_2=1-\alpha_1$,

$\alpha_{20} = 1 - \alpha_{10}$, $\rho_{e0}^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ — середні густини зарядів фаз у початковий момент часу. Тут і надалі значення j = 1 верхнього індексу відповідає поровій рідині, а j = 2 — твердій фазі.

Вихідні усереднені електричні параметри подвійного електричного шару — густина електричного заряду $\rho_{e0}^{(j)'}$, електричний потенціал $\varphi_0^{(j)'}$, вектори $\vec{E}_0^{(j)'}$, $\vec{D}_0^{(j)'} = \varepsilon^{(j)'}\vec{E}_0^{(j)'}$, $\vec{P}_0^{(j)'} = \chi^{(j)'}\vec{E}_0^{(j)'}$ відповідно напруженості, індукції електричного поля і поляризації є характеристиками розглядуваного пористого середовища. Тут $\varepsilon^{(j)'}, \chi^{(j)'}$ — абсолютні діелектричні проникність та сприйнятливість фаз, які приймаємо сталими в областях (V_1) і (V_2) [6, 22].

Якщо товщина подвійного електричного шару значно менша за розміри пор і можна знехтувати впливом кривини шару на його параметри, то вектори вихідного електричного поля і густина електричного заряду будуть залежати лише від координати x і їх можна подати так

$$\vec{E}_0^{(j)'} = \vec{E}_0^{(j)'}(x) = E_0^{(j)'}(x)\vec{e}_x, \qquad E_0^{(j)'}(x) = -\frac{d\varphi_0^{(j)'}(x)}{dx},$$

$$\vec{D}_0^{(j)'} = \vec{D}_0^{(j)'}(x) = D_0^{(j)'}\vec{e}_x, \quad \vec{P}_0^{(j)'} = \vec{P}_0^{(j)'}(x) = P_0^{(j)'}\vec{e}_x, \tag{2}$$

де $\vec{e}_x$ — орт осі $0X$, нормальної до поверхні ковзання і спрямованої в сторону рідини.

Наприклад, якщо порова рідина є розчином симетричного бінарного електроліту, в наближенні Дебая-Хюккеля $zF_f\varphi_0^{(j)'}/2RT << 1$ ($z = z_+ = -z_-$, z_+, z_- — валентності катіонів та аніонів, $\varphi_0^{(j)'}$ — електричний потенціал точок дифузного шару, F_f — стала Фарадея, R — газова стала, T — абсолютна температура) для електричного потенціалу та густини електричного заряду в дифузному шарі можна записати [6, 22]

$$\varphi_0^{(1)'} = \varphi_1 \exp\left(-\kappa_e^{(1)'}x\right), \quad \rho_0^{(1)'} = \rho_{e00}^{(1)'} \exp\left(-\kappa_e^{(1)'}x\right), \qquad \rho_{e0}^{(1)'} = -\varepsilon^{(1)'}\left(\kappa_e^{(1)'}\right)^2 \varphi_1,$$

$$\left(k_e^{(1)'}\right)^2 = 2\pi F_f^2 z^2 C_0 / \varepsilon^{(1)'} RT\ , \tag{3}$$

де φ_1 — потенціал поверхні найбільшого наближення іонів [6], C_0 — концентрація електроліту. Приймемо [22], що потенціал φ_1 дорівнює електрокінетичному потенціалу ζ.

Усереднені густини електричного заряду $\rho_{e0}^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ у фазах визначаються співвідношеннями

$$\rho_{e0}^{(j)} = (-1)^{j+1}\frac{s_{12}\rho_{se0}^{(1)'}}{\alpha_{j0}}, \quad \rho_{se0}^{(1)'} = \int_0^\infty \rho_{e0}^{(1)'}(x)dx, \tag{4}$$

де $s_{12} = S_{12}/V$ — густина поверхні контакту фаз, S_{12} — її площа в області (V).

Враховуючи співвідношення Козені-Кармана [9] $s_{12}^2 = \alpha_1^3/\left(fT_\Gamma^2 k_p\right)$, вираз (4) для $\rho_{e0}^{(1)}$ за прийнятого наближення можна записати

$$\rho_{e0}^{(1)} = \sqrt{\frac{2\varepsilon^{(1)'} C_0 \alpha_1}{fRTk_p}} \frac{zF_f \varphi_1}{T_\Gamma}. \tag{5}$$

Тут $\varepsilon^{(1)}$ — середня абсолютна діелектрична проникність рідкої фази, f — параметр форми пор, T_Γ — звивистість, k_p — коефіцієнт проникності.

2. Мезо-опис механоелектромагнітних процесів

Система рівнянь, яка описує взаємозв'язані механічні та електромагнітні процеси в зернах скелету та поровій рідині (мезо-рівняння) включає рівняння механіки з урахуванням пондеромоторних сил, співвідношення електродинаміки повільно рухомого середовища для кожної з фаз і контактні умови, записані на поверхні їх розділу. Зазначимо, що рівняння електродинаміки та механіки є взаємопов'язаними і складають повну систему співвідношень моделі. У лабораторній системі координат (змінні Ейлера) ці рівняння, записані для збурень параметрів напружено-деформованого стану, можна подати так [20]

$$\frac{\partial \rho^{(j)'}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho^{(j)'} \vec{v}^{(j)'}\right) = 0; \tag{6}$$

$$\rho^{(j)'} \frac{d_j \vec{v}_k^{(j)'}}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma}^{(j)'} + \rho^{(j)'} \vec{F}^{(j)'} + \vec{F}_\Lambda^{(j)'}; \tag{7}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_p^{(j)'} = -\frac{\partial \vec{B}_p^{(j)'}}{\partial t}, \ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_p^{(j)'} = 0, \ \vec{\nabla} \times \vec{H}_p^{(j)'} = \vec{j}_p^{(j)'} + \frac{\partial \vec{D}_p^{(j)'}}{\partial t}, \ \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_p^{(j)'} = \rho_{ep}^{(j)'}; \tag{8}$$

$$\hat{\sigma}^{(j)'} = -p^{(j)'} \hat{I} + \hat{\Pi}^{(j)'}, \qquad \hat{\Pi}^{(j)'} = 2\eta_2 \hat{\omega}^{(j)'} + \left(\eta_1 - \frac{2}{3}\eta_2\right)\omega^{(j)'} \hat{I},$$

$$\hat{\sigma}^{(2)'} = 2G^{(2)'} \hat{e}^{(2)'} + \left(K^{(2)'} - \frac{2}{3}G^{(2)'}\right) e^{(2)'} \hat{I}, \qquad \hat{e}^{(2)'} = \frac{1}{2}\left[\vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{(2)'} + \left(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{(2)'}\right)^T\right],$$

$$\hat{\omega}^{(1)'} = \frac{1}{2}\left[\vec{\nabla} \otimes \vec{v}^{(1)'} + \left(\vec{\nabla} \otimes \vec{v}^{(1)'}\right)^T\right]; \tag{9}$$

$$\vec{D}_p^{(j)'} = \varepsilon^{(j)'} \vec{E}_p^{(j)'} + \left(\mu^{(j)'} \varepsilon^{(j)'} - \mu_0 \varepsilon_0\right) \vec{v}^{(j)'} \times \vec{H}_p^{(j)'},$$

$$\vec{B}_p^{(j)'} = \mu^{(j)'} \vec{H}_p^{(j)'} + \left(\mu^{(j)'} \varepsilon^{(j)'} - \mu_0 \varepsilon_0\right) \vec{v}^{(j)'} \times \vec{E}_p^{(j)'}; \tag{10}$$

$$\rho_{ep}^{(j)'} = \rho_{e0}^{(j)'} + \rho_{e}^{(j)'}; \qquad \vec{j}_p^{(j)'} = \vec{j}_*^{(j)'} + \rho_{ep}^{(j)'}\vec{v}^{(j)'},$$

$$\vec{j}_*^{(1)'} = \sigma_e^{(1)'}\vec{E}_*^{(1)'}, \; \vec{E}_*^{(1)'} = \vec{E}^{(1)'} + \vec{v}^{(1)'} \times \vec{B}^{(1)'}, \; \vec{j}_*^{(2)'} = 0; \tag{11}$$

в областях (V_j) (j=1, 2);

$$\vec{u}^{(1)'} = \vec{u}^{(2)'}, \quad \left(\hat{\sigma}^{(1)'} + \hat{T}^{(1)'}\right)\cdot \vec{n}^{(1)} + \left(\hat{\sigma}^{(2)'} + \hat{T}^{(2)'}\right)\cdot \vec{n}^{(2)} = 0,$$

$$\left(\vec{H}_p^{(1)'} - \vec{H}_p^{(2)'}\right)\times \vec{n}' = \vec{i}\,' + v'_n\left(\vec{D}_p^{(1)'} - \vec{D}_p^{(2)'}\right) + \rho'_{es}\vec{v}'_s, \quad \left(\vec{B}_p^{(1)'} - \vec{B}_p^{(2)'}\right)\cdot \vec{n}' = 0,$$

$$\left(\vec{E}_p^{(1)'} - \vec{E}_p^{(2)'}\right)\times \vec{n}' = v'_n\left(\vec{B}_p^{(2)'} - \vec{B}_p^{(1)'}\right), \quad \left(\vec{D}_p^{(1)'} - \vec{D}_p^{(2)'}\right)\cdot \vec{n}' = -\rho'_{es}. \tag{12}$$

на поверхні (S_{12}).

Тут $\vec{u}^{(j)'}$ — вектори переміщення, а $\vec{v}^{(j)'} = d_j\vec{u}^{(j)'}/dt$ — швидкостей фаз; $\hat{\sigma}^{(j)'}$, $\hat{e}^{(2)}$, $p^{(1)'}$ — відповідно збурення тензорів напружень Коші у фазах, тензора деформації твердої фази та тиску в рідині щодо тензорів $\hat{\sigma}_0^{(j)'}$, $\hat{e}_0^{(2)'}$, $p_0^{(1)'}$ у вихідній ситуації; $\hat{\omega}^{(1)}$ — тензор швидкості деформації у рідині; $\hat{I} = \vec{i}^{\,\alpha} \otimes \vec{i}^{\,\beta}\delta_{\alpha\beta}$ — одиничний тензор, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, $\hat{\Pi}^{(j)'}$ — тензор в'язких напружень в електроліті; $\vec{F}_\Lambda^{(j)'} = \rho_e^{(j)'}\vec{E}_*^{(j)'} + (\vec{j}^{(j)'} + \dfrac{\partial \vec{P}^{(j)'}}{\partial t}) \times \vec{B}^{(j)'} + P_\alpha^{(j)'}\nabla E_{*\alpha}^{(j)'}$ — вектор густини пондеромоторної сили; $\vec{F}^{(j)'}$ — вектор масової сили; $P_\alpha^{(j)'}, E_{*\alpha}^{(j)'}$ — компоненти векторів $\vec{P}^{(j)'}, \vec{E}_*^{(j)'}$; $\hat{T}^{(j)'} = \hat{T}_p^{(j)'} - \hat{T}_0^{(j)'}$ — збурення тензорів натягу Максвела у фазах; $\hat{T}_0^{(j)} = \vec{E}_0^{(j)} \otimes \vec{D}_0^{(j)} - 0{,}5\left(\vec{E}_0^{(j)}\cdot\vec{D}_0^{(j)}\right)\hat{I}$ — тензори Максвела у вихідній, а $\hat{T}_p^{(j)} = \vec{E}_p^{(j)} \otimes \vec{D}_p^{(j)} + \vec{H}_p^{(j)} \otimes \vec{B}_p^{(j)} - 0{,}5\left(\vec{E}_p^{(j)}\cdot\vec{D}_p^{(j)} + \vec{H}_p^{(j)}\cdot\vec{B}_p^{(j)}\right)\hat{I}$ — актуальній ситуаціях;

$$\vec{E}_p^{(j)'} = \vec{E}_0^{(j)'} + \vec{E}^{(j)'}, \; \vec{H}_p^{(j)'} = \vec{H}^{(j)'}, \quad \vec{D}_p^{(j)'} = \vec{D}_0^{(j)'} + \vec{D}^{(j)'}, \; \vec{B}_p^{(j)'} = \vec{B}^{(j)'} \tag{13}$$

— вектори напруженостей та індукцій електричного і магнітного полів у фазах, а $\vec{E}^{(j)'}$, $\vec{H}^{(j)'}$ та $\vec{D}^{(j)'}$, $\vec{B}^{(j)'}$ — їхні збурення; $\vec{P}_p^{(j)'} = \vec{D}_p^{(j)'} - \varepsilon_0 E_p^{(j)'}$ — вектор поляризації, $\vec{P}^{(j)'} = \vec{P}_p^{(j)'} - \vec{P}_0^{(j)'}$ — його збурення; $\vec{E}_*^{(j)'} = \vec{E}^{(j)'} + \vec{v}^{(j)'} \times \vec{B}^{(j)'}$ — вектор напруженості електричного поля у системі відліку центра мас j-ої фази; $\vec{j}_p^{(j)'}$, $\vec{j}_*^{(j)'}$ — вектори густини електричного струму та струму провідності у фазах; $\vec{i}\,'$ — вектор густини поверхневого струму; $\rho_{ep}^{(j)'} = \rho_{e0}^{(j)'} + \rho_e^{(j)'}$ — густина електричного заряду у фазах, $\rho_{e0}^{(j)'}$ — її вихідне значення, а $\rho_e^{(j)'}$ — збурення; ρ'_{es} — густина поверхневого заряду; $\mu^{(j)'}$ — абсолютна магнітна проникність фази *j*; μ_0, ε_0 — магнітна й електрична сталі; $\sigma_e^{(1)'}$ — коефіцієнт електропровідності рідини; $\vec{n}^{(j)}$ — нормаль до поверхні (S_{12}), яка є зовнішньою до фази *j*, $\vec{n}' = \vec{n}^{(1)'}$, $v'_n = \vec{v}'_s \cdot \vec{n}'$, $\vec{v}'_s$ — швидкість переміщення точок поверхні (S_{12}).

Зазначимо, що при записі рівнянь (11) враховано, що термодинамічною силою, яка спричинює електричний струм, є збурення електричного поля (дія вихідного поля зрівноважується дією градієнта хімічного потенціалу упоперек подвійного шару).

Для електромагнітних полів у вихідному недеформованому стані виконуються рівняння електростатики

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_0^{(j)'} = 0, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_0^{(j)'} = \rho_{e0}^{(j)'}, \qquad \vec{D}_0^{(j)'} = \varepsilon^{(j)'} \vec{E}_0^{(j)'} \tag{14}$$

в областях (V_j) (j=1, 2);

$$\left(\vec{E}_0^{(1)'} - \vec{E}_0^{(2)'}\right) \times \vec{n}' = 0, \qquad \left(\vec{D}_0^{(1)'} - \vec{D}_0^{(2)'}\right) \cdot \vec{n}' = 0. \tag{15}$$

на поверхні (S_{12}).

Зауважимо також, що у разі відсутності зовнішніх електромагнітних полів за прийнятого наближення (нехтування складовими порядку v^2/c^2 порівняно з одиницею, де v — швидкість переміщення, c — швидкість електромагнітної хвилі у вакуумі) визначальні рівняння (10) можна записати у вигляді

$$\vec{D}_p^{(j)'} = \varepsilon^{(j)'} \vec{E}_p^{(j)'}, \qquad \vec{B}_p^{(j)'} = \mu^{(j)'} \vec{H}_p^{(j)'} + \left(\mu^{(j)'} \varepsilon^{(j)'} - \mu_0 \varepsilon_0\right) \vec{v}^{(j)'} \times \vec{E}_0^{(j)'}. \tag{16}$$

Враховуючи формули (14), (15) та подання (13) для векторів поля і (2) для векторів вихідного електричного поля, співвідношення (8), (10), (11), (12) можна записати відносно збурень векторів електромагнітного поля

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^{(j)'} = -\frac{\partial \vec{B}^{(j)'}}{\partial t}, \; \vec{\nabla} \cdot \vec{B}^{(j)'} = 0, \; \vec{\nabla} \times \vec{H}^{(j)'} = \vec{j}_p^{(j)'} + \frac{\partial \vec{D}^{(j)'}}{\partial t}, \; \vec{\nabla} \cdot \vec{D}^{(j)'} = \rho_e^{(j)'}; \tag{17}$$

$$\vec{D}^{(j)'} = \varepsilon^{(j)'} \vec{E}^{(j)'}, \qquad \vec{B}^{(j)'} = \mu^{(j)'} \vec{H}^{(j)'} + \left(\mu^{(j)'} \varepsilon^{(j)'} - \mu_0 \varepsilon_0\right) \vec{v}^{(j)'} \times \vec{E}_0^{(j)'}; \tag{18}$$

$$\vec{j}_p^{(j)'} = \vec{j}_*^{(j)'} + \left(\rho_{e0}^{(j)'} + \rho_e^{(j)'}\right) \vec{v}^{(j)'},$$

$$\vec{j}_*^{(1)'} = \sigma_e^{(1)'} \vec{E}_*^{(1)'}, \qquad \vec{E}_*^{(1)'} = \vec{E}^{(1)'} + \vec{v}^{(1)'} \times \vec{B}^{(1)'}, \qquad \vec{j}_*^{(2)'} = 0 \tag{19}$$

в областях (V_j), $j = 1, 2$;

$$\left(\vec{H}^{(1)'} - \vec{H}^{(2)'}\right) \times \vec{n}' = \vec{i}\,' + v'_n \left(\vec{D}^{(1)'} - \vec{D}^{(2)'}\right) + \rho'_{es} \vec{v}'_s, \qquad \left(\vec{B}^{(1)'} - \vec{B}^{(2)'}\right) \cdot \vec{n}' = 0,$$

$$\left(\vec{E}^{(1)'} - \vec{E}^{(2)'}\right) \times \vec{n}' = v'_n \left(\vec{B}^{(2)'} - \vec{B}^{(1)'}\right), \qquad \left(\vec{D}^{(1)'} - \vec{D}^{(2)'}\right) \cdot \vec{n}' = -\rho'_{es} \tag{20}$$

на поверхні (S_{12}).

3. Просторове усереднення

Для переходу від мезо-рівнянь (6), (7), (9), (12), (17)-(20) до макроскопічних рівнянь використаємо метод просторового усереднення [13, 16, 17]. Нехай процеси, які протікають у тілі, характеризуються віддаллю $L>>l$, де l — характерний розмір пор і зерен скелету. Введемо усереднені функції [13, 16, 17]

$$\varphi^{(j)} \equiv \overline{\varphi^{(j)'}} = \frac{1}{\delta V_j} \int\limits_{(\delta V_j)} \varphi^{(j)'} d'V_j , \qquad \varphi_s^{(j)} \equiv \overline{(\varphi^{(j)'})_s} = \frac{1}{\delta S_j} \int\limits_{(\delta S_j)} \varphi^{(j)'} d'S_j$$

$$\varphi_{12}^{(j)} \equiv \overline{(\varphi^{(j)'})_{12}} = \frac{1}{s_{12}\delta V} \int\limits_{(\delta S_{12})} \varphi^{(j)'} d'S_{12} . \tag{21}$$

Тут $\varphi^{(j)'}$ — довільна шукана функція системи рівнянь (6), (7), (9), (12), (17)-(20) , $\varphi^{(j)}, \varphi_s^{(j)}, \varphi_{12}^{(j)}$ — відповідні їй усереднені за об'ємом, поверхнею та поверхнею розділу фаз функції, $(\delta V) = (\delta V_1) \cup (\delta V_2)$, $(\delta S) = (\delta S_1) \cup (\delta S_2)$.

При цьому справджуються співвідношення [16]

$$\alpha_j \overline{\frac{\partial \varphi^{k(j)'}}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha_j \overline{\varphi^{k(j)'}}\right) - s_{12} \overline{(\varphi^{k(j)'} v_n^{(j)'})_{12}} ,$$

$$\alpha_j \overline{\nabla^{l'} \varphi^{k(j)'}} = \nabla^l \left(\alpha_j \overline{\varphi^{k(j)'}}\right) + s_{12} \overline{(\varphi^{k(j)'} n^{l(j)'})_{12}} . \tag{22}$$

У формулах (22) верхній індекс k чи l відповідає контраваріантним складовим оператора Гамільтона або шуканої векторної функції.

Характерний розмір d областей усереднення вибираємо так ($l << d << L$), щоб усереднені функції були стійкими, тобто нечутливими до малих змін областей (δV_j), (δS_j) ($j = 1, 2$), (δS_{12}). Вимагаємо також, щоб вони були регулярними та представницькими [16]. Надалі не будемо розрізняти усереднені за об'ємом (δV_j) та поверхнею (δS_j) функції [16].

4. Макроскопічні (усереднені) рівняння електродинаміки

4.1. Рівняння для фаз. Застосовуючи оператори усереднення (21) до рівнянь (17)-(19) та враховуючи співвідношення (22), отримуємо

$$\vec{\nabla} \times \left(\alpha_j \vec{E}^{(j)}\right) + \frac{\partial\left(\alpha_j \vec{B}^{(j)}\right)}{\partial t} = -s_{12} \overline{(\vec{n}^{(j)'} \times \vec{E}^{(j)'} - \vec{B}^{(j)'} v_n^{(j)'})}_{12} ,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\alpha_j \vec{B}^{(j)}\right) = -s_{12} \overline{(\vec{B}^{(j)'} \cdot \vec{n}^{(j)'})}_{12} ,$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\alpha_j\vec{H}^{(j)}\right)-\alpha_j\vec{j}_p^{(j)}-\frac{\partial\left(\alpha_j\vec{D}^{(j)}\right)}{\partial t}=-s_{12}\overline{(\vec{n}^{(j)'}\times\vec{H}^{(j)'}+\vec{D}^{(j)'}v_n^{(j)'})}_{12},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\alpha_j\vec{D}^{(j)}\right)-\alpha_j\rho_e^{(j)}=-s_{12}\overline{(\vec{D}^{(j)'}\cdot\vec{n}^{(j)'})}_{12}. \tag{23}$$

При цьому, з огляду на (5), (8), для усереднених функцій електромагнітного поля у фазах маємо

$$\vec{H}_p^{(j)}=\vec{H}^{(j)},\quad \vec{B}_p^{(j)}=\vec{B}^{(j)},\quad \vec{E}_p^{(j)}=\vec{E}_0^{(j)}+\vec{E}^{(j)},\quad \vec{D}_p^{(j)}=\vec{D}_0^{(j)}+\vec{D}^{(j)},$$

$$\vec{D}_p^{(j)}=\varepsilon^{(j)}\vec{E}_p^{(j)},\quad \vec{D}^{(j)}=\varepsilon^{(j)}\vec{E}^{(j)},\quad \vec{B}^{(j)}=\mu^{(j)}\vec{H}^{(j)}+\vec{B}_\varphi^{(j)}, \tag{24}$$

$$\vec{j}_p^{(1)}=\sigma_e^{(1)}\vec{E}_*^{(1)}+\gamma_1\rho_{e0}^{(1)}\vec{v}_r^{(1)}+\gamma_2\rho_{e0}^{(1)}\vec{v}^{(2)}+\rho_e^{(1)}\vec{v}^{(1)},\qquad \vec{E}_*^{(1)}=\vec{E}^{(1)}+\vec{v}^{(1)}\times\vec{B}^{(1)},$$

$$\vec{j}_p^{(2)}=\gamma_2\rho_{e0}^{(2)}\vec{v}^{(2)}+\rho_e^{(2)}\vec{v}^{(2)}. \tag{25}$$

За прийнятого вище наближення вихідні усереднені густини електричних зарядів $\rho_{e0}^{(j)}$ (j = 1, 2) визначаються за формулами (4), (5), а вектори $\vec{E}_0^{(j)}$, $\vec{D}_0^{(j)}$, $\vec{B}_\varphi^{(j)}$ (j = 1, 2) — виразами

$$\vec{E}_0^{(j)}=\alpha_j^{-1}\left(\Delta\varphi\right)_j\vec{\nabla}\alpha_1,\qquad \vec{D}_0^{(j)}=\alpha_j^{-1}\varepsilon^{(j)}\left(\Delta\varphi\right)_j\vec{\nabla}\alpha_1,$$

$$\vec{B}_\varphi^{(1)}=\alpha_1^{-1}\left(\mu^{(1)}\varepsilon^{(1)}-\mu_0\varepsilon_0\right)(\Delta\varphi)_1\left(\vec{v}^{(2)}+\gamma_1\vec{v}_r^{(1)}\right)\times\vec{\nabla}\alpha_1,$$

$$\vec{B}_\varphi^{(2)}=\alpha_{21}^{-1}\left(\mu^{(2)}\varepsilon^{(2)}-\mu_0\varepsilon_0\right)(\Delta\varphi)_2\vec{v}^{(2)}\times\vec{\nabla}\alpha_1. \tag{26}$$

Тут $\left(\Delta\varphi\right)_1=\varphi_1$, $\left(\Delta\varphi\right)_2=\varphi_p-\varphi_1$, φ_p — потенціал подвійного шару, $\vec{v}_r^{(1)}=\vec{v}^{(1)}-\vec{v}^{(2)}$, $\vec{v}^{(j)}\left(j=1,2\right)$ — усереднені швидкості руху фаз. При отриманні формул (26) враховані співвідношення (9), (10), (14), а також $\vec{\nabla}\alpha_2=-\vec{\nabla}\alpha_1$. Коефіцієнт $\gamma_1\le 1$ відображає відмінність між середніми швидкостями руху маси та початкового заряду рідини в порі відносно скелету, а $\gamma_2\le 1$ — між середніми швидкостями переміщення початкового електричного заряду та маси твердої фази. З огляду на характер руху твердої фази приймемо $\gamma_2=1$. Кількісна оцінка коефіцієнта γ_1 наведена в [20].

Рівняння (23) описують два електромагнітні континууми, взаємодія між якими враховується інтегральними доданками і пов'язана з умовами спряження (20).

4.2. Рівняння для середовища. Згідно з принципом суперпозиції, макроскопічні усереднені збурення векторів електромагнітного поля, густин електричного струму та заряду $f=\left(\vec{E},\vec{D},\vec{B},\vec{H},\vec{j}_p,\rho_e\right)$ у середовищі задаються сумами

$$f=\sum_{j=1}^{2}\alpha_j f^{(j)},\quad f^{(j)}=\left(\vec{E}^{(j)},\vec{D}^{(j)},\vec{B}^{(j)},\vec{H}^{(j)},\vec{j}_p^{(j)},\rho_e^{(j)}\right). \tag{27}$$

Макроскопічні рівняння електродинаміки для середовища отримуємо шляхом додавання рівнянь (23) при $j = 1$ і $j = 2$. Враховуючи контактні умови (20) та співвідношення (25)-(27), одержуємо

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}^{(j)'}=-\frac{\partial\vec{B}^{(j)'}}{\partial t},\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\qquad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j}_M+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_{eM}, \tag{28}$$

де

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\qquad \vec{B}=\mu\vec{H}, \tag{29}$$

$$\rho_{eM}=\rho_e+\rho_{es},\qquad \vec{j}_M=\vec{j}_p+\vec{j}_s,$$

$$\rho_{es}=s_{12}\overline{(\sigma'_{es})}_{12},\qquad \vec{j}_s=s_{12}\overline{(\vec{i}\,')}_{12}+s_{12}\overline{(\sigma'_{es}\,\vec{v}\,'_s)}_{12}$$

$$\rho_e^{(j)}=\vec{\nabla}\cdot\vec{D}^{(j)},\qquad \vec{j}_p=\alpha_1\vec{j}_*^{(1)}+\frac{\rho_{e0}^{(1)}}{\alpha_{20}}\alpha_{11}\gamma_2\vec{v}^{(2)}+\alpha_1\gamma_1\rho_{e0}^{(1)}\vec{v}_r^{(1)}+\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\rho_e^{(j)}\vec{v}^{(j)},$$

$$\vec{j}_*^{(1)}=\sigma_e^{(1)}\vec{E}_*^{(1)},\qquad \vec{E}_*^{(1)}=\vec{E}^{(1)}+\vec{v}^{(1)}\times\vec{B}^{(1)},\qquad \alpha_{11}=\alpha_1-\alpha_{10}. \tag{30}$$

Тут ε,μ — усереднені діелектрична та магнітна проникності середовища. При записі рівнянь (30) врахована умова (1) макроскопічної електронейтральності.

Для подання усереднених поверхневих електричних зарядів і струмів через усереднені функції $\vec{E}^{(j)},\vec{D}^{(j)},\vec{v}^{(j)}$ $(j=1,2)$ використаємо умови (20) на поверхні контакту фаз, а також співвідношення $\vec{i}\,'=0{,}5\sigma'_{es}\left(\vec{E}^{(1)'}+\vec{E}^{(2)'}\right)$ [3], де σ'_{es} — коефіцієнт поверхневої електропровідності. Виконуючи усереднення згідно (21), (22) та нехтуючи добутками флуктуаційних складових полів і відмінністю усереднених швидкостей переміщення твердої фази та поверхні розділу фаз, отримуємо

$$\rho_{es}=s_{12}\overline{(\rho'_{es})}_{12}=\left(\vec{D}^{(1)}-\vec{D}^{(2)}\right)\cdot\vec{\nabla}\alpha_1,$$

$$\vec{j}_s=s_{12}\overline{(\vec{i}\,')}_{12}+s_{12}\overline{(\rho_{es}'\vec{v}_s)}_{12}=0{,}5\sigma_{es}\left(\vec{E}_*^{(1)}+\vec{E}_*^{(2)}\right)+\left[\left(\vec{D}^{(1)}-\vec{D}^{(2)}\right)\vec{\nabla}\alpha_1\right]\vec{v}^{(2)}, \tag{31}$$

де σ_{es} — усереднений коефіцієнт поверхневої електропровідності.

Система рівнянь (28)-(31) не є замкнутою. Для її замикання потрібно встановити зв'язок між векторами $\vec{E}^{(j)},\vec{H}^{(j)}$ $(j=1,2)$ електромагнітного поля у фазах та векторами $\vec{E},\vec{H}$ у середовищі. Для розглядуваного статистично однорідного та ізотропного середовища природно припустити, що

$$\vec{E}^{(j)}=f_E^{(j)}\vec{E},\quad \vec{H}^{(j)}=f_H^{(j)}\vec{H}. \tag{32}$$

Рівняння для визначення параметрів $f_E^{(j)}$, $f_H^{(j)}$ $(j=1,2)$ випливають зі співвідношень (24), (27), (29), (32)

$$\sum_{j=1}^{2}\alpha_j f_E^{(j)}\varepsilon^{(j)}=\varepsilon,\quad \sum_{j=1}^{2}\alpha_j f_E^{(j)}=1,\quad \sum_{j=1}^{2}\alpha_j f_H^{(j)}\mu^{(j)}=\mu,\quad \sum_{j=1}^{2}\alpha_j f_H^{(j)}=1. \tag{33}$$

Враховуючи, що $\mu^{(1)}=\mu^{(2)}$, з (33) отримуємо, що й $\mu=\mu^{(j)}$. Приймаючи до уваги умови (20) спряження полів на межі контакту фаз, можемо стверджувати, що $f_H^{(j)}=1$. Із рівнянь (33) для коефіцієнтів пропорційності векторів напруженості електричного поля одержуємо

$$f_E^{(j)}=\frac{\varepsilon-\varepsilon^{(3-j)}}{\alpha_j(\varepsilon^{(j)}-\varepsilon^{(3-j)})},\quad j=1,\,2. \tag{34}$$

Зазначимо, що параметри ε, $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ визначають, зазвичай, експериментально.

Вирази (30), (31) для складових збурення густин електричного заряду та струму тепер можна подати так

$$\rho_{es}=\left(\varepsilon^{(1)}f_E^{(1)}-\varepsilon^{(2)}f_E^{(2)}\right)\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\alpha_1,\qquad \vec{j}_M=\vec{j}_*+\vec{j}_k+\vec{j}_B,\qquad \vec{j}_*=\sigma_e\vec{E},$$

$$\sigma_e=\alpha_1\sigma_e^{(1)}+0{,}5\sigma_{es}\left(f_E^{(1)}+f_E^{(2)}\right),\quad \vec{j}_k=\alpha_1\left(\gamma_1\rho_{e0}^{(1)}+\varepsilon^{(1)}f_E^{(1)}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)\vec{v}^{(1)}+$$

$$+\left\{\frac{\rho_{e0}^{(1)}}{\alpha_{20}}\alpha_{11}\gamma_2+\alpha_2\varepsilon^{(2)}f_E^{(2)}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}+\left[\left(\varepsilon^{(1)}f_E^{(1)}-\varepsilon^{(2)}f_E^{(2)}\right)\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\alpha_1\right]\right\}\vec{v}^{(2)},$$

$$\vec{j}_B=\left[\left(\alpha_1\sigma_e^{(1)}+0{,}5\sigma_{es}\right)\vec{v}^{(1)}+0{,}5\sigma_{es}\vec{v}^{(2)}\right]\times\vec{B}. \tag{35}$$

Зауважимо, що при дослідженні сейсмоелектричного ефекту у зовнішньому електричному полі [18, 23] необхідно врахувати, що параметр σ_e електропровідності середовища залежить від ефективних напружень пористого тіла [7].

Усереднення рівнянь балансу маси (6) та імпульсу (7) дає

$$\frac{\partial\left(\alpha_j\rho^{(j)}\right)}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\alpha_j\rho^{(j)}\vec{v}^{(j)}\right)=0, \tag{36}$$

$$\alpha_j\rho^{(j)}\frac{d_j\vec{v}^{(j)}}{dt}=\vec{\nabla}\cdot\left(\alpha_j\hat{\sigma}^{(j)}\right)+\alpha_j\vec{F}_\Lambda^{(j)}+\alpha_j\rho^{(j)}\vec{F}^{(j)}+\vec{R}^{(j)}\quad\left(j=1,\,2\right). \tag{37}$$

Тут $\vec{R}^{(j)}=s_{12}\overline{(\hat{\sigma}^{(j)'}\cdot\vec{n}^{(j)'})_{12}}$ — вектори густин об'ємних сил, спричинених взаємодією порової рідини та скелету. Приймемо [17, 25], що

$$\vec{R}^{(1)} = p^{(1)}\vec{\nabla}\alpha_1 + \vec{R}\,, \qquad \vec{R} = A\left(\vec{v}^{(2)} - \vec{v}^{(1)}\right) - \rho_{12}\left(d_2\vec{v}^{(2)}/dt - d_1\vec{v}^{(1)}/dt\right), \tag{38}$$

де ρ_{12} — параметр приєднаної маси; для ламінарного протікання порової рідини $A = \alpha_1\eta_2/k_p$ [17], k_p — коефіцієнт проникності середовища.

З умов (20) маємо

$$\vec{R}^{(2)} = s_{12}\overline{(\hat{\sigma}^{(2)'} \cdot \vec{n}^{(2)'})}_{12} = -s_{12}\left[\overline{(\hat{\sigma}^{(1)'} + \hat{T}^{(1)'} - \hat{T}^{(2)'}) \cdot \vec{n}^{(1)'}}\right]_{12} =$$

$$= p^{(1)}\vec{\nabla}\alpha_2 - \vec{R} + \vec{R}^{(2)}_{\Lambda}, \qquad \vec{R}^{(2)}_{\Lambda} = s_{12}\left[\overline{(\hat{T}^{(2)'} - \hat{T}^{(1)'}) \cdot \vec{n}^{(1)'}}\right]_{12}. \tag{39}$$

Введемо також ефективний (фіктивний) тензор напружень $\hat{\sigma}_f$ за формулою [13, 17]

$$\hat{\sigma}_f = \alpha_2\left(\hat{\sigma}^{(2)} + p^{(1)}\hat{I}\right). \tag{40}$$

Якщо знехтувати силами в'язкості у поровій рідині [13, 17], то рівняння (37) руху фаз набуде вигляду

$$\alpha_1\rho^{(1)}\frac{d_1\vec{v}^{(1)}}{dt} = -\alpha_1\vec{\nabla}p^{(1)} + \vec{R} + \alpha_1\vec{F}^{(1)}_{\Lambda} + \alpha_1\rho^{(1)}\vec{F}^{(1)},$$

$$\alpha_2\rho^{(2)}\frac{d_2\vec{v}^{(2)}_k}{dt} = \vec{\nabla}\cdot\hat{\sigma}_f - \alpha_2\vec{\nabla}p^{(1)} - \vec{R} + \alpha_2\vec{F}^{(2)}_{\Lambda} + \vec{R}^{(2)}_{\Lambda} + \alpha_2\rho^{(2)}\vec{F}^{(2)}. \tag{41}$$

Тут

$$\hat{\sigma}_f = \alpha_2\left[\left(K_f - \frac{2}{3}G_f\right)e^{(2)}\hat{I} + 2G_f\hat{e}^{(2)} + \nu_f p^{(1)}\hat{I}\right], \qquad \rho^{(j)} = \rho^{(j)}_0\left(1 - \beta^{(j)}p^{(j)}\right)$$

$$\hat{e}^{(2)} = \frac{1}{2}\left[\vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(2)} + \left(\vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(2)}\right)^T\right], \qquad p^{(2)} = p^{(1)} - \frac{1}{\alpha_2}\sigma_f\,, \tag{42}$$

де K_f, G_f — ефективні модулі стиску і зсуву скелету, $\beta^{(j)}$ — усереднена стисливість фаз, $\rho^{(j)}_0$ — вихідна (початкова) усереднена густина маси j-ої фази, ν_f — зцементованість скелету.

Вектори $\vec{F}^{(j)}_{\Lambda}$ $\left(j = 1, 2\right)$ та $\vec{R}^{(2)}_{\Lambda}$ пондеромоторних сил подаються через вектори електромагнітного поля так [20]

$$\vec{F}^{(j)}_{\Lambda} = \rho^{(j)}_e\vec{E}^{(j)}_* + \left(\vec{j}^{(2)} + \frac{\partial\vec{P}^{(2)}_r}{\partial t}\right)\times\vec{B}^{(2)} + \sum_{\alpha=1}^{3}\vec{P}^{(j)}_{\alpha}\vec{\nabla}E^{(j)}_{*\alpha}\,,$$

$$\vec{R}_{\Lambda}^{(2)} = \left(\hat{T}^{(2)} - \hat{T}^{(1)}\right) \cdot \vec{\nabla} \alpha_2 + D_{0s} s_{12} \left(\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}\right), \tag{44}$$

де D_{0s} — значення індукції електричного поля на поверхні $\left(S_{12}\right)$ у вихідній ситуації.

Висновки. Отримана система співвідношень (28)-(30), (34), (35), (38), (41)-(43) є повною і може бути використана для дослідження взаємозв'язаних механічних та електромагнітних процесів у статистично ізотропних та однорідних пористих тілах, насичених рідиною. У ній відсутні обмеження, прийняті в роботах [10 ,18, 26]. Пондеромоторні сили дії на матеріальні континууми зі сторони електромагнітного поля враховують сили Кулона й Ампера, силу дії на дипольний момент у неоднорідному електричному полі, а також силу, яка діє на межу розділу фаз. Значення електричного потенціалу, напруженості та індукції електричного поля подвійного електричного шару у відліковій ситуації є характеристиками моделі.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки Фонду фундаментальних досліджень Міністерства науки та освіти України.

Література

[1] *Анцыферов М. С.* Электросейсмический эффект // Доклады АН СССР. — 1962. — Т. 144, № 6. — С. 1295-1297.

[2] *Бреховских Л. М., Гончаров В. В.* Введение в механику сплошных сред. — М.: Наука, 1982. — 335 с.

[3] *Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Гнідець Б. М.* Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. — К.: Наук. думка, 1978. — 232 с.

[4] *Бурак Я. Й., Кондрат В. Ф.* Рівняння електродинаміки повільно рухомих пористих електропровідних тіл // Волинський математичний вісник. — 2001. — № 8. — С. 27-32.

[5] *Григоров О. Н.* Электрокинетические явления. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. — 199 с.

[6] *Дерягин Б. В., Чураев Н. В., Муллер В. М.* Поверхностные силы. — М.: Наука, 1985. — 398 с.

[7] *Добрынин В. М.* Деформации и изменения физических свойств коллекторов нефти и газа. — М.: Недра, 1970. — 239 с.

[8] *Иванов А. Г.* Эффект электризации пластовых залежей при прохождении через них упругих волн // Доклады АН СССР. — 1939. — Т. 24, № 11. — С. 41-44.

[9] *Кобранова В. Н.* Петрофизика. — М.: Недра, 1986. — 392 с.

[10] *Кондрат В. Ф.* К исследованию механоэлектромагнитных процессов в пористых насыщенных средах во внешнем электрическом поле // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. — Ереван: АН Арм. ССР, 1987. — С. 166-170.

[11] *Кузнецов О .Л., Симкин Э. М.* Преобразование и взаимодействие геофизических полей в литосфере. — М.: Недра, 1990. — 269 с.

[12] *Ландау Л .Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. — 620 с.

[13] Механика насыщенных пористых сред / *В. Н. Николаевский, К. С. Басниев, А. Т. Горбунов, Г.А.Зотов.* —М.: Недра, 1970. — 335 с.

[14] *Мигунов Н. И.* Влияние электрокинетических свойств горных пород на скорость распространения сейсмоэлектрических сигналов // Изв. АН СССР. — Сер. Физика Земли. —1978. — № 5. — С. 52-56.

[15] *Мигунов Н. И.* О распространении продольных упругих волн в грунтах с электрокинетическими свойствами // Изв. АН СССР. — Сер. Физика Земли. — 1981. — № 3. — С. 47-54.
[16] *Нигматулин Р. Н.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. — М.: Наука, 1987. — 464 с.
[17] *Нигматулин Р. Н.* Основы механики гетерогенных сред — М.: Наука, 1978. — 336 с.
[18] Основы сейсмоэлектроразведки / *Потапов О. А., Кондрат В. Ф., Лизун С. А.* и др. М.: Недра. — 1995. — 268 с.
[19] *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. В 2-х томах.. — М.: Наука, 1976. — Т. 1. — 526 с.
[20] Фізико-математичне моделювання складних систем / *Я. Бурак, Є. Чапля, Т. Нагірний* та ін. Під ред. *Я. Бурака, Є. Чаплі*. — Львів: Сполом, 2004. — 264 с.
[21] *Френкель Я. И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. — Сер. Географ. и геофиз. — 1944. — Т. 8, № 4. — С. 133-150.
[22] *Фридрихсберг Д. А.* Курс коллоидной химии. — Л.: Химия, 1974. — 352 с.
[23] *Черняк Г. Я.* Электромагнитные методы в гидрогеологии и инженерной геологии. — М.: Недра, 1887. — 213 с.
[24] *Ishido T., Mizutani H.* Experimental and theoretical basis of electrokinetic phenomena in rock-water systems and its application to geophysics // J. Geophys. Res. — 1981. — V. 86. — P. 1763-1775.
[25] *Kubik J., Cieszko M., Kaczmarek M.* Podstawy dynamiki nasyconych ośrodków porowatych. — Warszawa, 2000. — 240 s.
[26] *Pride S.* Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustics of porous media // Phys. Rev. B. — 1994. — V. 50, No 21. — P. 15678-15696.
[27] *Thompson A. H., Gist G. A.* Geophysical application of electrokinetic conversion // The leading edge. — 1993. — P. 1169-1173.

Equations of an electromagnetic mechanics of the porous saturated medium

Vasyl Kondrat

Complete set of the model equations for electromagnetic mechanics of the porous saturated medium being statistically homogeneous and isotropic is obtained in two-continuum approximation. The presence of a double electrical layer in an environ of contact boundary of solid and liquid phases is taken into account.

Уравнения электромагнитомеханики пористой насыщенной среды

Василий Кондрат

В двухконтинуумном приближении получено полную систему соотношений модели электромагнитомеханики статистически однородной и изотропной пористой насыщенной среды. Учтено наличие двойного электрического слоя в окрестности границы контакта твердой и жидкой фаз.

Отримано 12.04.05